

УДК 539.376
© 1990 г.

Ю. И. КАДАШЕВИЧ, С. П. ПОМЫТКИН

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ,
УЧИТЫВАЮЩАЯ ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРА ЛОДЕ

Имеющиеся экспериментальные данные четко свидетельствуют о несомненном влиянии параметра Лоде на связь между напряжениями и деформациями [1-4]. Классические варианты теории пластичности, однако, не учитывают указанного фактора, хотя путь уточнения теории течения был намечен еще в [1]. Ниже предлагается статистический вариант теории пластического течения, в основу которого положены соображения, высказанные в [5].

1. Для более полного описания неупругого поведения материалов В. В. Новожилов [5] предложил использовать понятие фазы подобия девиаторов. Его соотношения имели вид (a_{ij}' , b_{ij}' — два соосных девиатора):

$$a_{ij}' = 2G \{ \cos(3\beta + \omega) b_{ij}' / \cos 3\beta - \sqrt{6} \sin \omega (b_{ih}' b_{hj}' - B_2^2 \delta_{ij} / 3) / (B_2 \cos 3\beta) \} \quad (1.1)$$

$$b_{ij}' = (2G)^{-1} \{ \cos(3\alpha - \omega) a_{ij}' / \cos 3\alpha + \sqrt{6} \sin \omega (a_{ih}' a_{hj}' - A_2^2 \delta_{ij} / 3) / (A_2 \cos 3\alpha) \}$$

$$A_2 = (a_{ij}' a_{ij}')^{1/2}, \quad A_3 = (a_{ij}' a_{jh}' a_{hi}')^{1/2}, \quad B_2 = (b_{ij}' b_{ij}')^{1/2}$$

$$B_3 = (b_{ij}' b_{jh}' b_{hi}')^{1/2}, \quad 2G = A_2 / B_2$$

$$\sin 3\beta = -\sqrt{6} (B_3 / B_2)^3, \quad -\pi/6 \leq \beta \leq \pi/6$$

$$\sin 3\alpha = -\sqrt{6} (A_3 / A_2)^3, \quad -\pi/6 \leq \alpha \leq \pi/6$$

Две экспериментально определяемые функции: $2G = f_1(B_2, \beta)$, $\omega = f_2(B_2, \beta)$, $\omega = \alpha - \beta$ полностью решают поставленную задачу, позволяя вычислить a_{ij}' через b_{ij}' и, наоборот, b_{ij}' через a_{ij}' .

Перестроим соотношения (1.1), введя вспомогательные тензоры b_{ij}^* , a_{ij}^* :

$$a_{ij}' = 2G \{ \cos \omega b_{ij}' - \sin \omega b_{ij}^* \},$$

$$b_{ij}' = (2G)^{-1} \{ \cos \omega a_{ij}' + \sin \omega a_{ij}^* \} \quad (1.2)$$

$$b_{ij}^* = (\sqrt{6} / \cos 3\beta) [b_{ih}' b_{hj}' / B_2 - B_2 \delta_{ij} / 3 + \sin 3\beta b_{ij}' / \sqrt{6}]$$

$$a_{ij}^* = (\sqrt{6} / \cos 3\alpha) [a_{ih}' a_{hj}' / A_2 -$$

$$- A_2 \delta_{ij} / 3 + \sin 3\alpha a_{ij}' / \sqrt{6}]$$

Соотношения (1.2) более просты и удобны для практического использования, чем (1.1), если еще и учесть, что тензоры b_{ij}' и b_{ij}^* , a_{ij}' и a_{ij}^* ортогональны друг другу. Учитывая это обстоятельство, окончательную форму связи тензоров a_{ij} и b_{ij} будем записывать следующим образом:

$$a_{ij}' = (\cos \omega b_{ij}' / B_2 - \sin \omega b_{ij}^* / B_2) \times \times \Phi_1(B_2, \beta), \quad \omega = \Phi_2(B_2, \beta) \quad (1.3)$$

$$b_{ij}' = (\cos \omega a_{ij}' / A_2 + \sin \omega a_{ij}^* / A_2) \times \times \Phi_3(A_2, \beta) \quad (1.4)$$

$$\omega = \Phi_4(A_2, \alpha), \quad \omega = \alpha - \beta$$

Отметим, что знание функций Φ_1 и Φ_2 позволяет легко вычислить функции Φ_3 и Φ_4 , если иметь ввиду, что $A_2 = \Phi_1(B_2, \beta)$, $B_2 = \Phi_3(A_2, \alpha)$. Если же потребовать, чтобы $\text{tg } \omega = -[\partial \Phi_1(B_2, \beta) / \partial \beta] [B_2 \cdot \partial \Phi_1(B_2, \beta) / \partial B_2]^{-1}$

то соотношения (1.3), (1.4) будут градиентального типа:

$$\begin{aligned} a_{ij}' &= L_{ij}' \Phi_1(B_2, \beta) / L_2 \\ L_{ij}' &= (\partial \Phi_1(B_2, \beta) / \partial B_2) (b_{ij}' / B_2) + \\ &+ (\partial \Phi_1(B_2, \beta) / \partial \beta) (b_{ij}^* / B_2^2) \\ L_2 &= (L_{ij}' L_{ij}')^{1/2} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Если уравнение $A_2 = \Phi_1(B_2, \beta)$ можно представить в виде $B_2 = F(A_2, \beta)$ то, имея ввиду формулы $\partial \Phi_1 / \partial B_2 = (\partial F / \partial A_2)^{-1}$, $\partial \Phi_1 / \partial \beta = -(\partial F / \partial \beta) (\partial F / \partial A_2)^{-1}$ получим представление L_{ij} в форме $L_{ij}' = (\partial F / \partial A_2)^{-1} (b_{ij}' / B_2 - (\partial F / \partial \beta) (b_{ij}^* / B_2^2))$. Если, в частности, $\Phi_1(B_2, \beta) = \Phi_1(B_2 \cdot \varphi(\beta))$, тогда имеем:

$$\begin{aligned} \text{tg } \omega &= -\varphi'(\beta) / \varphi(\beta), \quad B_2 \cdot \varphi(\beta) = \Phi_1^{-1}(A_2) = f(A_2) \\ L_{ij}' &= [1/f'(A_2)] [\varphi(\beta) b_{ij}' / B_2 + \varphi'(\beta) b_{ij}^* / B_2] \\ L_2 &= \{[\varphi(\beta)]^2 + [\varphi'(\beta)]^2\}^{1/2} / f'(A_2) \end{aligned}$$

Приведенные выше результаты имеют вполне самостоятельное значение, так как они справедливы для любых соосных тензоров.

2. Применим полученные результаты к теории течения. Пусть соосны тензоры $d\varepsilon_{ij}^p$ и τ_{ij} . Тогда при выполнении вспомогательных соотношений $\tau_{ij} = \sigma_{ij}' - \rho_{ij}'$, $d\rho_{ij}' / d\lambda + c\rho_{ij}' = ad\varepsilon_{ij}^p / d\lambda + b\varepsilon_{ij}^p$ имеем, что

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{ij}^p &= L_{ij}' d\Phi_1(T_2, \beta), \quad \lambda = \Phi_1(T_2, \beta), \\ d\lambda &= (d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p)^{1/2} \quad T_2 = (\tau_{ij} \tau_{ij})^{1/2}, \\ T_3 &= (\tau_{ij} \tau_{jk} \tau_{ki})^{1/2}, \quad \sin 3\beta = -\sqrt{6} (T_3 / T_2)^3 \end{aligned} \quad (2.1)$$

здесь ε_{ij}^p — девиатор тензора пластических деформаций, σ_{ij}' — девиатор тензора напряжений, ρ_{ij}' — девиатор тензора добавочных напряжений, характеризующий положение центра поверхности текучести, τ_{ij} — девиатор тензора активных напряжений. После ряда элементарных преобразований окончательные соотношения примут вид $(T_2 \cdot \varphi(\beta) = f(\lambda))$:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{ij}^p &= L_{ij}' d\lambda / L_2, \\ L_{ij}' / L_2 &= \cos \omega \tau_{ij} / T_2 - \sin \omega \tau_{ij}^* / T_2 \\ \text{tg } \omega &= -\varphi'(\beta) / \varphi(\beta), \\ d\lambda &= (1/E_\sigma) (L_{kl}' d\sigma_{kl}' / L_2) \\ E_\sigma &= a + bL_{ij}' \varepsilon_{ij}^p / L_2 - cL_{ij}' \rho_{ij}' / L_2 + 1 / L_2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Легко выписываются соотношения и в случае, когда задается тензор активных деформаций $\tau_{ij} (\tau_{ij} = m\varepsilon_{ij}' - \rho_{ij}')$. Они имеют вид:

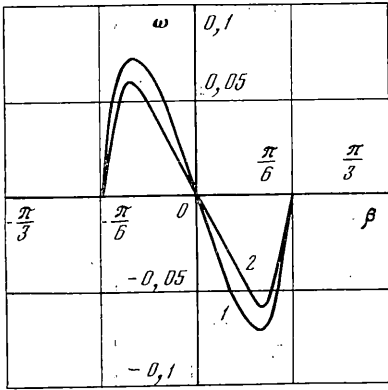
$$\begin{aligned} d\varepsilon_{ij}^p &= L_{ij}' d\lambda / L_2, \quad d\lambda = (1/E_\varepsilon) (L_{kl}' d\varepsilon_{kl}' / L_2) \\ E_\varepsilon &= (2G)^{-1} [2G + a + bL_{ij}' \varepsilon_{ij}^p / L_2 - cL_{ij}' \rho_{ij}' / L_2 + 1 / L_2] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из изложенной выше теории вытекает, что теория полностью конкретизирована, если известны функции Φ_1 и Φ_2 , а также параметры a, b, c . Полных данных экспериментального плана еще недостаточно, однако, отметим некоторые соображения по этому вопросу: опыты показывают, что для металлов закон градиентального течения должен быть сохранен; уравнение поверхности текучести металлов, учитывающее влияние третьего инварианта удовлетворительно описывается уравнением вида $B_2 \cdot \varphi(\beta) = f(\lambda)$; в [1] — $\varphi(\beta) = (1 - a_0 \sin^2 3\beta)^{1/2}$; в [6] — $\varphi(\beta) = 1 + a_0 (\cos \beta - 1)$; используется также более сложная зависимость $^1 - B_2 = n(\lambda) + q(\lambda) \varphi_1(\beta)$, $\varphi_1(\beta) = 1 + a_0 \sin^m 3\beta$.

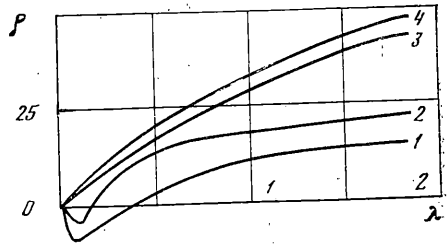
На фиг. 1 приведены типичные опытные данные, заимствованные из работы [1]. Данные для средней стали (кривая 1) и меди (кривая 2) перестроены в осях $\omega \sim \beta$. Анализируя опытные данные, можно прийти к выводу о целесообразности представления $\varphi(\beta)$ в форме $\varphi(\beta) = \exp(k_1 (\cos 6\beta - 1))$ (откуда $\text{tg } \omega = -6k_1 \sin 6\beta$) или даже в форме:

$$\varphi(\beta) = \exp(k_2 (\beta - \beta_1)), \quad -\beta_2 \leq \beta \leq -\beta_1, \quad \text{tg } \omega = k_2$$

¹ Даншин В. В. Обоснование применимости обобщенной модели неупругости для упругоэластических процессов сложного нагружения: автореф. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04. М., 1988. 25 с.



Фиг. 1



Фиг. 2

$$\begin{aligned} \varphi(\beta) &= \exp(-k_2(\beta - \beta_1)), & \beta_1 \leq \beta \leq \beta_2, & \operatorname{tg} \omega = -k_2 \\ \varphi(\beta) &= 1, & 0 \leq |\beta| \leq \beta_1, & \beta_2 \leq |\beta| \leq \pi/6 \\ & & 0 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq \pi/6, & \omega = 0 \end{aligned}$$

Отметим, что для многих материалов среднее значение ω на промежутке от $-\pi/6$ до 0 невелико. Например: для алюминия оно равно 0,06, для меди — 0,05, для стали — 0,04—0,07.

3. В [4] впервые привлечено внимание исследователей к вопросу о влиянии вида напряженного состояния на величину эффекта Баушингера. В опытах [4] начальная поверхность текучести не зависела от вида напряженного состояния, в то время как величина эффекта Баушингера существенно от него зависела. С точки зрения вышеприведенных уравнений это означает, что параметры a , b , c , могут зависеть от инварианта β . На фиг. 2 приведены опытные данные для сплава Д-16Т [4] (кривая 1 — растяжение, кривая 2 — кручение) и для Al-5056 [7] (кривая 3 — растяжение, кривая 4 — кручение) в осях $\rho \sim \lambda$, где $\rho = (\rho_{ij}' \rho_{ij}')^{1/2}$. На всех фигурах напряжения выражены в МПа, деформации — в процентах. Простейшая гипотеза, следующая из экспериментальных данных, заключается в условии, что $a = a(\beta)$.

4. Выше приведены определяющие соотношения теории в рамках одноповерхностной теории течения. Легко сформулировать теорию статистического типа, следуя идеям [8]. В этом случае локальный закон течения может быть принят в более простой форме. Выпишем достаточно простой статистический вариант теории, учитывающей влияние фазы подобия девиаторов. $\Psi(\tau_0)$ — интегральная функция распределения пределов текучести при кручении:

$$\sigma_{ij}' = \langle \sigma_{ij}' \rangle, \quad \langle \varepsilon_{ij}^p \rangle = \int_0^{\infty} \varepsilon_{ij}^p d\Psi(\tau_0)$$

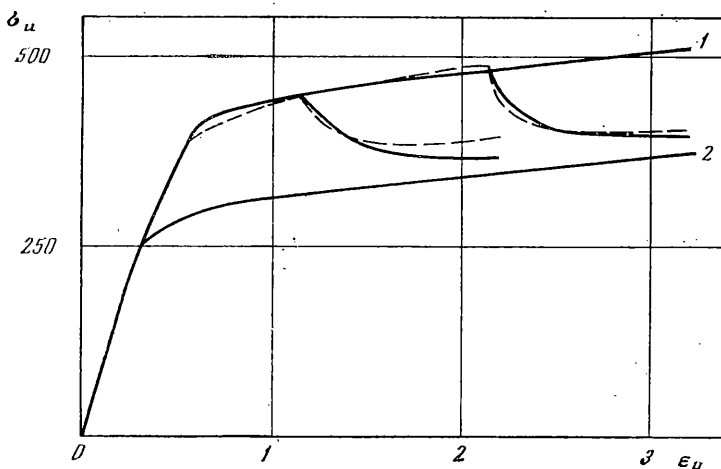
$$\begin{aligned} \tau_0 &= f(0), & T_2 \cdot \varphi(\beta) &= f(\lambda), & \tau_{ij} &= \sigma_{ij} - a \varepsilon_{ij}^p \\ T_2 &= (\tau_{ij} \tau_{ij})^{1/2}, & d\varepsilon_{ij}^p &= L_{ij}' d\lambda / L_2 \end{aligned}$$

Легко записать соотношения и для случая $\varepsilon_{ij} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle$. Здесь имеем:

$$\varepsilon_{ij}' = \langle \varepsilon_{ij}' \rangle, \quad \langle \varepsilon_{ij}^p \rangle = \int_0^{\infty} \varepsilon_{ij}^p d\Psi(\tau_0), \quad \tau_0 = f(0) T_2 \cdot \varphi(\beta) = f(\lambda)$$

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= 2G \varepsilon_{ij}' - (a + 2G) \varepsilon_{ij}^p, & d\varepsilon_{ij}^p &= L_{ij}' d\lambda / L_2 \\ d\lambda &= (2G) [a(\beta) + 2G + 1/L_2]^{-1} L_{ij}' d\varepsilon_{ij}' / L_2 \end{aligned}$$

5. В качестве иллюстрации рассмотрим ряд примеров. На фиг. 3 приведены сравнения опытных данных [3] при экспериментах на деформирование сплава Д-16Т по двузвенным ортогональным ломанным траекториям в плоскости $E_1 E_2$ пространства деформаций А. А. Ильюшина (сплошные

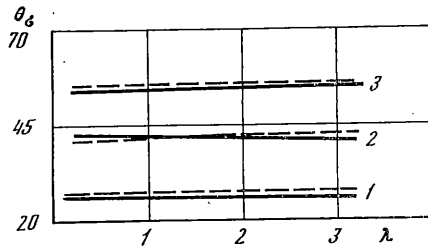


Фиг. 3

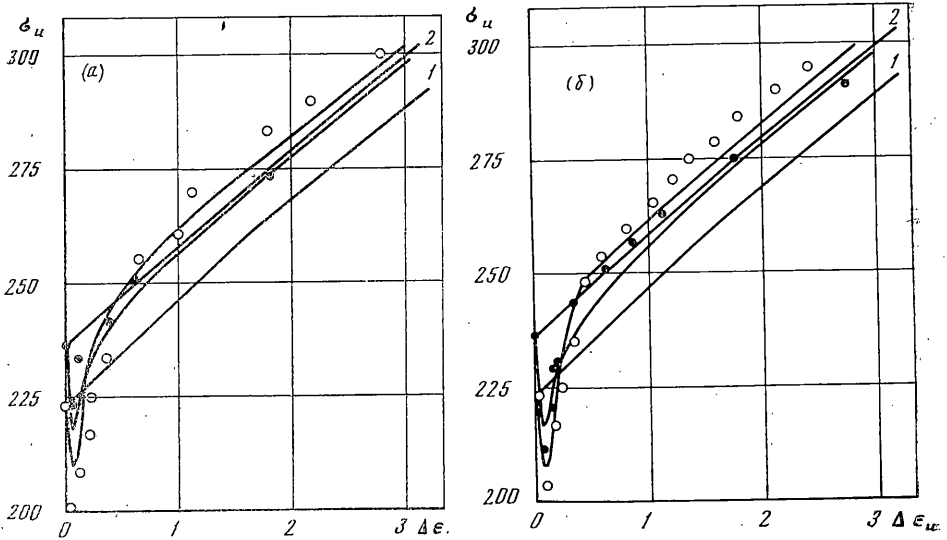
линии) и данной теории (пунктирные линии). Здесь 1 и 2 — кривые растяжения и кручения, модуль упругости $E=1 \times 10^5$ МПа, $\nu=0,3$, $\varphi(\beta) = \exp(k_1(\cos 6\beta - 1))$, $k_1=0,1836$, $f(0)=240$ МПа. Как видно, получено удовлетворительное совпадение экспериментальных данных и теоретических расчетов. На фиг. 4 представлены результаты расчетов угла $\theta_\sigma = \arctg(\sqrt{3}\sigma_{12}/\sigma_{11})$ (в градусах) при деформировании сплава *BsVM2* по лучевым траекториям в E_1E_3 . Здесь 1, 2, 3 соответствуют $\theta_\sigma=30, 45, 60^\circ$, где $E=1 \times 10^5$ МПа, $\nu=0,3$, $k_1=0,102$, $f(0)=85$ МПа, $\theta_\sigma = \arctg(2\varepsilon_{12}/\sqrt{3}\varepsilon_{11})$ [2]. Видно, что величина θ_σ меньше величины θ_ε на $4-5^\circ$, что соответствует опыту (сплошные линии — опытные данные, штриховые — расчеты по теории). Аналогичные расчеты для стали S10C [2] показывают качественное и количественное удовлетворение теории опытам. Для сравнения с данными [2] по догрузке по ортогональным траекториям стали S10C использовался частный вариант общей теории, когда полная теория переходит в двухэлементный ее частный случай. На фиг. 5, а приведены экспериментальные данные [2] в плоскости E_1E_3 (точки — траектория «растяжение-кручение», кружки — траектория «кручение-растяжение», $\varepsilon_0=2 \times 10^{-2}$) и результаты расчетов (сплошные линии), а на фиг. 5, б. — в плоскости E_1E_2 (точки — траектория «растяжение — внутреннее давление», кружки — траектория «внутреннее давление — растяжение», $\varepsilon_0=2 \times 10^{-2}$). Номера 1 и 2 на обеих фигурах — кривые растяжения и кручения, $\Delta\varepsilon_u = \varepsilon_u - \varepsilon_0$, $\varepsilon_u = (2\varepsilon_{ij}'\varepsilon_{ij}'/3)^{1/2}$. При расчетах использовали следующие параметры: $b=0$, $c=0$, $\nu=0,3$, $E=2 \times 10^5$ МПа, $k_1=0,0472$, $a(\beta) = A + B\beta$. Для первого элемента — $f(0)=150$ МПа, $f(1,7 \times 10^{-2})=130$ МПа, $A=4900$, $B=1700$. Для второго элемента — $f(0)=190$ МПа, $f(1,7 \times 10^{-2})=190$ МПа, $A=35$, $B=-190$.

6. Выше сознательно излагался наиболее простой вариант теории, когда у материала нестабильность учитывается лишь в первом приближении, когда $\tau = \tau(\lambda)$. На самом деле хорошо известно, что при циклическом нагружении нестабильность может проявляться гораздо более тонким образом. Наиболее удачной, как кажется, здесь будет использование идеи работы [9], в которой предлагается вводить макроскопические параметры различной природы, учитывающие нестабильность материала, например, ширину зоны активного нагружения. Однако эти вопросы выходят за рамки данной публикации.

Таким образом, предлагаемый выше подход развивает как точку зрения В. Прагера так и предложения В. В. Новожилова, касающиеся влияния параметра Лоде на соотношения между напряжениями и деформациями, дополнив ее новыми результатами, связанными с успехами статистической теории пластичности. Предлагаемая теория, уже в простейшем ее варианте, эффективно объясняет чувствительность материала к виду напряженного состояния, зависимость характера поверхности те-



Фиг. 4



Фиг. 5

гучести и эффекта Баушингера от параметра Лоде, резкие «нырки» интенсивности напряжений при ортогональном догружении и ряд других явлений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
2. Ohashi Y. Effect of complicated deformation history on inelastic deformation behaviour of metals // Mem. Fac. Eng. Nagoya University. 1982. Vol. 34. No. 1. P. 1-76.
3. Коровин И. М. Экспериментальное определение зависимости напряжение - деформация при сложном нагружении по траектории с одной точкой излома // Инж. ж. МТТ. 1964. Т. 4. № 3. С. 592-600.
4. Талыпов Г. Б. Пластичность и прочность стали при сложном нагружении. Л.: Изд-во ЛГУ, 1968. 134 с.
5. Новожилов В. В. О принципах обработки результатов статических испытаний изотропных материалов // ПММ. 1951. Т. 15. Вып. 6. С. 709-722.
6. Zyczkowski M., Kurtyka T. Generalized Ilywshin's spaces for a more adequate description of plastic hardening // Acta Mech. 1984. Vol. 52. No. 1/2. P. 1-13.
7. Ohashi Y., Kawashima K. Plastic deformation of aluminium alloy under abruptly-changing loading or strain paths // J. Mech. and Phys. of Solids. 1977. Vol. 25. No. 6. P. 409-421.
8. Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В. Об учете микронапряжений в теории пластичности // Инж. ж. МТТ. 1968. № 3. С. 82-91.
9. Кадашевич Ю. И., Клеев В. С. К вопросу об обобщенном принципе Мазинга // Пробл. прочности. 1985. № 5. С. 18-20.

Ленинград

Поступила в редакцию
22.XII.1989