МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1990

УДК 539.3

В. А. БАБЕШКО, И. И. ВОРОВИЧ, И. Ф. ОБРАЗЦОВ

ЯВЛЕНИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО РЕЗОНАНСА В ПОЛУОГРАНИЧЕННЫХ ТЕЛАХ С НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

В публикуемой работе подробно изложены некоторые результаты исследований авторов, докладывавшиеся на ряде научных симпозиумов в стране и за рубежом, по обнаруженному явлению высокочастотного резонанса [1].

1. В [1—4] [2] рассматриваются задачи о колебании массивного штампа на упругом слое, имеющем защемленной одну из граней. На низких частотах $0<\omega<\omega^*$, т. е. до первой критической, в этих работах установлено, существование неограниченного резонанса массивного штампа, наступающего при некотором значении массы. В этих работах, а также в [5—7] [3] и др. отрицается возможность резонанса такого типа для $\omega>\omega^*$. Авторами впервые доказано, что резонанс плоского массивного включения в слое и, в частности, массивного штампа, если включение выходит на его границу, может существовать и в этом, называемом ниже высокочастотном, диапазоне колебания системы.

Установлено также, что при наличии в упругом слое неоднородностей другого типа — полостей-трещин, также может существовать как низкочастотный, так и высокочастотный неограниченные резонансы. При наличии перечисленных типов неоднородностей для колебательного процесса объяснена сущность явления резонансов и установлена причинноследственная связь.

Открытие явления неограниченных высокочастотных резонансов коренным образом меняет сложившееся представление о процессе высокочастотной вибрации упругих полуограниченных тел с неоднородностями, обязывает пересмотреть ряд положений о динамической прочности и разрушении деформируемых тел. Изложение дается для двумерных задач, в случае трехмерных оно аналогично.

2. Интегральные уравнения динамических смешанных плоских и антиплоских задач о вибрации массивных штампов на слое или жестких включений в слое, пакете слоев конечной толщины при любых условиях на нижней границе и одной отличной от 0 компонентой контактных напряжений имеют в безразмерных переменных следующий вид [8]:

$$Gq\equiv\int_{-a}^{a}k(x-\xi)\,q(\xi)\,d\xi=1,\qquad |x|\leqslant a,\qquad -m_0\omega^2\delta=P-\delta Q(0) \tag{1}$$

$$k(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma}K(u)\,e^{-iux}\,du,\qquad Q(u)=\int_{-a}^{a}q(\xi)\,e^{iu\xi}\,d\xi \tag{2}$$

[1] Впервые результаты доложены на Ученом совете Кубанского университета в 1987 году.

[2] См. *Ворович Е. И., Пряхина О. Д., Тукодова О. М.* Возбуждение волн массивным штампом на упругом слое. М., 1984. Деп. в ВИНИТИ 3.12.84, № 7641.

[3] См. *Глушкова Н. В.* Распространение упругих волн в стратифицированных средах и их взаимодействие с поверхностными объектами: Автореферат... канд. техн. наук. Ростов н/Д, 1982.

Здесь m_0 — масса штампа или включения с плоской подошвой $\mathrm{Re}\,\delta e^{-i\omega t}$ — его смещение, $\mathrm{Re}\,Pe^{-i\omega t}$ — действующая на штамп или включение сила, $2a$ — безразмерная их ширина. Свойства функций $K(u)$ для различных контактных задач детально описаны в [8].

Рассматривая случай частот, при которых имеет место излучение энергии в слое, т. е. $\omega>\omega^*$, будем считать, что четная, мероморфная в комплексной плоскости функция $K(u)$ имеет представление вида

$$K(u)=\Pi(u)K_0(u),\quad \Pi(u)=(u^2-z^2)(u^2-\zeta^2)^{-1} \tag{3}$$
$$z>0,\quad \zeta>0,\quad K_0(u)>0,\quad K_0(u)|u|\to c,\quad |u|\to\infty$$
$$\mathrm{Im}\,u=0,\quad c\neq 0$$

Поскольку задача о колебании включения совершенно идентична задаче о штампе, ограничимся последней.

Покажем, что при $\omega>\omega^*$ найдутся полуширина a штампа и его масса m_0, при которых его амплитуда δ колебания под действием гармонической силы будет неограничена, что означает неограниченный резонанс.

3. Для доказательства представим амплитуду δ смещения массивного штампа в форме [1—4]:

$$\delta=P[Q(0)-m_0\omega^{-2}]^{-1} \tag{4}$$

Обращение квадратной скобки в нуль означает неограниченный резонанс массивного штампа [1—4]. Последнее возможно, если $\mathrm{Im}\,Q(0)=0$ в выбранном диапазоне частот и тогда беря

$$m_0=Q(0)\,\omega^{-2} \tag{5}$$

получим доказательство утверждения.

Следуя [9], локализуем вибрацию в зоне штампа. Последнее будет иметь место тогда и только тогда, когда будет выполняться соотношение статичности

$$V(z)G_0^{-1}f=0,\qquad Q_0(z)=Vq_0=0,\qquad V(u)f=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iux}\,dx \tag{6}$$

Здесь функция $q_0(x)$ определяется из интегрального уравнения

$$G_0q_0\equiv\int_{-a}^{a} k_0(x-\xi)\,q_0(\xi)\,d\xi=1,\qquad |x|\leqslant a \tag{7}$$

где G_0^{-1} — оператор, обратный к G_0. Ядро имеет вид (2), в котором $K(u)$ заменяется на $K_0(u)$. Удовлетворив соотношениям (6), (7), решение $q(x)$ уравнения (1) представим в виде [7]:

$$q(x)=V^{-1}(x)\Pi^{-1}(u)Q_0(u),\quad Q_0(u)=V(u)q_0 \tag{8}$$
$$Q(u)=\Pi^{-1}(u)Q_0(u),\qquad V^{-1}(x)F=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{-i\alpha x}\,d\alpha$$

Таким образом, для доказательства утверждения достаточно установить существование таких a, при которых имело бы место соотношение (6). Тогда будет следовать локализация вибрационного процесса в зоне штампа.

Представим, следуя [8], функцию $Q_0(u)$ в форме

$$Q_0(u)=\frac{F(u)}{K_0(u)}-\frac{X^-(u)}{K_0^+(u)}e^{-iux}-\frac{X^+(u)}{K_0^-(u)}e^{iau} \tag{9}$$
$$F(u)=2u^{-1}\sin au \tag{10}$$

Функции $X^-(u)$ и $X^+(u)$ удовлетворяют системе линейных интегральных уравнений вида [8]:

$$X^+(u)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma}\frac{e^{-2a\alpha i}X^-(\alpha)}{R(\alpha)(\alpha-u)}\,d\alpha=g^+(u),\qquad \alpha>\sigma \tag{11}$$

$$X^-(u)-\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{R(\alpha)e^{2a\alpha i}X^+(\alpha)}{(\alpha-u)}d\alpha=g^-(u), \qquad \alpha<\sigma$$

$$R(\alpha)=K_0^+(\alpha)[K_0^-(\alpha)]^{-1}, \quad K_0^+(\alpha)K_0^-(\alpha)=K_0(\alpha), \quad K_0^+(-\alpha)=K_0^-(\alpha)$$

Здесь и ниже приняты обозначения работы [8]. В [8] установлено, что интегральные уравнения (11) однозначно разрешимы в некотором пространстве функций.

Правые части $g^\pm(u)$ имеют вид

$$g^\pm(u)=\pm\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{F(\alpha)e^{\mp i\alpha a}}{K_0^\pm(\alpha)(\alpha-u)}d\alpha \tag{12}$$

В случае этажности, берутся только верхние или нижние знаки.

Несложный анализ системы интегральных уравнений (11) при условии (10) позволяет установить следующие зависимости:

$$D(u)=X^+(u)[K_0^-(u)]^{-1}=M(u,a)e^{i\theta(u,a)} \tag{13}$$
$$X^-(u)[K_0^+(u)]^{-1}=M(u,a)e^{-i\theta(u,a)}, \quad M(u,a)=|D(u)|$$
$$\theta(u,a)=\operatorname{arctg} S(u)C^{-1}(u), \quad S(u)=\operatorname{Im} D(u), \quad C(u)=\operatorname{Re} D(u)$$

Внося последние соотношения в (9), получим соотношение (6) в форме

$$\begin{gathered} Q_0(z)=\cos[az+\theta(z,a)]-A(z,a)\sin az=0 \\ A(z,a)=[zM(z,a)K_0(0)]^{-1} \end{gathered} \tag{14}$$

Отсюда получаем уравнение для определения значений a вида

$$\begin{gathered} (A^2+2A\sin\theta+1)^{1/2}\sin[az-\lambda(a)]=0 \\ \lambda(a)=\operatorname{arctg}(\cos\theta/(A+\sin\theta)) \end{gathered} \tag{15}$$

Или

$$\theta(z,a)=\pm\pi(k-0{,}5), \qquad A(z,a)=(-1)^k, \quad k=1,2,\ldots \tag{16}$$
$$az=\lambda(a)+m\pi, \qquad m=0,\pm1,\pm2,\ldots, \quad a>0 \tag{17}$$

Докажем, что при $a\gg1$ уравнение (17) имеет решения. Для $a>0$ решения интегральных уравнений (11) построены в [8] в виде равномерно и абсолютно сходящихся рядов, причем при $a\gg1$ выполняется свойство

$$X^\pm(u)=g^\pm(u)+T^\pm(u,a), \qquad |T^\pm(u,a)|<Me^{-\varepsilon a}, \quad \varepsilon>0 \tag{18}$$

где функция $T^\pm(u,a)$ аналитична по параметру a. Но тогда несложно доказывается аналитичность функции $\lambda(a)$, $a\gg1$ и представление

$$\lambda(a)=c_0+c_1(a), \quad |c_1(a)|<M_1e^{-\varepsilon a}, \quad c_0=\mathrm{const} \tag{19}$$

Отсюда следует, что при $a\gg1$ существует счетное множество корней a_m уравнения (17) вида

$$a_m=(m\pi+\lambda_m)z^{-1}, \quad m\gg1 \tag{20}$$

Утверждение доказано.

Учитывая, что для достаточно больших a в (19) функцией $c_1(a)$ можно пренебречь, то асимптотические значения a_m можем представить в форме

$$a_m=(m\pi+c_0)z^{-1}+O(m^{-1}), \quad m\gg1 \tag{21}$$

Постоянная c_0 несложно находится из (12) при $a\to\infty$. Она имеет значение

$$c_0=-\arg K_0^+(z) \tag{22}$$

Без вывода приводим аналогичную (21) формулу в случае круглого штампа радиуса a_m:

$$a_m=[(m+0{,}25)\pi+c_0]z^{-1}+O(m^{-1}), \quad m\gg1$$

4. Приняв значение полуширины штампа $a=a_m$, удовлетворяющее соотношению (5), найдем теперь значение $Q(u)$ по формуле [9]:

$$Q(u)=(u^2-\zeta^2)(u^2-z^2)^{-1}Q_0(u)$$

Теперь из формулы (5) находим резонансную массу m_0 в закритической области в виде

$$m_0=Q_0(0)\zeta^2 z^{-2}\omega^{-2}\equiv Q(0)\omega^{-2}\equiv\omega^{-1}\operatorname{Im}[\operatorname{Re} iQ(0)+i\operatorname{Im} iQ(0)]\omega^{-1} \quad (23)$$

Выражение $iQ(0)\omega^{-1}$ называется импедансом источника, в данном случае — штампа [10].

Этот результат изменяет установившееся мнение о том, что в упругом слое для частот выше критических, начиная с которых в слое излучается на бесконечность энергия, неограниченный резонанс массивного штампа невозможен. Такой резонанс возможен для массивных штампов с полушириной a_m и массой, равной импедансу источника, деленному на частоту, т. к. $\operatorname{Re} iQ(0)=0$.

5. Рассмотрим задачу о вибрации в слое конечной толщины полосовой в плане трещины, плоскость которой параллельна границам слоя.

Изучим этим же методом резонансные явления, возникающие в слое с этой неоднородностью, вызванные локализацией вибрационного процесса [9].

Резонансные явления в упругом слое изучались в работе [11] в задаче об антиплоском колебании слоя, содержащем в срединной плоскости трещину конечной длины. Исследование проводилось численным методом. К сожалению, из этой работы не удается установить — все ли из выявленных резонансов являются неограниченными, ибо сравнительно низкая точность расчетов — погрешность до 1%, недостаточна для ответа на этот вопрос.

Ниже дается обоснование существования резонансных явлений в полуограниченных областях с полостями-трещинами, как следствие локализации вибрационного процесса [9].

6. При постановке задач о вибрации полостей-трещин не будет обсуждаться вопрос о касании ее берегов при движении, так как считается, что наряду с гармоническими, на ее берега или на слой действуют статические, «разводящие» берега, напряжения. В этом смысле постановка задач о вибрации трещин аналогична постановке таких же задач о колебании штампов на упругом слое, при рассмотрении которых всегда подразумевается также статическая нагрузка, прижимающая штампы к среде и не допускающая их отрыва.

Интегральное уравнение о вибрации трещины в упругом слое в плоской задаче представимо в виде [11—15]:

$$\int_{-a}^{a} m(x-\xi)g(\xi)\,d\xi=p_0(x), \qquad p_0(-x)=p_0(x), \qquad |x|\leqslant a \quad (24)$$

$$m(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma} M(u)e^{-iux}\,du, \qquad g(x)=g^+(x)-g^-(x), \qquad g(a)=0 \quad (25)$$

Здесь комплексная амплитуда $g(x)$ — безразмерного скачка перемещений верхнего $g^+(x)$ и нижнего $g^-(x)$ берегов трещин, $p_0(x)$ — безразмерные, равные на обоих берегах трещины давления, которые будем считать в общем случае неоднородными по длине.

Четная, мероморфная в комплексной плоскости функция $M(u)$ зависит от частоты, упругих характеристик и толщины слоя и имеет при $|u|\to\infty$ поведение [13]:

$$M(u)=A|u|[1+O(u^{-1})] \quad (26)$$

В связи с асимптотикой (26) интеграл (24) выписан формально. Он представляет собой обобщенную функцию, преобразование Фурье которой является растущей. К представлению (24) можно было бы не прибегать, однако, оно принято в связи с тем, что в терминах свойств функций $M(u)$ удобно классифицируются и свойства решений задач.

Функция $M(u)$ для слоя с закрепленной одной или двумя гранями при достаточно малых ω не имеет вещественных нулей и полюсов. С увеличением ω функция $M(u)$ приобретает один положительный вещественный ноль η, появляющийся при $\omega=\omega^*$.

Для частот $0\leqslant\omega\leqslant\omega^*$ в слое не возникают бегущие волны, уносящие энергию на бесконечность при действии на слой силой. Для частот $\omega>\omega^*$ от такой нагрузки в слое возникает бегущая волна перемещений с волновым числом η, однако волны напряжений в этот период не возникают. Они появляются для частот $\omega>\omega_*>\omega^*$. В это время функция $M(u)$ приобретает вещественный полюс. С увеличением частоты добавится вещественный нуль и т. д. В случае свободных границ слоя имеет место соотношение $\omega^*=0$, дальнейшая картина повторяется. В том случае, если колебания слоя вызваны вибрацией берегов трещины, то в диапазоне частот $\omega^*<\omega<\omega_*$ в слое волны напряжений не возбуждаются, энергия не излучается на бесконечность.

В связи с этим по аналогии с рассмотренными выше случаями колебания штампов, колебания слоя с трещиной для частот $\omega<\omega_*$ будем называть низкочастотными, а для $\omega>\omega_*$ — высокочастотными.

7. Осуществив интегрирование, избавляющее уравнение (24) от присутствия обобщенных функций, это уравнение можно представить для $\omega>\omega^*$ в виде

$$Hg\equiv\int_{-a}^{a} n(x-\xi)\,g(\xi)\,d\xi=p(x)+c\cos\eta x\equiv f(x)$$

$$(d^2/dx^2+\eta^2)p=-p_0,\qquad |x|\leqslant a \tag{27}$$

$$n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_\sigma N(u)\,e^{-iux}\,du \tag{28}$$

$$N(u)=M(u)\,(u^2-\eta^2)^{-1} \tag{29}$$

$p(x)$ — частное решение дифференциального уравнения. Положение контуров σ детально описано в [8, 13], они специальным образом обходят особенности функций $N(u)$.

Постоянная c подлежит определению из соотношений (25).

Будем считать, что нормальная компонента давления, действующего на берега трещины в плоском случае, описывается соотношением

$$p_0(x)=B_0+D_0\cos\lambda x,\qquad |x|\leqslant a \tag{30}$$

В результате несложных вычислений находим составляющие правой части уравнения в форме

$$p(x)=B+D\cos\lambda x,\qquad B=-B_0\eta^{-2},\qquad D=D_0(\lambda^2-\eta^2)^{-1} \tag{31}$$

Рассмотрим низкочастотный случай $\omega^*<\omega<\omega_*$. Тогда, используя методы работ [7, 8], решение интегрального уравнения (27), можно представить в виде

$$g(x)=V^{-1}(x)\left[\frac{F(u)}{N(u)}-\frac{X^-(u)}{N^+(u)}e^{-iau}-\frac{X^+(u)}{N^-(u)}e^{iau}\right] \tag{32}$$

$$F(u)=Vf \tag{33}$$

Функции $X^\pm$ определяются из систем интегральных уравнений вида

$$X^\pm(u)\pm\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma\frac{e^{\mp 2ai\alpha}X^\mp(\alpha)}{R^{\pm1}(\alpha)\,(\alpha-u)}\,d\alpha=g_0^\pm(u),$$

$$g_0^\pm(u)=\pm\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma\frac{F(\alpha)\,e^{\mp i\alpha a}}{N^\pm(\alpha)\,(\alpha-u)}\,d\alpha \tag{34}$$

$$N^+(\alpha)N^-(\alpha)=N(\alpha),\quad N^+(-\alpha)=N^-(\alpha),\ R(\alpha)=N^+(\alpha)\,[N^-(\alpha)]^{-1} \tag{35}$$

Отметим также, что, интегральные уравнения (34) однозначно разрешимы и методы их решения изложены в [8], о чем упоминалось в п. 3

Решив их, решение интегрального уравнения (27) можно представить

$$g(x)=Bg_1(x)+Dg_2(x)+cg_3(x) \tag{36}$$

Здесь g_1, g_2, g_3 — решения интегрального уравнения (27) соответственно для правых частей $f(x)$ вида: 1, $\cos\lambda x$, $\cos\eta x$.

Для построения решения исходного интегрального уравнения (24) необходимо в (36) определить постоянную c из условия (25), которое принимает вид

$$Bg_1(a)+Dg_2(a)+cg_3(a)=0 \tag{37}$$

В том случае, если

$$g_3(a)=0 \tag{38}$$

$$Bg_1(a)+Dg_2(a)\neq 0 \tag{39}$$

в слое с трещиной будет иметь место неограниченный резонанс, существование которого будет показано ниже.

В резонансном случае $g_3(x)\not\equiv 0$, но $g_3(a)=0$. Тогда, очевидно, при

$$B=D=0 \tag{40}$$

решение интегрального уравнения (24) будет иметь вид

$$g(x)=cg_3(x) \tag{41}$$

т. е. решение не единственное. Слой в этом случае подобно ограниченному упругому телу свободно колеблется на собственной частоте. При этом в силу (40) имеем

$$p(x)\equiv 0 \tag{42}$$

Это означает, что берега трещины не загружены напряжениями, т. е. поле напряжений в слое является таким, что берега трещин являются узловыми множествами для напряжений.

8. Для нахождения резонансных размеров трещины описанным в п. 3 при рассмотрении задачи о штампе методом строится решение системы интегральных уравнений, которое затем вносится в соотношение (38).

Несложно показать, что при достаточно больших a существуют решения этого уравнения, имеющего вид

$$\cos(a\eta+\theta_0)+\lambda_1(a)=0$$

$$\lambda_1(a)=O(e^{-\varepsilon a}),\quad \varepsilon>0,\quad a\gg 1;\quad \theta_0=\arg N^+(\eta)$$

Здесь $\lambda_1(a)$ — вещественная аналитическая функция параметра $a>0$. Решения этого уравнения представимы в виде

$$a_m=[(m-0{,}5)\pi-\theta_0]\eta^{-1}+r(m),\quad m\gg 1 \tag{43}$$

Здесь $r(z)$ — аналитическая функция параметра z, причем

$$r(z)=O(z^{-1}),\quad z\to\infty \tag{44}$$

В случае круглого штампа радиуса a_m формула (43) имеет вид

$$a_m=[(m-0{,}25)\pi-\theta_0]\eta^{-1}+r(m)$$

Асимптотические при $m\gg 1$ значения резонансных размеров трещины получаются путем отбрасывания функции $r(m)$ в формуле (43).

Таким образом, существует счетное множество размеров трещины a_m, для которых на частоте $\omega^*<\omega<\omega_*$ в слое возникает резонанс трещины, что равносильно обращению в бесконечность коэффициента интенсивности напряжений в ее вершине [12].

Заметим, что низкочастотный резонанс имеет место при любой нагрузке на берега трещины, для которой выполняется условие (39). Низкочастотные резонансы слоя с трещиной известны из теории открытых резонаторов.

9. Высокочастотный резонанс при $\omega>\omega_*$ будет установлен при определенной связи между параметрами B_0, D_0.

Рассмотрим тот случай, когда при $\omega>\omega_*$ функция $N(u)$ имеет по одному положительному вещественному нулю z и полюсу ζ. В этом случае имеет место представление

$$N(u)=(u^2-z^2)(u^2-\zeta^2)^{-1}K_0(u),\quad K_0(u)>0 \qquad (45)$$
$$\operatorname{Im} u=0$$

Осуществим теперь локализацию вибрационного процесса, для этого потребуем выполнения соотношения статичности [9], которое в нашем случае имеет вид

$$V(z)G_0^{-1}f=0 \qquad (46)$$

Здесь G_0^{-1} — обратный оператор к G_0 — последний совпадает с H, из (27), при условии, что в представлении ядра (28) функция $N(u)$ заменена на $K_0(u)$ из (45).

Из этих соотношений находим связь между постоянными B_0, D_0, полагая B_0 заданным.

Выполнение соотношения (46) означает, что при колебании трещины поля напряжений, а с ними и перемещений убывают экспоненциально при удалении на бесконечность и при этом энергия не излучается [9].

Удовлетворяя теперь соотношению (38) приходим к уравнению для определения значений резонансных размеров трещины.

Уравнение для определения резонансных размеров трещин имеет вид

$$\eta\,\mathrm{tg}[az+\theta(z)]-z\,\mathrm{tg}[a\eta+\theta(\eta)]+\lambda_2(a)=0$$
$$\operatorname{Im}\lambda_2(a)=0,\quad \lambda_2(a)=O(a^{-1}),\quad a\gg1 \qquad (47)$$

Здесь $\lambda_2(a)$ — аналитическая функция параметра a, вещественная, обладающая поведением вида $\lambda_2(a)=O(a^{-1})$, $a\to\infty$. Как нетрудно видеть, это уравнение имеет счетное множество положительных решений, допускающих представление

$$a_m=[m\pi+\theta_m]\eta^{-1}+r_1(m),\quad m\gg1$$
$$r_1(m)=O(m^{-1}),\quad |\theta_m|<0{,}5\pi \qquad (48)$$

Здесь θ_m сложным образом зависит от параметров задачи.

Несюжетный анализ показывает, что на выбранной частоте существует минимальный размер трещины, менее которого резонанс невозможен.

Здесь рассмотрен случай высокочастотного резонанса трещины в предположении наличия у функции $M(u)$ двух положительных нулей и одного полюса.

С увеличением частоты их количество растет, оставаясь конечным. Очевидно, для этих частот также существует неограниченный резонанс трещин, который можно создать, локализовав вибрационный процесс в слое, должным образом подобрав нагрузку на берега трещин.

10. Обратимся теперь к представлению решений краевых задач о вибрации слоя под действием произвольных нагрузок, являющихся либо контактными напряжениями под штампами или на границах жестких включений, либо напряжениями на берегах трещин.

Тогда комплексные амплитуды u_n перемещений в слое описываются комбинацией однотипных интегралов следующего вида [8, 16]:

$$S_n(x,y,z)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{\sigma_1}\int_{\sigma_2}\frac{D_n(\alpha,\beta,z)}{\Delta_n(u)}e^{-i(\alpha x+\beta y)}\,d\alpha\,d\beta,\qquad u=(\alpha^2+\beta^2)^{1/2} \qquad (49)$$

Здесь $D_n(\alpha,\beta,z)$ — целая функция параметров α, β, z, $D_n(\alpha,\beta,z)\times\Delta_n^{-1}(u)$ — мероморфная функция параметра u. Если процесс вибрации не локализован, то среди корней функций $\Delta_n(u)$ будут вещественные. В результате несложных вычислений при $R=(x^2+y^2)^{1/2}>D$, где D — диаметр области, содержащей неоднородности (штампы, включения, трещины), имеем [16]:

$$S_n(x,y,z)=\sum_{k=1}^{p}\sum_{s=-\infty}^{\infty}C_{ks}(\varphi,z)H_s^{(1)}(\zeta_kR)+O(R^{-0{,}5}e^{-|\varkappa_{p+1}|R}) \qquad (50)$$

$$\varkappa_{p+1}=\operatorname{Im}\zeta_{p+1}\neq 0, \quad x=R\cos\varphi, \quad y=R\sin\varphi$$

Здесь ζ_k, $k=1, 2, \ldots, p$ — вещественные нули функции $\Delta_n(u)$, ζ_{p+1} — комплексный корень функции $\Delta_n(u)$ с наименьшей мнимой частью. Ряд в соотношении (50) является абсолютно и равномерно сходящимся в области $R\geqslant D+\varepsilon$, $\varepsilon>0$ [16]. Его поведение описывается в этой области осциллирующими функциями, т. е.

$$S_n(x, y, z)=\sum_{k=1}^{p} d_k(\varphi, z)R^{-0,5}e^{i\zeta_k R}+O(R^{-0,5}e^{-|\varkappa_{p+1}|R}), \tag{51}$$

$$\zeta_k>0, \quad k=1, 2, \ldots, p; \qquad R\to\infty$$

Таким образом функции $S_n(x, y, z)$ убывают при больших R степенным образом и таким же образом убывает весь ряд. Функция, представленная этим рядом, является составляющей решения, посредством которой описывается отток энергии в слое от источников на бесконечность [8, 16]. Если процесс колебания локализован, т. е. выполняются соотношения статичности, то энергия в слое не излучается и эти ряды в представлении перемещений отсутствуют. Решение можно представить в виде комбинации интегралов (49), знаменатели которых являются функциями, содержащими только комплексные нули, поскольку вещественные нули сокращаются, т. к. они совпадают с нулями функции D_n.

Но тогда, согласно (50), имеет место оценка

$$S_n{}^*(x, y, z)=O(R^{-0,5}e^{-|\varkappa_{p+1}|R}), \qquad R\gg D \tag{52}$$

Сопоставляя $S_n(x, y, z)$ и $S_n{}^*(x, y, z)$ и учитывая, что D достаточно велико, заключаем, что при выполнении соотношений статичности будет иметь место экспоненциальное убывание перемещений в слое по сравнению со случаем отсутствия статичности. Последнее заведомо обнаруживается уже на расстоянии диаметра области от ее границы, т. е. при $R=1{,}5D$, поскольку согласно формулам (21), (48) значения D, при которых процесс локализуется $D=2a_m$ — растут.

Заметим, что в случае плоской задачи или бесконечных полосовых штампов, включений и трещин, формула (51) принимает вид

$$S_n(x, y, z)=\sum_{k=1}^{p} g_k(y, z)e^{i\zeta_k|x|}+O(e^{-|\varkappa_{p+1}||x|}), \qquad |x|>a=0{,}5D \tag{53}$$

и все дальнейшие заключения, сделанные относительно поведения перемещений в слое, в этом случае остаются в силе. Действительно, при выполнении соотношений статичности сумма справа в (53) будет отсутствовать, что означает экспоненциальное поведение перемещений при $x=1{,}5D$; $D=2a_m$.

11. Обоснование существования высокочастотных резонансов в упругом слое в случае пространственной задачи полностью идентично обоснованию в плоском случае, изложенном выше, однако технически более сложное. Все необходимые соотношения, представления решений интегральных уравнений получены в [8, 9, 16, 19—27]. Отмеченным выше методом изучен ряд пространственных задач о вибрации трещин и штампов, выявлены высокочастотные резонансы систем. Перенос свойств решений на пространственный случай при выполнении их в плоском случае связан с однотипностью интегральных уравнений и продемонстрирован в монографии [8] — плоские и осесимметричные задачи и [7, 9, 16] — пространственные задачи.

При этом важно, чтобы в пространственных задачах по-прежнему плоскости неоднородностей — включений, трещин, а также подошвы штампов были бы параллельны границам слоя.

12. Наличие в линейно-упругой среде внутреннего трения приводит, как установлено в [8], к исчезновению для всех частот и функций (3),

(26) $-K(u)$, $M(u)$ вещественных полюсов, т. е. все полюсы этих функций оказываются комплексными.

Однако это обстоятельство не изменяет сущности явления, а именно: локализация вибрационного процесса в слое — по-прежнему будет реализовываться при тех же соотношениях статичности, выполняемых для комплексных нулей. Изменится само явление, резонанс будет оставаться ограниченным, но пик резонанса при локализации вибрационного процесса можно получать сколь угодно большим.

Последнее следует из возможности усиления локализации вибрационного процесса, установленной в [9, 17, 18]. Сопоставим колебания идеально упругого слоя с неоднородностями и слоя с внутренним трением, когда процессы в них локализованы и когда локализация отсутствует.

Если процесс колебания локализован, то в обоих случаях системы колеблются с ограниченной энергией, т. е. полуограниченные тела колеблются подобно ограниченным [17]. В том случае, когда процесс не локализован, колебание идеально упругого слоя происходит с неограниченной энергией, а слоя с трением — с ограниченной.

В связи с этим условие конечности энергии не может быть критерием локализации вибрационного процесса в полуограниченном теле. Таким критерием является сопоставление амплитуд перемещений в полуограниченном теле на расстоянии диаметра области, содержащей неоднородности. В случае локализации вибрационного процесса амплитуда колебания в экспоненциальное число раз будет меньше на этом множестве, чем в случае отсутствия локализации.

Резюмируя все вышесказанное, можем сформулировать окончательно основной результат исследования в следующем виде:

Теоретически установлено неизвестное ранее явление высокочастотного резонанса линейно-упругих полуограниченных тел типа слоя, пакета слоев, содержащих неоднородности в виде полостей — трещин и массивных включений, плоских, параллельных границам тел, заключающееся в том, что при колебательном воздействии на частоте выше критической, приложенном к границе тела в конечной области D, содержащей все неоднородности, и подчиненном соотношениям статичности, состоящим в обеспечении в экспоненциальное число раз более быстрого убывания амплитуды колебания на расстоянии диаметра области D от ее границы, в сравнении со случаем отсутствия статичности, для масс включений, равных реактивным составляющим импедансов, деленным на частоту или полостей-трещин, соприкасающихся с узловыми или минимального уровня поверхностями полей напряжений, происходит резкое увеличение амплитуд колебания тела, обусловленное локализацией вибрационного процесса в области D, происходящего с конечной энергией.

Разные стороны изложенной теории явления высокочастотного резонанса в полуограниченных телах с неоднородностями изложены в работах авторов [19—27].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ворович Е. И., Пряхина О. Д., Тукодова О. М.* Некоторые динамические смешанные задачи взаимодействия массивных штампов с полуограниченными средами // Смешанные задачи механики деформируемого тела: Тез. докл. на 3-м Всесоюз. конф. Харьков, Изд-во ХГУ. 1985. С. 188.
2. *Ворович Е. И., Пряхина О. Д.* Аналитический метод определения В-резонансов // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 3. С. 101–106.
3. *Ворович Е. И., Пряхина О. Д., Тукодова О. М.* Динамические свойства упругой полуограниченной среды при наличии двух массивных штампов // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 1. С. 109–116.
4. *Ворович Е. И., Пряхина О. Д., Тукодова О. М.* Динамические свойства упругой полуограниченной среды, контактирующей с упругим инерционным элементом // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 2. С. 128–133.
5. *Глушков Е. В., Глушкова Н. В.* Плоская задача о колебании штампа на слое // Изв. Сев.-кавказ. науч. центра высш. шк., 1979. № 1. С. 23–25.
6. *Глушков Е. В.* Вибрация системы массивных штампов на линейно-деформируемом основании // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 1. С. 142–147.
7. *Бабешко В. А.* Некоторые соотношения для решения динамических смешанных задач на всей частотной оси // Докл. АН СССР. 1987. Т. 295. № 2. С. 312–316.

8. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
9. *Бабешко В. А.* Высокочастотный резонанс штампов. Краснодар, 1987. Деп. в ВИНИТИ 18.08.87. № 6021-В87.
10. *Лепендин Л. Ф.* Акустика. М.: Высш. шк., 1978. 448 с.
11. *Ryan R. L., Mall S.* Antiplane vibration of an elastic layer with a midplane crack // Intern. J. Fract., 1983. V. 21. № 1. P. 31–37.
12. *Великотный А. В., Сметанин Б. И.* К задаче об установившихся колебаниях плоскости с разрезом // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 1. С. 189–192.
13. *Бабешко В. А., Ткачев Г. В.* Вибрация круглой трещины при трехкомпонентной нагрузке // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 5. С. 857–866.
14. *Партон В. З., Кудряцев В. А.* Динамическая задача для плоскости с разрезом // Докл. АН СССР. 1969. Т. 185. № 3. С. 541–544.
15. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
16. *Бабешко В. А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 254 с.
17. *Ворович И. И.* Резонансные свойства упругой неоднородной полосы // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. № 5. С. 1076–1079.
18. *Бабешко В. А.* Новый метод в теории пространственных динамических смешанных задач // Докл. АН СССР. 1978. Т. 242. № 1. С. 62–65.
19. *Образцов И. Ф., Ворович И. И., Бабешко В. А.* Явление высокочастотного резонанса в полуограниченных телах с неоднородностями // Динамические задачи механики сплошной среды. Тез. докл. Региональной конф. Краснодар: Кубан. ун-т, 1988. Ч. 2. С. 26.
20. *Obraztsov I. P., Babeshko V. A.* The quality of vibration process localization in semirestricted regions. Аннотации докладов 17 Международного конгресса по теоретической и прикладной механике. Гренобль, 1988.
21. *Бабешко В. А.* Некоторые математические вопросы, возникающие при расчете СВЧ-устройств // Тез. докл. Региональной конф. «Спиноволновые явления электроники СВЧ» Краснодар, 1987.
22. *Babeshko V. A., Obraztsov I. P., Vorovich I. I.* The peculiarity of vibration process localization in semi-restricted regions. Материалы симпозиума по распространению упругих волн и ультразвуковым неразрушающим методам контроля. Боулдер, 1989.
23. *Бабешко В. А.* Эффект упругости слоя несжимаемой жидкости // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. Вып. 17. С. 1625–1627.
24. *Бабешко В. А.* К проблеме исследования динамических свойств трещиноватых тел // Докл. АН СССР. 1989. Т. 304. № 2. С. 318–321.
25. *Бабешко В. А.* Высокочастотный резонанс массивного штампа // Докл. АН СССР. 1989. Т. 306. № 6. С. 1328–1332.
26. *Образцов И. Ф., Бабешко В. А.* О некоторых особенностях колебания полуограниченных областей // Докл. АН СССР. 1989. Т. 305. № 2. С. 306–309.
27. *Бабешко В. А.* К проблеме динамического разрушения трещиноватых слоистых тел // Докл. АН СССР. 1989. Т. 307. № 2. С. 324–328.

Краснодар, Ростов н/Д, Москва

Поступила в редакцию
20.II.1990