

УДК 539.3

© 1990 г.

Н. В. ЗВОЛИНСКИЙ

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О СЛОИСТОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ С ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЕМ

На простых примерах выясняются характерные особенности полей смещений и напряжений в упругой слоистой среде при наличии упругой касательной связи между слоями. Изучается эффект изгиба слоев в зависимости от сдвиговой жесткости слоистой конструкции.

1. Введение. Ниже рассматриваются некоторые частные задачи для упругой среды, сложенной из плоскопараллельных слоев. Предполагается, что все слои тождественны друг другу по физическим свойствам и геометрии (толщине слоев). Характерной особенностью, нарушающей однородность, является возможность проскальзывания по контактам, причем относительное смещение $[\bar{u}]$ берегов слоев связано по предположению с вектором касательного напряжения $\bar{\tau}$ на плоскости контакта зависимостью

$$\bar{\tau} = \frac{1}{2} k / h [\bar{u}] \quad (1)$$

где k — константа размерности напряжения, $2h$ — толщина слоя. В дальнейшем рассматриваются только плоские задачи (плоская деформация); в этом случае знаки векторов в формуле (1) можно опустить.

Приведенные точные решения могут быть полезны для сравнения с теми или другими приближенными подходами, а также как тестовые при апробации численных методов.

Рассматриваемые задачи не усложняются (трехмерность, обобщение закона (1) и др.), хотя некоторые обобщения возможны. В рассмотренных задачах существенную роль играет изгиб слоев. Приближенное описание такой ситуации, основанное на интуитивных предположениях, было дано в [1] и [2]. В [3] было дано более строгое, но менее наглядное описание осреднений сложной среды со скольжением. Осреднение такой же среды в первом приближении, не учитывающее кинематику элементарных вращений, рассматривалось в ряде работ (см. [4–6]); при этом различные (по существу эквивалентные) методы осреднения привели к одинаковому результату.

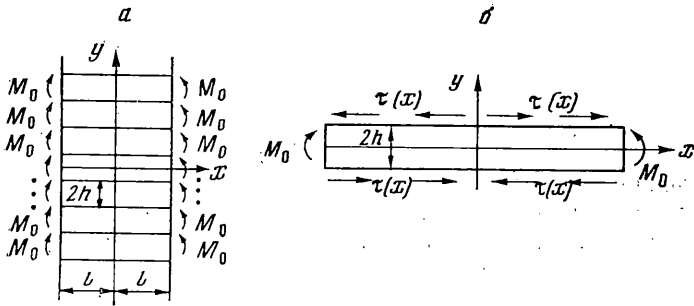
Внешняя нагрузка предполагается такой, которая приводит к одинаковому напряженному состоянию всех слоев и задача, таким образом, сводится к задаче на одном слое.

Оси координат выбираются параллельно и перпендикулярно направлению слоев (фиг. 1, 2), используются общепринятые обозначения компонент напряжений. Напряженное состояние описывается функцией напряжений $F(x, y)$, удовлетворяющей уравнению (при отсутствии внешних массовых сил) $\nabla^2 F(x, y) = 0$. Для компонент напряжения имеем

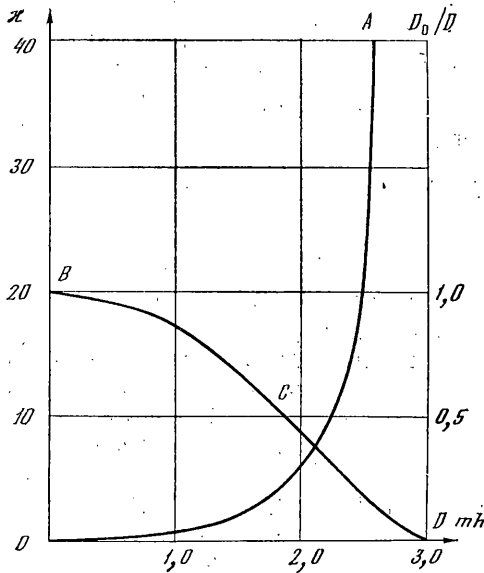
$$\sigma_{xx} = \partial^2 F / \partial y^2, \quad \sigma_{yy} = \partial^2 F / \partial x^2, \quad \tau_{xy} = -\partial^2 F / \partial x \partial y \quad (2)$$

Все дальнейшие примеры основаны на частных решениях следующих двух типов:

$$F(x, y) = \varphi(y) \begin{pmatrix} \sin mx \\ \cos mx \end{pmatrix}, \quad \varphi(y) = \operatorname{sh} my - \operatorname{th} mh \frac{y}{h} \operatorname{ch} my, \quad (3)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$F(x, y) = \psi(y) \begin{pmatrix} \operatorname{sh} mx \\ \operatorname{ch} mx \end{pmatrix}, \quad \psi(y) = \sin my - \operatorname{tg} mh \frac{y}{h} \cos my$$

Заметим, что $\varphi(y)$, $\varphi''(y)$ — нечетные функции, $\varphi'(y)$, $\varphi'''(y)$ — четные, а также $\varphi(\pm h) = 0$ и, следовательно

$$\int_{-h}^h \varphi'(y) dy = 0$$

Здесь mh — произвольное вещественное число. Аналогичные свойства справедливы для функции $\psi(y)$.

Отметим еще, что компоненты смещения могут быть выражены через функцию напряжений и связанные с ней функции; именно так (при плоской деформации):

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{2\mu} \left\{ (1-\nu)S - \frac{\partial F}{\partial x} \right\} + u_0 - \omega y \\ v(x, y) &= \frac{1}{2\mu} \left\{ (1-\nu)T - \frac{\partial F}{\partial y} \right\} + v_0 + \omega x \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона, u_0 , v_0 , ω — параметры жесткого перемещения, μ — модуль сдвига. Функции S и T — действительная и мнимая части функции $\Phi(z) = S + iT$, причем $\Phi'(z) = \varphi(z) = s + it$, где $s(x, y) = \Delta F$.

2. Изгиб слоистой среды распределенными моментами. Рассмотрим слоистую упругую среду (фиг. 1), заполняющую область $(-l < x < l, -\infty <$

$\langle y \rangle < +\infty$), подверженную действию моментов M_0 , приложенных на боковых сторонах. Естественными условиями на линиях контакта будут следующие (прямые скобки означают скачки соответствующих величин; отрыв слоев исключается):

$$[\sigma_{yy}] = 0, \quad [\tau_{xy}] = 0, \quad [v] = 0 \quad (5)$$

Ввиду тождественности состояний слоев достаточно рассмотреть один слой под действием заданных моментов M_0 и заранее неизвестных касательных усилий $\tau(x)$ на продольных сторонах полосы (фиг. 1, а).

Поскольку предполагается, что длина слоя значительно больше его толщины ($l/h \gg 1$), то на поперечных сторонах можно поставить интегральные условия (Сен-Венана). Итак, надо найти функцию $F(x, y)$ — бигармоническую в области ($-l < x < l$, $-h < y < h$), удовлетворяющую при $y = \pm h$, $-l < x < l$ условиям

$$\sigma_{yy}(x, -h) = \sigma_{yy}(x, h), \quad \tau_{xy}(x, -h) = \tau_{xy}(x, h), \quad v(x, -h) = v(x, h) \quad (6)$$

$$\tau_{xy}(x, \pm h) = \frac{1}{2} k/h [u] \quad (7)$$

и интегральным условиям

$$\int_{-h}^h \sigma_{xx}(\pm l, y) dy = 0, \quad \int_{-h}^h \tau_{xy}(\pm l, y) dy = 0, \quad \int_{-h}^h y \sigma_{xx}(\pm l, y) dy = -M_0 \quad (8)$$

Понятно, что так поставленная задача неопределенна и имеет множество решений. Однако эти решения будут отличаться только в области погранслоя, вблизи поперечных сторон $x = \pm l$. Толщина погранслоя зависит от значения k/μ — при больших значениях этой величины погранслоем тонкий, при малых он может простираться на большую глубину, однако при этом роль поверхностных касательных напряжений становится незначительной.

В качестве бигармонической функции, удовлетворяющей всем условиям (6)–(8), возьмем (A — константа):

$$F(x, y) = A\psi(y) \operatorname{ch} mx \quad (9)$$

Через эту функцию компоненты напряжений и смещения выражаются по формулам

$$\sigma_{xx} = A\psi''(y) \operatorname{ch} mx, \quad \sigma_{yy} = Am^2\psi(y) \operatorname{ch} mx, \quad \tau_{xy} = -Am\psi'(y) \operatorname{sh} mx \quad (10)$$

$$u(x, y) = \frac{-A}{2\mu} \left\{ (1-\nu) \left(\frac{\psi''(y)}{m} + m\psi(y) \right) - m\psi(y) \right\} \operatorname{sh} mx + u_0 - \omega y \quad (11)$$

$$v(x, y) = \frac{A}{2\mu} \left\{ (1-\nu) \left(\frac{\psi'''(y)}{m^2} + \psi'(y) \right) + \psi'(y) \right\} \operatorname{ch} mx + v + \omega x$$

Параметр m пока остается произвольным. Чтобы исключить жесткое перемещение, потребуем выполнения условий $u(0, y) = 0$, $v(0, 0) = 0$, откуда, в частности, следует $u_0 = 0$, $\omega = 0$. Остается удовлетворить граничному условию (7) и это потребует выбора значения m . Имеем

$$[u] = u(x, -h) - u(x, +h) = -2u(x, h) = \frac{(1-\nu)}{\mu} \frac{\psi''(h)}{m} \operatorname{sh} mx$$

$$\tau(x) = \tau_{xy}(x, \pm h) = -Am\psi'(h) \operatorname{sh} mx$$

Условие (7) требует, чтобы параметр m удовлетворял трансцендентному уравнению (8)¹.

$$1 - \frac{\sin 2mh}{2mh} = \kappa \frac{\sin^2 mh}{m^2 h^2}, \quad \kappa = \frac{k(1-\nu)}{\mu}, \quad 0 \leq \kappa < +\infty \quad (12)$$

Уравнение (12) имеет счетное множество корней, среди которых имеются комплексные. Последнее свидетельствует о том, что рассмотренная

¹ Корни этого уравнения, включая их асимптотическое поведение, подробно изучены аспирантом ИПМ АН СССР Д. Д. Захаровым (устное сообщение).

краевая задача несамосопряженная. Руководствуясь физическими соображениями, выберем решение, которое определяется наименьшим действительным корнем уравнения (12). Зависимость между параметром mh и коэффициентом κ изображена графически на фиг. 2 (кривая OA). Когда κ изменяется от 0 до ∞ , mh изменяется от 0 до π . Прямая $mh=\pi$ является вертикальной асимптотой. Для малых и больших значений κ нетрудно получить асимптотические выражения $mh=(\pi/2\kappa)^{1/2}+\dots$ при $\kappa\ll 1$, $mh=\pi-\kappa^{-1/2}+\dots$ при $\kappa\gg 1$.

Первая из формул (10) позволяет найти общее значение изгибающего момента

$$M(x) = - \int_{-h}^h y \sigma_{xx}(x, y) dy = -A 2h \psi'(h) \operatorname{ch} mx \quad (13)$$

и, в частности, найти значения константы A :

$$A = - \frac{M_0}{2h \psi'(h) \operatorname{ch} ml} M_0$$

Распределение изгибающего момента по длине слоя можно выразить так: $M(x) = (\operatorname{ch} mx / \operatorname{ch} ml) M_0$. Среднее по высоте слоя значение вращения $\Omega(x)$ определяется формулой

$$\Omega(x) = \frac{1}{4h} \int_{-h}^h \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy$$

После выполнения всех выкладок на основании (11) получается результат

$$\Omega(x, \kappa) = \frac{1}{2} \left(\frac{M_0}{kh^2} \right) \frac{mh}{\operatorname{ch} ml} \operatorname{sh} mx$$

Интересно установить связь между $\Omega(x, \kappa)$ и $M(x)$, аналогичную той, которая имеет место в балке при свободном изгибе. Вводя эффективную жесткость изгиба $D(\kappa)$: $M(x) = D(\kappa) \partial \Omega / \partial x$, получаем

$$D(\kappa) = 2kh/m^2 \quad (14)$$

Жесткость D_0 при свободном изгибе есть

$$D_0 = \frac{8(\lambda + \mu)}{3(\lambda + 2\mu)} \mu h^3$$

На фиг. 2 представлен график отношения D_0/D (кривая BCD): $D_0/D = \pi^2/3 m^2 h^2 / \kappa$.

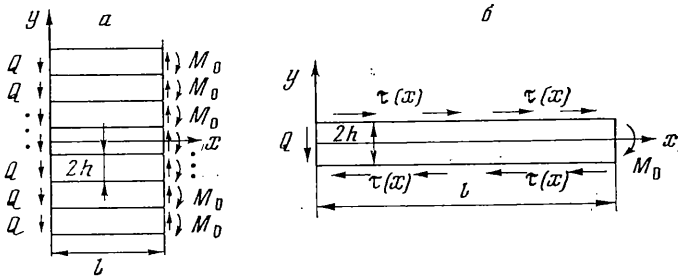
Выпишем еще окончательные выражения компонент σ_{xx} и τ_{xy} :

$$\sigma_{xx}(x, y) = - \left(\frac{M_0}{2h^2} \right) \frac{h \psi''(y) \operatorname{ch} mx}{\psi'(h) \operatorname{ch} ml}, \quad \tau_{xy}(x, y) = \left(\frac{M_0}{2h^2} \right) \frac{mh \operatorname{sh} mx}{\operatorname{ch} ml} \frac{\psi'(y)}{\psi'(h)}$$

в частности

$$\tau(x) = \tau_{xy}(x, \pm h) = \left(\frac{M_0}{2h^2} \right) \frac{mh \operatorname{sh} mx}{\operatorname{ch} ml}$$

3. Поперечный изгиб слоистой среды. Слоистая упругая среда заполняет область $(0 < x < l, -\infty < y < \infty)$ и находится в равновесии под действием касательных усилий Q , приложенных к сторонам $x=0$, $x=l$ и моментов M_0 , распределенных по стороне $x=l$ (фиг. 3). На линиях контакта слоев ставятся те же условия, что и в предыдущей задаче. Требуется определить поле напряжений и смещений в слое. Выделим один слой, извлекая его из системы слоев, и приложим к сторонам его действующие на него силы — частью заданные, частью неизвестные. Задача сводится к отысканию функции $F(x, y)$, бигармонической в области $(0 < x < l, -h < y < h)$, удовлетворяющей при $y = \pm h$, $|x| \leq l$ условиям (7) и (6), а на



Фиг. 3

боковых сторонах интегральным условиям

$$\int_{-h}^h \sigma_{xx} dy = 0, \quad \int_{-h}^h \tau_{xy} dy = Q \quad \text{при } x=0, \quad x=l$$

$$\int_{-h}^h y \sigma_{xx}(0, y) dy = 0, \quad \int_{-h}^h y \sigma_{xx}(l, y) dy = -M_0$$

Решение поставленной задачи можно получить в виде

$$F(x, y) = (ay^3 + by)x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(y) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (15)$$

где коэффициенты $a, b, a_1, a_2, a_n, \dots$ подлежат определению. Будем пользоваться сокращенным обозначением $n\pi/l \equiv m$.

Для компонент напряжения получим

$$\sigma_{xx} = 6axy + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n''(y) \sin mx, \quad \sigma_{yy} = - \sum_{n=1}^{\infty} m^2 a_n \varphi_n(y) \sin mx \quad (16)$$

$$\tau_{xy} = -(3ay^2 + b) - \sum_{n=1}^{\infty} m a_n \varphi_n'(y) \cos mx$$

$$\tau(x) = \tau_{xy}(x, \pm h) = -(3ah^2 + b) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos mx, \quad c_n = -m a_n \varphi_n'(h) \quad (17)$$

Члены, стоящие в (15) вне знака суммы, описывают поперечный изгиб свободного слоя.

Изгибающий момент $M(x)$ в произвольном поперечном сечении выражается так:

$$M(x) = - \int_{-h}^h y \sigma_{xx}(x, y) dy = -4ah^3 x + 2h \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n'(h) \sin mx$$

Все предложенные интегральные граничные условия будут выполнены, если $4ah^3 l = M_0$, $2h(ah^2 + b) = -Q$, откуда

$$ah^2 = +M_0/(4hl), \quad b = -(M_0 + 2Ql)/(4hl)$$

Величины M_0 и Q независимы, их вправе выбирать произвольно. Положим $M_0 = \alpha Ql$, α — произвольное число. Тогда

$$ah^2 = \frac{\alpha Q}{4h}, \quad b = -\frac{(2+\alpha)Q}{4h}, \quad 3ah^2 + b = -\frac{Q(1-\alpha)}{2h} = \frac{1}{l} \int_0^l \tau(x) dx$$

Различный выбор α определяет роль, которая отводится среднему значению касательного напряжения, развивающегося на контактах. В случае $\alpha=0$ это напряжение полностью обеспечивает равновесие каждого слоя. В этом случае $\tau(x)=1/2 Q/h$ (можно показать, что $a_n=0$; $n=1, 2, 3, \dots$). При этом

$$u=yb/k, \quad v=-b(1/\mu+1/k)$$

При $k \rightarrow \infty$ получаем чистый сдвиг бесконечной полосы. Если $\alpha=1$, то, напротив, равновесие обеспечивается реактивным моментом M_0 , а среднее значение $\tau(x)$ равно нулю. В дальнейшем подробно рассматривается именно этот последний случай.

Компоненты перемещения согласно формулам (4):

$$u(x, y) = \frac{1}{2\mu} \sum_{n=1}^{\infty} a_n Z_1(\varphi, \varphi'') \cos mx + u_1(x, y)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{2\mu} \sum_{n=1}^{\infty} a_n Z_2(\varphi', \varphi''') \sin mx + v_1(x, y)$$

$$Z_1(\varphi', \varphi'') = (1-\nu)(m\varphi_n(y) - \varphi_n''(y)/m) - m\varphi_n(y)$$

$$Z_2(\varphi', \varphi''') = (1-\nu)(\varphi_n'''(y)/m^2 - \varphi_n'(y)) - \varphi_n'(y)$$

$$u_1(x, y) = 1/2\mu^{-1} \{ (1-\nu)a(3x^2y - y^3) - (ay^2 + b)y \} + u_0 - \omega y$$

$$v_1(x, y) = 1/2\mu^{-1} \{ (1-\nu)a(3xy^2 - x^3) - (3ay^2 + b)x \} + v_0 + \omega x$$

Функции $u_1(x, y)$ и $v_1(x, y)$ — компоненты перемещения при поперечном изгибе свободной полосы. При произвольных значениях коэффициентов a_n ($n=1, 2, \dots$) (обеспечивающих надлежащую сходимость рядов) функция $F(x, y)$ является бигармонической и дает возможность удовлетворить граничным условиям (6) и интегральным условиям. Граничное условие (7) определяет выбор коэффициентов a_n .

Найдем скачок компоненты $u(x, y)$ на контакте слоев

$$[u] = u(x, -h) - u(x, h) = -2u(x, h) = \frac{1}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\nu)a_n}{m} \varphi_n''(h) \cos mx -$$

$$-\frac{3ah(1-\nu)}{\mu} x^2 + \frac{h}{\mu} [ah^2(1-\nu) + b] + 2h\omega$$

Граничное условие (7) примет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos mx = \frac{k}{2h} \left\{ \frac{1}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\nu)a_n}{m} \varphi_n''(h) \cos mx - \right.$$

$$\left. - \frac{3ah^2(1-\nu)}{\mu h} x^2 + \frac{h}{\mu} [ah^2(1-\nu) + b] + 2h\omega \right\}$$

Угол ω жесткого вращения не влияет на напряженное состояние в случае свободной полосы. Но когда она есть элемент системы полос, взаимодействующих друг с другом, то этот угол оказывается ответственным за напряженное состояние.

Для того чтобы выбором коэффициентов a_n превратить написанное выше равенство в тождество, надо функцию x^2 разложить в ряд Фурье

$$x^2 = \frac{l^2}{3} + \frac{4l^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{l}; \quad 0 \leq x \leq l$$

Сравнивая коэффициенты при косинусах одинаковой кратности, определяем угол ω и a_n :

$$\omega = \frac{Q}{8\mu h} \left[3 + (1-\nu) \left(\frac{l^2}{h^2} - 1 \right) \right]$$

$$a_n = \kappa \frac{3Q}{\pi^2 h} \left(\frac{l}{h} \right)^2 \frac{(-1)^n}{m\varphi_n'(h) + \kappa(\varphi_n''(h)/2mh)} \frac{1}{n^2} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$\varphi_n'(h) = -\frac{m}{\operatorname{ch} mh} \left(\frac{\operatorname{sh} 2mh}{2mh} - 1 \right), \quad \varphi_n''(h) = -2m^2 \frac{\operatorname{sh}^2 mh}{mh \operatorname{ch} mh}$$

Исследуем порядок убывания коэффициентов при $n \rightarrow \infty$. При $mh \gg 1$ будем иметь $\varphi_n'(h) \sim e^{mh}$, $\varphi_n''(h) \sim mhe^{mh}$, поэтому $a_n \sim e^{-mh}/n^3$, $c_n \sim 1/n^2$. Следовательно, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{e} = \tau(x)$$

сходится равномерно на отрезке ($0 \leq x \leq l$), а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(y) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

сходится равномерно во всякой замкнутой области, лежащей целиком внутри прямоугольника ($0 < x < l$, $-h < y < h$). Это последнее утверждение следует из оценки $a_n \varphi_n(y) \sim e^{-m(h-|y|)}/n^3$, которая показывает также, что ряд (15) можно дифференцировать почленно любое число раз, что согласуется со свойством бигармонической функции быть бесконечно дифференцируемой.

Заметим здесь, что симметрия касательных напряжений, разумеется, существует в каждой внутренней точке (не принадлежащей линии контакта) сплошной среды. Однако, если в качестве элемента рассматривать один слой или набор слоев, то в таком «большом» элементе, как показывают приведенные примеры, симметрия касательных напряжений вообще нарушается и за этот счет возникают изгибающие моменты.

Для иллюстрации законов распределения касательных напряжений и изгибающих моментов по длине слоя приводим результаты расчетов. На фиг. 4 представлены графики функции

$$-\frac{\tau(x)}{Q/2h} = 6 \left(\frac{l}{\pi h} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa(-1)^n \cos n\pi x/l}{1 + \kappa \varphi_n} \frac{1}{n^2}$$

а на фиг. 5 — графики функции

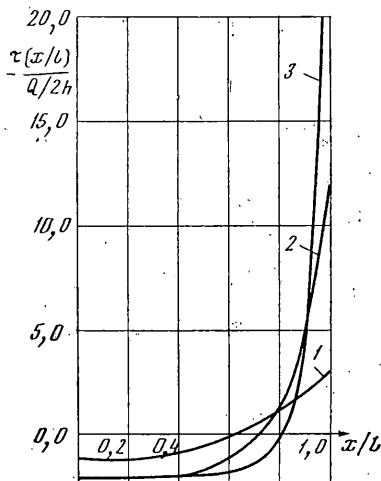
$$\frac{M(x)}{Ql} = -\frac{x}{l} + \frac{6}{\pi} \left(\frac{l}{\pi h} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa(-1)^n \sin n\pi x/l}{1 + \kappa f_n} \frac{1}{n^3}$$

$$f_n = \varphi_n''(h) / (2m^2 h \varphi_n'(h))$$

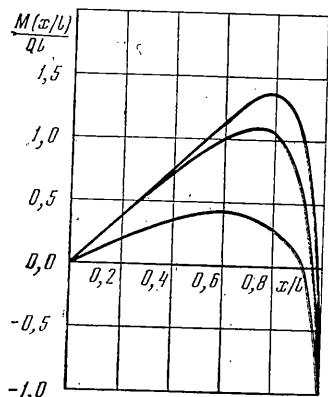
Кривые, отмеченные на этих фигурах цифрами 1, 2, 3, соответствуют значениям параметра $\kappa = 0,1; 1,0; 10$; также принято $\pi h/l = 0,5$.

Можно отметить, что касательное напряжение $\tau(x)$ монотонно и меняет знак; с возрастанием κ наблюдается резкая концентрация напряжения в погранслое вблизи $x=l$. Изгибающий момент также проходит через нуль, изменяя знак вблизи точки $x=l$. При $\kappa > 1$ максимальная (по абсолютному значению) величина изгибающего момента превосходит его значение при $x=l$, равное в этой точке Ql .

4. Приближенное решение той же задачи. Поперечный изгиб слоистой среды, описанный в п. 3, можно просто и наглядно получить приближенно элементарными средствами. Для этого предположим, что связанный изгиб можно приближенно описывать как изгиб чистый; для послед-



Фиг. 4



Фиг. 5

него справедливы соотношения:

$$v=v(x), \quad u=-y\partial v/\partial x, \quad M(x)=D_0\partial^2 v/\partial x^2 \quad (18)$$

Отсюда следует $[u]=2h\partial v/\partial x$, $\tau(x)=k\partial v/\partial x$.

Так как изгибающий момент выражается формулой

$$M(x)=-Qx+2h \int_0^x \tau(\xi) d\xi \quad (19)$$

то использование соотношения (18) и (19) приводят к дифференциальному уравнению

$$\partial^3 v/\partial x^3 - p^2 \partial v/\partial x = -Q/D_0, \quad p^2 = 2hk/D_0 \quad (20)$$

Интегрируя (20) при условиях

$$v''(0)=0, \quad v(l)=0, \quad \int_0^l \tau(x) dx=0$$

получим

$$v(x) = \frac{Ql}{2hk} \left(\frac{x}{l} - \frac{\text{sh } px}{\text{sh } pl} \right), \quad \tau(x) = \frac{Q}{2h} \left(1 - \frac{pl \text{ ch } px}{\text{sh } pl} \right) \quad (21)$$

Изложенный приближенный подход был использован в [1] и [2]. Предположение об отсутствии деформации сдвига при несвободном изгибе недостаточно правдоподобно. Сравнение с точным решением показывает, что хотя качественно ход функции $\tau(x)$ такой же, как в точном решении, но амплитуда ее заметно меньше.

5. Поперечный изгиб безграничной слоистой среды. Рассмотрим безграничную слоистую упругую среду со слоями параллельными оси x' со свойствами, изложенными выше. Пусть в бесконечности внешние нагрузки отсутствуют, а напряженное состояние вызывается непрерывно распределенной вертикальной массовой силой с плотностью, синусоидально зависящей от координаты x и не зависящей от координаты y . Это значит, что уравнения равновесия внутри каждого слоя будут

$$\left. \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = A \sin mx \end{cases} \right\} \begin{cases} -\infty < x < \infty \\ (2n-1)h < y < (2n+1)h \\ n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{cases} \quad (22)$$

Если ввести функцию напряжений $F(x, y)$ по формулам $\sigma_{xx} = \partial^2 F/\partial y^2$, $\sigma_{yy} = \partial^2 F/\partial x^2$, $\tau_{xy} = -\partial^2 F/\partial x \partial y - A \cos(mx)/m$, то $F(x, y)$ должна быть бигар-

монической функцией. Выберем эту функцию в виде $F(x, y) = B\varphi(y)\sin mx$.

Компоненты напряжения выразятся формулами

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= B\varphi''(y)\sin mx, & \sigma_{yy} &= -Bm^2\varphi(y)\sin mx \\ \tau_{xy} &= -Bm\varphi'(y)\cos mx - A\cos(mx)/m\end{aligned}\quad (23)$$

Компоненты перемещения

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \frac{B}{2\mu} \left\{ (1-\nu) \left(m\varphi(y) - \frac{\varphi''(y)}{m} \right) - m\varphi(y) \right\} \cos mx \\ v(x, y) &= \frac{B}{2\mu} \left\{ (1-\nu) \left(\frac{\varphi'''(y)}{m^2} - \varphi'(y) \right) - \varphi'(y) \right\} \sin mx - \frac{A}{\mu} \frac{\sin mx}{m^2}\end{aligned}\quad (24)$$

Стоит отметить, что для сплошной («неразрушенной») упругой среды решение уравнений (22) дает такой результат:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 0, & \sigma_{yy} &= 0, & \tau_{xy} &= -A\cos(mx)/m \\ u &= 0, & v &= -A\sin(mx)/(\mu m^2)\end{aligned}$$

В этом случае напряженное состояние сводится к чистому сдвигу со смещениями, параллельными оси y' . Легко проверить, что выбранная функция $F(x, y)$ порождает поле смещений и напряжений, удовлетворяющее граничным условиям (6) на линиях контакта при любом значении числа mh . Остается удовлетворить условию (7): это условие определяет зависимость между константами A и B . Так как

$$\begin{aligned}[u] &= \frac{(1-\nu)}{\mu} B\varphi''(h) \frac{\cos mx}{m} \\ \tau(x) = \tau_{xy}(x, h) &= -Bm\varphi'(h)\cos mx - A \frac{\cos mx}{m}\end{aligned}$$

то условие (1) требует, чтобы было

$$\left(\frac{Bm^2}{\mu} \right) \frac{1}{\operatorname{ch} mh} \left\{ \kappa \frac{\operatorname{sh}^2 mh}{m^2 h^2} + \frac{\operatorname{sh} 2mh}{2mh} - 1 \right\} = \frac{A}{m\mu} \quad (25)$$

Если mh действительно и больше нуля, то выражение в фигурной скобке положительно; следовательно, соотношение (25) определяет значение B .

Каждое из слагаемых в фигурной скобке имеет определенный физический смысл. Второе слагаемое $\operatorname{sh}(2mh)/(2mh) - 1$ определяет вклад, который проистекает от эффекта поперечного изгиба слоя; первое слагаемое $\kappa \operatorname{sh}^2(mh)/(m^2 h^2)$ зависит от касательного напряжения, развивающегося на контакте. Это утверждение можно обосновать, заметив, что при $\kappa = 0$ (свободный слой) в скобке остается только второе слагаемое. Заметив это, можно сделать вывод о том, при каких условиях можно пренебречь изгибом слоя. Очевидно, что это возможно при условии $\kappa \operatorname{sh}^2(mh)/(m^2 h^2) \gg \operatorname{sh}(2mh)/(2mh) - 1$, так как в противном случае оба слагаемые либо будут одного порядка, либо второе будет доминировать. В частности, при $mh \ll 1$ (длинная волна), полагая $\lambda = \mu$, получим $k/\mu \gg 3/m^2 h^2$. В случае короткой волны ($mh \gg 1$, $\lambda = \mu$): $k/\mu \gg 2/3mh$.

Указанные выше неравенства, определяющие роль изгиба, не являются универсальными в том смысле, что они могут зависеть количественно от характера внешней нагрузки.

Указанные оценки дают лишь некоторую общую ориентировку. В рассмотренной в этом параграфе задаче, как и в двух предыдущих, касательные напряжения оказываются несимметричными, если их относить «макроэлементу», т. е. к отрезку целого слоя или к набору слоев. Отклонение от симметрии тем больше, чем больше роль изгиба. Следовательно, эта асимметрия становится заметной при малых значениях k/μ .

Решение, представленное формулами (23), (24), справедливо при любом значении параметра mh .

Особый интерес представляет случай $mh \ll 1$, т. е. тот, когда характерный размер поля вдоль слоя много больше толщины слоя. Именно при этом условии можно думать о том или другом способе осреднения слоистой среды.

Из точных формул легко получаются следующие разложения, в которых сохранены только старшие члены:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -Bm^2(2mh(y/h) + \dots) \sin mx \\ \sigma_{yy} &= Bm^2 \left[\frac{m^3 h^3}{3} \frac{y}{h} \left(\frac{y^2}{h^2} - 1 \right) + \dots \right] \sin mx \\ \tau_{xy} &= Bm^2 \left[\frac{m^2 h^2}{3} \left(3 \frac{y^2}{h^2} - 1 \right) + \dots \right] \cos mx - \frac{A}{m} \cos mx \\ u(x, y) &= \frac{Bm^2}{\mu} \left[(1-\nu) mh \left(\frac{y}{h} \right) + \dots \right] \frac{\cos mx}{m} \\ v(x, y) &= -\frac{Bm^2}{\mu} \left[(1-\nu) + \dots \right] \frac{\sin mx}{m} - \frac{A}{\mu} \frac{\sin mx}{m^2}\end{aligned}$$

В этом приближении константы A и B связаны зависимостью

$$Bm^2 \{ \kappa + 2/3 m^2 h^2 + \dots \} = A/m$$

Приведенные формулы наглядно показывают порядок основных характеристик поля относительно основного параметра. Из разобранных примеров следует, что в слоистой упругой среде при возможности проскальзывания по контактам возможно появление изгиба слоев. Слабая касательная жесткость связи между слоями благоприятствует этому эффекту. Появление изгиба есть внутреннее свойство слоистой среды, обусловленное тем, что жесткость на сдвиг по плоскостям контакта меньше, чем жесткость на сдвиг в сплошной среде (во внутренних точках слоя). Последний пример показывает, что в слоистой среде изгиб может возникнуть и при таких внешних силах, которые в сплошной среде никаких изгибающих моментов не создают.

Вследствие сложной структуры полей напряжений и деформаций, обнаруженной в приведенных примерах, задача осреднения, описывающая явление во всей его полноте, представляется трудно разрешимой.

Выражаю благодарность И. С. Никитину, с которым неоднократно обсуждались многие непростые вопросы теории слоистой среды и который оказал помощь в выполнении численных расчетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зволинский Н. В., Шхинец К. Н. Континуальная модель слоистой упругой среды: Препринт № 165. М.: ИПМ АН СССР, 1980.
2. Зволинский Н. В., Шхинец К. Н. Континуальная модель слоистой упругой среды // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 5-14.
3. Исупов Л. П. Вариант анизотропной моментной теории упругости для волокнистого композита // Изв. АН СССР. 1980. № 3. С. 62-69.
4. Победра Б. Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 135 с.
5. Никитин И. С. Осредненные уравнения слоистой среды с нелинейными условиями взаимодействия на контактных границах // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 80-86.
6. Мологков Л. А., Хило А. Е. Эффективные модули сложных сред с линейными контактами общего вида // Зап. науч. семинара ЛОМИ. Л., 1986. С. 148-156.

Москва

Поступила в редакцию
22.VI.1989