МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1990

УДК 539.3

В. А. БУРЯЧЕНКО, В. З. ПАРТОН

ЭФФЕКТИВНЫЙ ОПЕРАТОР ГЕЛЬМГОЛЬЦА МАТРИЧНЫХ КОМПОЗИТОВ

Фундаментальной задачей неразрушающих методов контроля структуры композитов является установление связи между параметрами распространения упругих волн и микроструктуры материала [1]. Структурно-механическое исследование материалов начинается с решения задачи об одиночном эллипсоидальном включении в неограниченной матрице. Для включений простой формы в изотропной матрице используется метод Т-матричной аппроксимации [2, 3], связывающий коэффициенты в разложении падающей и рассеянной волн в ряд по шаровым векторам. В изотропном случае методом эквивалентных включений получено обобщение теоремы Эшелби на динамические задачи при умеренных значениях волновых чисел [4]. Аналогичные результаты получены для анизотропной матрицы с помощью разложения фундаментального решения волнового оператора однородной среды в ряд по малой частоте колебаний [5]. При малом отличии в механических свойствах компонентов для оценки эффективных скоростей распространения волн и коэффициентов затухания используется метод возмущений [6]. В случае сильного отличия в свойствах компонентов известно несколько приближенных методов решения бесконечной системы интегральных уравнений относительно неизвестных тензоров смещений и деформаций внутри включения. Широко используется метод эффективной среды [7, 8], основанный на решении задачи для одной эллипсоидальной неоднородности [4] в матрице с эффективными свойствами среды и заданным нагружением на бесконечности. В методах Т-матричной [9] и поляризационной [10] аппроксимации, а также в одночастичном варианте метода эффективного поля [11] рассматривается изолированная неоднородность в матрице с действующим на бесконечности самосогласованным полем, параметры которого не зависят от свойств рассматриваемого включения; использование распространенного в структурной механике квазикристаллического приближения [12, 13] сводит задачу к одночастичной, что приводит к значительным погрешностям в оценке коэффициента при второй степени по концентрации включений c в зависимости эффективных параметров среды от малых значений c.

В данной работе предложена общая схема построения эффективного волнового оператора, основанная на концепции метода эффективного поля [14]. Метод основан на учете многочастичного взаимодействия включений и позволяет, в принципе, обеспечить любую степень точности решения задачи. Бинарное взаимодействие включений [15] для полиномиальной зависимости от координат полей смещений внутри включений. Для получения результатов в аналитической форме использовалось точечное приближение включений [16] в предположении однородности деформаций внутри эллипсоидальных включений.

1. Общие соотношения. Рассматривается макрообласть w с характеристической функцией W, состоящая из однородной матрицы с тензором модулей упругостей C_0, плотностью ρ_0 и статистически большим множеством $X=(v_k,\ x_k,\ \omega_k)$ эллипсоидов v_k с характеристическими функциями V_k, центрами x_k, образующими пуассоновское множество, полуосями a_i^k ($a_k^1 \geqslant a_k^2 \geqslant a_k^3$), совокупностью Эйлеровых углов ω_k, тензором модулей упругости $C_0+C_1(x) \equiv C_0+C_1^{(k)}$, плотностью $\rho_0+\rho_1(x) \equiv \rho_0+\rho_1^{(k)}$ при $x \in v_k$; $C_1(x)$, $\rho_1(x)=0$ при $V(x)=0$, $V(x)=\Sigma V_i(x)$ $(i=1,\ 2 \ldots)$. Пусть $u^0(x)$ — амплитуда смещения падающего гармонического поля с частотой ω, которая существовала бы в однородной среде с параметрами C_0, ρ_0 в отсутствие включений и g_{ik} — тензор Грина для этой среды, удовлетворяющий уравнению [10, 11, 17, 18]:

$$L_{ik} g_{kj}(x) = -\delta(x)\,\delta_{ij}, \quad L_{ik} = \partial_j C_{0ijkl} \partial_l + \rho\omega^2 \delta_{ik}, \quad L_{ik} u_k^\circ = 0 \tag{1.1}$$

Тогда амплитуда вектора смещений $u_i(x)$ удовлетворяет уравнению

$$L_{ik}u_k(x)=u_i^\circ-\partial_j C_{1ijkl}\partial_l u_k(x)-\rho_1\omega^2 u_i \tag{1.2}$$

которое сводится к интегральному с помощью фундаментального решения (1.1) [10, 17]:

$$u_i(x)=u_i^{(0)}(x)+\int g_{ik}(x-y)\,\partial_j C_{1ijkl}\partial_l u_k(y)\,V(y)\,dy+$$
$$+\omega^2\int g_{ik}(x-y)\,\rho_1(y)\,u_k(y)\,V(y)\,dy \tag{1.3}$$

Преобразовывая первый (1.3) интеграл по частям, получим в безиндексной форме

$$u(x)=u^\circ(x)+\int\nabla g(x-y)\,\tau(y)\,dy+\omega^2\int g(x-y)\,\nu(y)\,dy+\oint g(x-y)\,\tau(y)\,dy \tag{1.4}$$

где ∇ — операция симметрированного градиента и введены два типа тензоров поляризации [5]:

$$\tau_{ij}(y)=C_{1ijkl}\partial_k u_l(y)\,V(y),\quad \nu_i(y)=\rho_1(y)\,u_i(y)\,V(y)$$

В (1.4) интегрирование проводится по макрообласти w и ее границе s. Уравнение (1.4) отличается от аналогичных [10, 11, 17] наличием поверхностного интеграла, равного нулю только для конечного числа включений в неограниченной матрице. Центрируя и дифференцируя обе части уравнения (1.4) получим

$$u(x)=U(x)+\int\nabla g(x-y)\,[\tau(y)-\langle\tau\rangle]\,dy+\omega^2\int g(x-y)\,[\nu(y)-\langle\nu\rangle]\,dy$$
$$\varepsilon(x)=E(x)+\int\nabla\nabla g(x-y)\,[\tau(y)-\langle\tau\rangle]\,dy+\omega^2\int\nabla g(x-y)\,[\nu(y)-\langle\nu\rangle]\,dy \tag{1.5}$$

$$U(x)=\langle u(x)\rangle,\ E(x)=\langle\nabla u(x)\rangle,\ \varepsilon(x)=\nabla u(x) \tag{1.6}$$

в (1.5), (1.6) и ниже $\langle\cdot\rangle$, $\langle\cdot|x_1,\dots,x_n;\ x_{n+1},\dots,x_m\rangle$ обозначают среднее по ансамблю статистически однородного, эргодического поля X при условии, что в точках $x_1,\dots,x_m$ находятся включения и $x_1,\dots,x_n\neq x_{n+1},\dots,x_m$; $\langle\cdot\rangle_k$ и $\langle\cdot\rangle_{\omega k}$ — средние по объему эллипсоида v_k и ориентациям ω_k. При выводе (1.5), (1.6) предполагалось, что расстояние $\rho'(x)$ от x в уравнениях (1.5), (1.6) до границы s области w много больше характерного размера включений $a_k^1/\rho'\ll 1$; тем самым последующее решение задачи (1.5), (1.6) имеет нулевой порядок точности относительно малого параметра a_k^1/ρ'.

Введем $\varphi(v_m|v_1,\dots,v_n)$ — условную плотность распределения m-го включения в области v_m при фиксированных включениях $v_1,\dots,v_n$. Усредним (1.5) на множествах $X(\cdot|v_1)$, $X(\cdot|v_1,v_2)$ и так далее при фиксированных множествах v_1; v_1, v_2; ... с помощью различных плотностей распределения $\varphi(v_m|v_1,\dots,v_n)$. Для $x\in v_1,\dots,v_n$ получим

$$\langle u(x)|x_1\rangle-\int\nabla g(x-y)\langle\tau(y)V_1(y)|x_1\rangle dy-\omega^2\int g(x-y)\langle\nu(y)V_1(y)|x_1\rangle dy=$$
$$=U(x)+\int\nabla g(x-y)\,[\langle\tau(y)|y;x_1\rangle-\langle\tau\rangle]\,dy+$$
$$+\omega^2\int g(x-y)\,[\langle\nu(y)|y;x_1\rangle-\langle\nu\rangle]\,dy \tag{1.7}$$

$$\langle u(x)|x_1,\dots,x_n\rangle-\sum_{i=1}^{n}\Big\{\int\nabla g(x-y)\langle\tau(y)V_i(y)|x_1,\dots,x_n\rangle dy-$$
$$-\omega^2\int g(x-y)\langle\nu(y)V_i(y)|x_1,\dots,x_n\rangle dy\Big\}=U(x)+\int\nabla g(x-y)\,[\langle\tau(y)|y;$$
$$x_1,\dots,x_n\rangle-\langle\tau\rangle]\,dy+\omega^2\int g(x-y)\,[\langle\nu(y)|y;x_1,\dots,x_n\rangle-\langle\nu\rangle]\,dy$$

Обозначим правые части уравнений (1.7) через $\check{u}(x)_{1,\dots n}$ $(x\in v_1,\dots,v_n)$, т. е. фиксированные n включений находятся в поле $u^{\vee}(x)_{1,\ldots,n}$, при этом каждое включение v_j из выбранных n находится в поле

$$u^{-}(x)=u^{\vee}(x)_{1,\ldots,n}+\sum_{i\neq j}\int[\nabla g(x-y)\langle\tau(y)V_i(y)\,|\,y;x_1,\ldots,x_n\rangle+$$
$$+\omega^2 g(x-y)\langle\nu(y)V_i(y)\,|\,y;x_1,\ldots,x_n\rangle]dy \qquad (1.8)$$

где $x\in v_j$. Из (1.6) получим аналогичные (1.7), (1.8) уравнения для $\varepsilon^{\vee}(x)_{1,\ldots,n}$, $\varepsilon^{-}(x)$. Тем самым поля амплитуд смещений и деформаций внутри включения v_j зависят от неоднородных, вообще говоря, полей $u^{-}(x)$, $\varepsilon^{-}(x)$; чтобы не учитывать в дальнейшем зависимость последних от x, будем считать, что x совпадает с x_j. При выводе полученных систем уравнений не учитывалась эллипсоидальная форма включений, однородность их механических свойств и структура условных плотностей распределения $\varphi(v_j|v_i,\ldots v_n)$.

2. Эффективное поле. Для замыкания и последующего приближенного решения системы (1.7) примем гипотезы метода эффективного поля [14].

H_1. Каждое эллипсоидальное включение v_j находится в линейном по x поле $u^{-}(x)$ и однородном поле $\varepsilon^{-}(x)$; имеет место точечное приближение формы включений при анализе полей амплитуд смещений и деформаций от включения.

H_2. $n+1$ включение находится в поле $u^{\vee}_{1,\ldots,n+1}$, $\varepsilon^{\vee}_{1,\ldots,n+1}$ и при достаточно большом n имеет место **замыкание**

$$u^{\vee}(x_i)_{1,\ldots,j,\ldots,n+1}=u^{\vee}(x_i)_{1,\ldots,n},\quad \varepsilon^{\vee}(x_i)_{1,\ldots,j,\ldots,n+1}=\varepsilon^{\vee}(x_i)_{1,\ldots,n},$$

где $i=1,\ldots,n+1$ и в правой части равенств некоторый индекс $j\neq i$ опущен.

Гипотеза H_1 позволяет по полям $u^{-}(x)$, $\varepsilon^{-}(x)$ оценить соответствующее поле внутри включения. Действительно, уравнение (1.7) можно переписать в виде

$$\langle u(x)\,|\,x_1\rangle=\bar u(x)+\int\nabla g(x-y)\langle\tau(y)V_1(y)\,|\,x_1\rangle+$$
$$+\omega^2\int g(x-y)\langle\nu(y)V_1(y)\,|\,x_1\rangle dy \qquad (2.1)$$

Аналогичное уравнение имеет место для $\langle\varepsilon(x)|x_1\rangle$. Для получения обозримых результатов воспользуемся первыми членами разложения g по ω и линейной аппроксимацией по x поля $u^{-}(x)$ в окрестности центра тяжести включения [5].

$$u_i^{-}(x)=u_i(0)+\varepsilon_{ij}^{-}(0)x_j,\ (x\in v_1) \qquad (2.2)$$
$$g(x,\,w)=g_0(x)+i\omega g_1+i\omega^3x^2g_3(n) \qquad (2.3)$$

где для произвольной анизотропии среды имеет место следующее разложение в ряд по ω:

$$g(x)=g_0(x)+\frac{1}{|x|}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(i\omega|x|)^k}{(k-1)!}g_k(n),$$

$$g_0(x)=\frac{1}{4\pi|x|}\int_{|\xi|=1}L^{-1}(\xi)\delta(n\xi)ds_\xi,\qquad n=\frac{x}{|x|} \qquad (2.4)$$

$$g_k(x)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{|\xi|=1}L^{-(k+1)/2}(\xi)\,|n\xi|^{k-1}ds_\xi,\qquad L_{ik}=-L_{0ijkl}\xi_j\xi_l$$

где ξ — вектор на единичной сфере s_ξ. Тогда при отбрасывании членов порядка ω^2 в вещественных частях и порядка ω^5 — в мнимых получим линейную зависимость для поля $u_i(x)$ внутри эллипсоида

$$\langle u_i(x)\,|\,x_1\rangle=\lambda_{ik}u_i^{-}(0)+\Lambda_{ijkl}(\omega,a)H_j(x)\varepsilon_{kl}^{-}(0),$$
$$\langle\varepsilon_{ij}(x)\,|\,x_1\rangle=\Lambda_{ijkl}(\omega,a)\varepsilon_{kl}^{-}(0) \qquad (2.5)$$

$$\Lambda'_{ijkl}(\omega,a)=\Lambda_{ijkl}(\omega,a)-\lambda_{ik}(\omega,a)\delta_{il},\qquad \lambda_{ik}=\delta_{ik}+i\omega^3\rho_1\bar{v}g_{ik}{}^1$$
$$\Lambda=A(a)\left(I-i\omega^3\bar{v}HL_1A(a)\right),\qquad A(a)=(I+P(a)L_1)^{-1},$$
$$P_{ijkl}(a)=\int\nabla\nabla g^\circ(x-y)V_1(y)\,dy$$
$$H_{ijkl}(a)=\frac{1}{4\pi}\int_{S_\xi}\xi_{(j}L_{i)(k}^{-5/2}(\xi)\xi_{l)}\,ds_\xi,\qquad \bar{v}=\operatorname{mes}v,\qquad I_{ijkl}=\delta_{i(k}\delta_{l)j}$$

где $H_j(x)=x_j$ в системе координат с началом в центре тяжести включения. Из (2.5) при $x\in v_1$ и $x_1=0$ получим асимптотическое представление для

$$u_i(x)=u_i^-(x)+G_{im}(x)\rho_1(x)\omega^2\lambda_{mk}\bar{u}_k(o)+G_{im,k}L_{1mkpq}\Lambda_{pqln}\bar{u}_{l,n}(o)\qquad(2.6)$$

в общем случае анизотропии матрицы приближенно можно считать $G_{im}\equiv\equiv g_{im}$. Для изотропной матрицы получено более точное представление [16]:

$$G_{im}=g_{im}{}^TI^T+g_{im}{}^LI^L\qquad(2.7)$$
$$g_{im}{}^T=\frac{1}{4\pi\rho_0\omega^2}\left(k_T\frac{\exp(ik_T|x|)}{|x|}\delta_{im}+\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_m}\frac{\exp(ik_T|x|)}{|x|}\right)$$
$$g_{im}{}^L(x)=\frac{1}{4\pi\rho_0\omega^2}\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_m}\frac{\exp(ik_L|x|)}{|x|},\qquad I^\alpha=\int e^{ik_\alpha\xi}\,dv_\xi\qquad(\alpha=L,T)$$

Как показано в [4] приближение (2.6), (2.7) дает погрешность при оценке $u_i(x)$, $x\in v_1$ не более 5% для $ka^1\leqslant 2$.

Если шаровое включение и матрица изотропны, то для изотропных тензоров g^1, P, H и I^α имеет место представление

$$g_{ik}{}^1=(2+\eta^2)/12\pi\rho_0k_T{}^3\delta_{ik},\qquad P_{ijkl}\equiv(3p^1,3p^2)\equiv 3p^1N_1+3p^2N_2$$
$$C_0=(3k_0,2\mu_0),\qquad H=(3H_1,2H_2),\qquad \overset{1}{N}_{ijkl}=\delta_{ij}\delta_{kl}/3$$
$$\overset{2}{N}_{ijkl}=I_{ijkl}-\overset{1}{N}_{ijkl},\qquad 3p^1=(3-4\eta^2)/(3k_0),\qquad 2p^2=(3+8\eta^2)/(15\mu_0)$$
$$3H_1=\eta^5(36\pi\rho_0v_T{}^5)^{-1},\quad 2H_2=(3+2\eta^2)(60\pi\rho_0v_T{}^5)^{-1}$$
$$\eta=c_T/c_L,\quad c_T=(\mu_0/\rho_0)^{1/2},\quad c_L=[(k_0+4\mu_0/3)/\rho_0]^{1/2},\quad k_\alpha=\omega/c_\alpha$$
$$I^\alpha=[3v^-/(k_\alpha a)^2][-(k_\alpha a)\cos(k_\alpha a)+\sin(k_\alpha a)]$$

где k_α, c_α $(\alpha=L,T)$ волновые числа и скорости распространения поперечных и продольных волн в матрице с параметрами k_0, μ_0, ρ_0.

3. Конечное число включений в поле $\check{u}$ $(x)_{1,\ldots,n}$. В рассматриваемом случае уравнение (1.7) записывается в виде

$$\langle u(x)\,|\,x_1,\ldots,x_n\rangle=\check{u}(x)_{1,\ldots,n}+\int\nabla g(x-y)\langle\tau(y)V^n(y)\,|\,x_1,\ldots,x_n\rangle dy+$$
$$+\omega^2\int g(x-y)\langle\nu(y)V^n(y)\,|\,x_1,\ldots,x_n\rangle dy,\qquad V^n=\sum_{i=1}^{n}V_i(y)\qquad(3.1)$$

В работе [14] показано, что в задаче статики, аналогичной (3.1), достаточную точность обеспечивает точечное приближение включений, имеющее, согласно (2.6), (3.1) и полученному решению для одного включения (2.5), представление

$$u^-(x_i)_{1,\ldots,n}-\sum_{j\neq i}\{\nabla G(x_i-x_j)R^{(j)}\varepsilon^-(x_j)_{1,\ldots,n}-\omega^2G(x_i-x_j)T^{(j)}u^-(x_j)_{1,\ldots,n}\}=$$
$$=\check{u}(x_i)_{1,\ldots,n}\qquad(3.2)$$
$$\varepsilon^-(x_i)_{1,\ldots,n}-\sum_{j\neq i}\{\nabla\nabla G(x_i-x_j)R^{(j)}\varepsilon^-(x_j)_{1,\ldots,n}-$$
$$-\omega^2\nabla G(x_i-x_j)T^{(j)}u^-(x_j)_{1,\ldots,n}\}=\check{\varepsilon}(x_i)_{1,\ldots,n}$$

Система (3.2) является системой линейных алгебраических уравнений относительно $u^-(x_i)_{1,\dots n}$, $\varepsilon^-(x_i)_{1,\dots n}$ и может быть решена известными методами линейной алгебры. Для этого будем считать, что тензоры (3.2) записаны в эквивалентной матричной форме и сформируем матрицу Z_{mk}^{-1} $(m, k=1, \dots, n)$ с элементами Z_{mk}^{-1} в виде подматриц (12×12):

$$Z_{mk}^{-1}=\begin{Vmatrix} I\delta_{mk}-(1-\delta_{mk})\,\omega^2G(x_k-x_m)\,T^{(k)} & -(1-\delta_{mk})\nabla G(x_k-x_m)\,R^{(k)} \\ -(1-\delta_{mk})\,\omega^2\nabla G(x_k-x_m)\,T^{(k)} & I\delta_{mk}-(1-\delta_{mk})\nabla\nabla G(x_k-x_m)\,R^{(k)} \end{Vmatrix}$$

тогда решение (3.2) можно представить в следующей форме

$$\begin{Vmatrix} u^-(x_i)_{1,\dots n} \\ \varepsilon^-(x_i)_{1,\dots n}\end{Vmatrix}=\sum_{j=1}^{n}Z_{ij}\begin{Vmatrix} u^\vee(x_j)_{1,\dots n} \\ \varepsilon^\vee(x_j)_{1,\dots n}\end{Vmatrix},\quad Z_{ij}=\begin{Vmatrix} Z_{ij}^{11} & Z_{ij}^{12} \\ Z_{ij}^{21} & Z_{ij}^{22}\end{Vmatrix} \tag{3.3}$$

Решение (3.2) может быть также построено методом последовательных приближений [14], например при $k=2$ с учетом первых членов ряда

$$\begin{aligned} u^-(x_i)_{ij}&=u^\vee(x_i)_{ij}+\omega^2G(x_i-x_j)\,T^{(j)}u^\vee(x_j)_{ij}+\nabla G(x_i-x_j)\,R^{(j)}\varepsilon^\vee(x_j)_{ij} \\ \varepsilon^-(x_i)_{ij}&=\varepsilon^\vee(x_i)_{ij}+\omega^2\nabla G(x_i-x_j)\,T^{(j)}u^\vee(x_j)_{ij}+\nabla\nabla G(x_i-x_j)\,R^{(j)}\varepsilon^\vee(x_j)_{ij}\end{aligned} \tag{3.4}$$

т. е. в (3.4) принято приближение Z_{ij} в виде

$$Z_{ij}=\begin{Vmatrix} I\delta_{ij}+(1-\delta_{ij})\,\omega^2G(x_j-x_i)\,T^{(j)} & (1-\delta_{ij})\nabla G(x_j-x_i)\,R^{(j)} \\ (1-\delta_{ij})\,\omega^2\nabla G(x_j-x_i)\,T^{(j)} & I\delta_{ij}+(1-\delta_{ij})\nabla\nabla G(x_j-x_i)\,R^{(j)}\end{Vmatrix} \tag{3.5}$$

Заметим, что широко используемое квазикристаллическое приближение [9—13], равносильно допущению

$$Z_{ij}=\begin{Vmatrix} I\delta_{ij} & 0 \\ 0 & I\delta_{ij}\end{Vmatrix} \tag{3.6}$$

т. е. эффективные поля амплитуд смещений и деформаций $u^-(x_j)_{ij}$, $\varepsilon^-(x_j)_{ij}$ не влияют на аналогичные параметры в окрестности включения v_i, использование этого допущения при расчете эффективного волнового оператора среды в зависимости от $c=\langle V\rangle$ приводит к значительной погрешности в оценке коэффициента при c^2 в случае $c\to0$.

4. Построение эффективного волнового оператора. Найденные решения для одного (2.5) и конечного числа включений (3.3), (3.5), находящихся в эффективных полях u^-, ε^- и $\bar{u}_{1,\dots,n}$, $\bar{\varepsilon}_{1,\dots,n}$, а также использование гипотезы H_2 позволяет получить из (1.7), (1.8) замкнутую систему линейных интегральных уравнений относительно $u^\vee(x_i)_{1,\dots j}$, $\varepsilon^\vee(x_i)_{1,\dots j}$ $(j=1,\dots n,\ i=1,\dots j)$:

$$\begin{aligned} u^\vee(x_{i1,\dots,j})&=U(x_i)+\int\nabla g(x_i-x_q)\Big\{R^{(q)}\sum_{l=1}^{j+1}[Z_{ql}{}^{21}u^\vee(x_l)_{1,\dots,j+1}+ \\ &+Z_{ql}{}^{22}\varepsilon^\vee(x_l)_{1,\dots,j+1})\,\varphi(v_q|v_1,\dots,v_j)-\langle\tau\rangle\Big\}dx_q+ \\ &+\omega^2\int g(x_i-x_q)\Big\{T^{(q)}\sum_{l=1}^{j+1}[Z_{ql}{}^{11}u^\vee(x_l)_{1,\dots,j+1}+Z_{ql}{}^{12}\varepsilon^\vee(x_l)_{1,\dots,j+1}]\times \\ &\times\varphi(v_q|v_1,\dots,v_j)+R'^{(q)}\sum_{l=1}^{j+1}[Z_{ql}{}^{11}u^\vee(x_l)_{1,\dots,j+1}+Z_{ql}{}^{12}\varepsilon^\vee(x_l)_{1,\dots,j+1}]\times \\ &\times\theta(v_q|v_1,\dots,v_j)-\langle\nu\rangle\Big\}dx_q\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$u^\vee(x_i)_{1,\dots,n}=U(x_i)+\int\nabla g(x_i-x_q)\Big\{\sum_{l=1}^{n}[Z_{ql}{}^{21}u^\vee(x_l)_{1,\dots,n}+Z_{ql}{}^{22}\varepsilon^\vee(x_l)_{1,\dots,n}]\times$$

$$\times\varphi(v_q|v_1,\ldots,v_n)-\langle\tau\rangle\Big\}dx_q+\omega^2\int g(x_i-x_q)\Big\{T^{(q)}\sum_{l=1}^{n}[Z_{ql}{}^{11}u^{\vee}(x_l)_{1,\ldots,n}+$$

$$+Z_{ql}{}^{12}\varepsilon^{\vee}(x_l)_{1,\ldots,n}]\varphi(v_q|v_1,\ldots,v_n)+R'^{(q)}\sum_{l=1}^{n}[Z_{ql}{}^{11}u^{\vee}(x_l)_{1,\ldots,n}+$$

$$+Z_{ql}{}^{12}\varepsilon^{\vee}(x_l)_{1,\ldots,n}]\theta(v_q|v_1,\ldots,v_n)-\langle\nu\rangle\Big\}dx_q$$

$$\theta(v_q|v_1,\ldots,v_n)\equiv\langle V_q(y)H(y)\,|\,y;x_1,\ldots,x_j\rangle,\qquad R'^{(q)}_{ijkl}=C^{(q)}_{1ijpq}\,(\Lambda^{(q)}_{pqkl}-\lambda_{pq}\delta_{kl})$$

Поскольку операции усреднения и дифференцирования не перестановочны при вычислении полей $\varepsilon^{\vee}(x_i)_{1,\ldots,n}$, то необходимо составить уравнения для $\varepsilon^{\vee}(x_i)_{1,\ldots,n}$, которые получаются из уравнений для амплитуд деформаций, аналогичных (1.7), (1.8), с использованием схемы вывода системы уравнений (4.1).

В правой части последнего уравнения (4.1) тензоры $u^{\vee}(x_l)_{1,\ldots,n}$, $\varepsilon^{\vee}(x_l)_{1,\ldots,n}$ образованы согласно гипотезе H_2 из соответствующих тензоров левой части $u^{\vee}(x)_{1,\ldots,n}$, $\varepsilon^{\vee}(x)_{1,\ldots,n}$ заменой одного из индексов на q. Значения $\langle\tau\rangle$, $\langle\nu\rangle$ определяем с помощью $\varepsilon^{\vee}(x_i)_{1,\ldots,j}$, $u^{\vee}(x_i)_{1,\ldots,j}$ при $|x_k-x_i|\to\infty$, $k=1,\ldots,k\neq i$. Тензоры $u^{\vee}(x_i)_{1,\ldots,n}$, $\varepsilon^{\vee}(x_i)_{1,\ldots,n}$ оцениваем из последней строки (4.1) при всех возможных положениях включений $v_1,\ldots v_n$ методом последовательных приближений; затем подставляем найденные тензоры в правую часть строки системы (4.1), строим $u^{\vee}(x_i)_{1,\ldots,n-1}$, $\varepsilon^{\vee}(x_i)_{1,\ldots,n-1}$ и так далее. При этом надо учесть, что каждая j строка системы (4.1) содержит j уравнений, поскольку индекс i пробегает значения $1,\ \ldots,\ j$. Полученные в результате соотношения $u^{\vee}(x_i)$, $\varepsilon^{\vee}(x_i)\sim U$, E позволяют построить эффективный волновой оператор; при этом точность оценки зависимости последнего от концентрации включений c не ниже полинома степени n по c.

Для получения результата в аналитической форме ограничимся случаем $n=2$ и решением задачи бинарного взаимодействия включений в форме (3.4). Примем также, что

$$u^{\vee}(x_i)_{12}=u^{-}(x_i)=\mathrm{const},\quad \varepsilon^{\vee}(x_i)_{12}=\varepsilon^{-}(x_i)=\mathrm{const}\quad (i=1,2)\tag{4.2}$$

Для упрощения операции усреднения в (4.1) будем рассматривать включения одного размера и из одного материала; вместо тензоров $R^{(q)}$, $T^{(q)}$ используем их усреднения по возможным ориентациям включений $R^{(q)}_{\omega}\equiv\langle R^{(q)}\rangle_{\omega}$, $T^{(q)}_{\omega}\equiv\langle T^{(q)}\rangle_{\omega}$. Для однородного случайного поля включений функции $\varphi(v_q|v_1)$, $\theta(v_q|v_1)$ зависят только от $|x_q-x_1|$: $\varphi(v_q|v_1)=$ $=\varphi(|x_1-x_q|)$, $\theta(v_q|v_1)\equiv\theta(|x_1-x_q|)$; из условия непересечения включений $\varphi(v_q-v_1)=0$ при x_q лежащем в некоторой шаровой корреляционной яме v_{q1}' с центром в x_1, с радиусом l и $\varphi(v_q|v_1)\to n_q$ при $|x_q-x_1|\to\infty$, n_q — счетная концентрация включений компонента q, связанная с его объемной концентрацией $c_q=\langle V_q\rangle$ соотношением $c_q=v_q{}^{-}n_q$. Широко используется простейшая аппроксимация [14]:

$$\begin{aligned}&\varphi(v_q|v_1)=0\qquad (|x_q-x_1|\leqslant a_1{}^1+a_q{}^3)\\&\varphi(v_q|v_1)=n_q\qquad (|x_q-x_1|>a_1{}^1+a_q{}^3)\end{aligned}\tag{4.3}$$

Тогда уравнения (4.1) с принятой точностью относительно ω сводятся к

$$u^{-}(x_i)=U(x_i)-\int\nabla g(x_i-x_q)R^{(q)}_{\omega}\,\psi(x_i-x_q)\,\varepsilon^{-}(x_q)\,dx_q-\tag{4.4}$$

$$-\omega^2\int g(x_i-x_q)\Big[\,T^{(q)}_{\omega}\psi(x_i-x_q)\,u^{-}(x_q)-R'^{(q)}_{\omega}\,\theta(x_i-x_q)\,dx_q+$$

$$+\int\nabla g(x_i-x_q)R^{(q)}_{\omega}\,\nabla\nabla g(x_q-x_i)\,R^{(i)}_{\omega}\,\varphi(x_i-x_q)\,\varepsilon^{-}(x_q)\,dx_q+$$

$$+\omega^2\int\nabla g(x_i-x_q)R^{(q)}_{\omega}\,g(x_i-x_q)\,T^{(i)}_{\omega}\,u^{-}(x_q)\Big]\,dx_q,\qquad \psi(x_i-x_q)=n-\varphi(x_i-x_q)$$

Для оценки u^-, ε перейдем в (4.4) к преобразованию Фурье; Фурье-образы обозначаются теми же буквами, но с заменой аргумента x на k.

$$u^-(k)=U(k)+T(k)\varepsilon^-(k)+t(k)u^-(k) \tag{4.5}$$

$$T(k)=-\int\nabla g(x)R_\omega\psi(x)\exp(-ikx)\,dx-\omega^2\int g(x)R_\omega'\theta(x)\exp(-ikx)\,dx+$$
$$+\int\nabla g(x)R_\omega\nabla\nabla g(x)R_\omega\varphi(x)\exp(-ikx)\,dx,$$
$$t(k)=\omega^2\int g(x)T_\omega\psi(x)\exp(-ikx)\,dx$$

Аналогичное уравнение имеет место и для $\varepsilon^-(k)$:

$$\varepsilon^-(k)=E(k)+\Pi(k)\varepsilon^-(k) \tag{4.6}$$

$$\Pi(k)=\int\nabla\nabla g(x)R_\omega\nabla\nabla g(x)R_\omega\varphi(x)\exp(-ikx)\,dx-$$
$$-\int\nabla\nabla g(x)R_\omega\psi(x)\exp(-ikx)\,dx$$

Для упрощения выкладок примем длинноволновое приближение $kl\ll1$, что позволяет представить $\exp(-ikx)$ в области $|x|<l$ в виде ряда $\exp(-ikx)\approx1-ik_ix_i-{}^1/_2k_ik_jx_ix_j$. Тогда при заданной точности относительно ω из (4.5), (4.6) получим

$$\varepsilon(k)=D(k)E(k),\qquad u(k)=dU(k),\qquad d_{ij}=\delta_{ij}-i\omega^3c\rho_1g_{ij}{}^1J \tag{4.7}$$
$$D=D_0\{I+n[-k^2\Gamma(l)R_\omega{}^\circ+i\omega^3(HJR_\omega{}^\circ+\Gamma_0\Lambda_1-S^R-S^\rho)]D_0\}$$
$$D_0=\left(I+\Gamma_0R_\omega{}^\circ n-\int\nabla\nabla g^\circ(x)R_\omega{}^\circ\nabla\nabla g^\circ(x)R_\omega{}^\circ\varphi(x)\,dx\right)^{-1}$$
$$\Gamma(l)=(\overset{\circ}{\Gamma}_{ijkl})=l_ml_n\int\overset{\circ}{g}_{i)(k,l)(j}(x)\psi(x)x_mx_n\,dx$$
$$S^\rho=\rho_1\int\nabla\nabla g^\circ(x)[\Lambda_1\nabla\nabla g^\circ(x)R_\omega{}^\circ+R_\omega{}^\circ\nabla\nabla g^\circ(x)\Lambda_1]\varphi(x)\,dx$$
$$S^R=\int\{\nabla\nabla x^2g^3(x)R_\omega{}^\circ\nabla\nabla g^\circ(x)R_\omega{}^\circ+\nabla\nabla g^\circ(x)R_\omega{}^\circ\nabla\nabla x^2g^3(x)R_\omega{}^\circ\}\varphi(x)\,dx$$
$$J=\int\psi(x)\,dx,\qquad\Lambda_1=R_\omega{}^\circ HR_\omega{}^\circ/v^-,\qquad\Gamma_0=\int\nabla\nabla g^\circ(x)\psi(x)\,dx$$
$$l_i=k_i/k,\qquad R_\omega{}^\circ=\langle L_1Av^-\rangle_\omega$$

Найденные соотношения для $\varepsilon^-(k)$, $u^-(k)$ (4.7) подставим в k-представление уравнения (1.3); сворачивая последнее с тензором $L(k)$ (1.1) получим выражение для эффективного волнового оператора в k пространстве

$$L^*(k,\omega)U(k)=0,\qquad L_{ij}{}^*(k,\omega)=-k_m\overset{*}{C}_{imjl}(k,\omega)k_l+\rho_{ij}{}^*\omega^2 \tag{4.8}$$
$$C^*(k,\omega)=C_S-k^2R_\omega{}^\circ D_0\Gamma(l)R_\omega{}^\circ D_0n/v^--i\omega^3cfC_D,\qquad C_S=C_0+nR_\omega{}^\circ D_0$$
$$C_D=R_\omega{}^\circ HR_\omega{}^\circ D_0/v^--JR_\omega{}^\circ HR_\omega{}^\circ/v^--R_\omega{}^\circ\Gamma_0R_\omega{}^\circ D_0HR_\omega{}^\circ D_0/v^-+R_\omega{}^\circ D_0S^\rho D_0+$$
$$+D_0S^RD_0,\qquad\rho^*=\rho_S+i\omega^3\rho_D,\qquad\rho_S=\rho_0+c\rho_1,\qquad\rho_D=c\rho_1{}^2fg^1,\qquad f=v^--cJ$$

Выражение для C^*, ρ^* зависят от k, ω и, значит, композитная среда обладает временной и пространственной дисперсией. Для задач статики ($\omega=0$) оператор упругих модулей совпадает с аналогичным оператором моментной теории упругости со стесненным вращением [19]. Уравнение (4.8) отличается от приведенных в [11] наличием членов, описывающих бинарное взаимодействие включений и имеющих первый порядок малости по c. Выражение для C_S совпадает с полученным ранее [14] в предположении однородности внешнего поля, там же проведено сравнение с экспериментом и расчетами по другим методам.

В приближенном варианте метода эффективного поля [11] показано, что продольная и поперечная составляющие динамического тензора Грина описывают два типа волн, расходящихся от точечного источника. Волны первого типа имеют коэффициенты затухания пропорциональные $(\omega l)^4$, волны второго типа затухают значительно быстрее — на расстояниях порядка l и вызваны нелокальными эффектами. Поэтому в дальнейшем будем пренебрегать нелокальными эффектами и примем, что член $k^2R_\omega^\circ D_0\Gamma(l)R_\omega^\circ D_0/v^-$ в (4.8) равен нулю.

5. Среда с изотропной матрицей и равновероятной ориентацией включений. При равновероятной ориентации эллипсоидальных включений тензоры R_ω, D_0, T_ω оказываются изотропными. Тогда с помощью операторов проектирования $\pi_{ij}(k)=l_il_j$, $v_{ij}(k)=\delta_{ij}-l_il_j$ эффективный волновой оператор L^* выражается через скалярные операторы $L_L^*(k,\omega)$, $L_T^*(k,\omega)$, определяющие закон распространения продольных и поперечных волн

$$L_{ij}^*(k,\omega)=L_L^*(k,\omega)\pi_{ij}(k)+L_T^*(k,\omega)v_{ij}(k) \tag{5.1}$$

$$L_L^*=-k^2\varkappa^*+\rho^*\omega^2,\quad L_T^*=-k^2\mu^*+\rho^*\omega^2,\quad \omega^*=k^*+4\mu^*/3$$

$$C^*=(3k^*,2\mu^*),\quad C_S=(3k_S,2\mu_S),\quad C_D=(3k_D,2\mu_D),\quad D_0=(3d_1^\circ,2d_2^\circ)$$

$$3k_S=3k_0+3k^-3d_1^\circ c,\quad 2\mu_S=2\mu_0+2\mu^-2d_2^\circ c,\quad R_\omega^\circ=(3k^-,2\mu^-)4\pi/3$$

$$3d_1^\circ=(1+3p_0^13k^--3J_1c)^{-1},\quad 2d_2^\circ=(1+2p_0^22\mu^--2J_2c)^{-1}$$

$$3J_1=2\beta^23k^-2\mu^-\int\varphi(r)|r|^{-4}dr$$

$$2J_2=(2\beta^23k^-2\mu^-+(2\mu^-)^2(7\gamma^2-\eta_0^2/4+\eta_0(\eta_0+\gamma))]\int\varphi(r)|r|^{-4}dr$$

$$\beta=(3k_0+4\mu_0)^{-1},\quad \eta_0=(3\mu_0)^{-1},\quad \gamma=-(3k_0+\mu_0)[3\mu_0(3k_0+4\mu_0)]^{-1},$$

$$\Gamma_0=(3p_0^1,2p_0^2)$$

В случае равных шаровых включений из одного материала выражения для $3k_S$, $2\mu_S$ совпадают с полученными ранее [14] и отличаются от [11] наличием членов $3J_1$, $2J_2$; последние приводят к уточнению оценок C_S в два раза для случая жестких включений в несжимаемой матрице при $c=0{,}4$. Мнимая часть волнового оператора выражается с помощью компонент изотропного тензора

$$3k_D=(3k^-)^23H_\omega^13d_1^\circ/c-cJ(3k^-)^23H_\omega^1(3d_1^\circ)^2+3J_1^Dc3k^-\rho_1(3d_1^\circ)^2+$$
$$+3S_1^R+c3p_0^13H_\omega^1(3d_1^\circ)^22\mu_D=(2\mu^-)^22H_\omega^22d_2^\circ/c-cJ(2\mu^-)^22H_\omega^2(2d_2^\circ)^2+$$
$$+2J_2^Dc2\mu^-\rho_1(2d_2^\circ)^2+2S_2^R+c2p_0^22H_\omega^\circ(2d_2^\circ)^2,\quad \langle H\rangle_\omega=(3H_\omega^1,2H_\omega^2)$$

Чтобы получить выражение для $3J_1^D$, $2J_2^D$ нужно в зависимостях $3J_1$, $2J_2$ заменить $(3k_i^-,2\mu_i^-)$, $(3k_j,2\mu_j)$ на $(3H_\omega^13k_i^-/v_i^-,\ 2H_\omega^22\mu_i^-/v_i^-)$, $(3k_i^-/v_i^-,2\mu_i^-/v_i^-)$.

Для сокращения выкладок при вычислении компонентов S^R примем простейшую аппроксимацию бинарной функции распределения (4.3), тогда

$$3S_1^R=4k^-2\mu^-\eta^2c_L^2\{0{,}0415+0{,}574[(c_T/c_L]^{5/2}-1]\}/c_T^5,\quad \varkappa_0=k_0+4\mu_0/3$$
$$2S_2^R={}^2/_{15}\{3S_1^R+(2\mu^-)^2[0{,}0415(^7/_4-17\varkappa_0)+$$
$$+((c_T/c_L)^2-1)(1{,}42-5{,}056\varkappa_0)]/c_T^3\}$$

Таким образом, эффективный волновой оператор (5.1) можно считать построенным. Определение тензора Грина этого оператора проведем с помощью аналогичного (5.1) разложения

$$g_{ij}^*(k,\omega)=g_L^*(k,\omega)\pi_{ij}(k)+g_T^*(k,\omega)v_{ij}(k)$$
$$g_L^*(k,\omega)=-[L_L^*(k,\omega)]^{-1},\quad g_T^*(k,\omega)=-[L_T^*(k,\omega)]^{-1} \tag{5.2}$$

Переходя к x представлению, для эффективного тензора Грина получим выражение того же вида, что и для однородной изотропной среды

$$g_{ij}^*(r,\omega)=\frac{1}{4\pi\mu_S}\left[\frac{\exp(ik_2r)}{r}\delta_{ij}+\frac{\mu_S}{\rho_S\omega^2}\partial_i\partial_j\left(\frac{\exp(ik_2r)}{r}-\frac{\exp(ik_1r)}{r}\right)\right]$$

где эффективные волновые числа записываются в комплексной форме

$$k_1=\omega(\rho_S/\varkappa_S)^{1/2}[1+i\omega^3cf(\rho_D/\rho_S+\varkappa_D/\varkappa_S)/2] \tag{5.3}$$
$$k_2=k_1(\varkappa_S/\mu_S)^{1/2}$$

Соотношения (5.3) формально совпадают с полученными ранее [11], отличие состоит в конкретных выражениях для $\varkappa_S$, $\varkappa_D$, вызванных учетом бинарного взаимодействия включений, и имеющее первый порядок малости по c. Действительные части волновых чисел k_1, k_2 определяют скорости распространения продольных $c_L^*=(\varkappa_S/\rho_S)^{1/2}$, и поперечных $c_T^*=(\mu_S/\rho_S)^{1/2}$ волн в композитной среде. Мнимые части волновых чисел определяют коэффициенты затухания, отнесенные к единице длины.

Полученные выражения для c_L^*, c_T^* не зависят от частоты, поскольку при их получении членами порядка ω^2 в вещественных частях соотношений пренебрегали при сравнении с единицей. Для более точного согласования с экспериментом необходимо учитывать члены порядка ω^4. Поскольку коэффициенты затухания $\gamma_L=\operatorname{Im} k_1$, $\gamma_T=\operatorname{Im} k_2$ должны быть положительными, то множитель f в (5.1) также положителен: $f=v^- - 4\pi c\int\limits_0^\infty \psi(r)r^2\,dr>0$. В случае выбора бинарной корреляционной функции в форме (4.3) это возможно лишь при $c<1/8$, в случае использования более точных аппроксимаций для φ [9—10] область значений c, для которых формулы (5.1), (5.3) непротиворечивы, существенно расширяется [9, 10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fu L. S.* Mechanics aspects of NDE by sound and ultrasound // Appl. Mech. Rev. 1982. Vol. 35. No. 8. P. 1047–1057.
2. Acoustic, electromagnetic and elastic wave scattering – focus on the T-matrix approach/Eds *Varadan V. K., Varadan V. V.* New York: Pergamon. 1980. 693 p.
3. *Корнеев В. А., Петрашень Г. И.* Вычисление полей дифракций на упругой сфере // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. М.: Наука. 1987. Вып. 27. С. 45–69.
4. *Fu L. S., Mura T.* The determination of the elastodynamic fields of an ellipsoidal inhomogeneity // Trans. ASME J. Appl. Mech. 1983. Vol. 50. No. 2. P. 390–396.
5. *Willis J. R.* A polarisation approach to the scattering of elastic waves. I. Scattering by a single inclusion // J. Mech. and Phys. Solids. 1980. Vol. 28. No. 5/6. P. 287–305.
6. *Wu R. S., Aki K.* Elastic wave scattering by a random medium and small-scale inhomogeneities in the lithospere // J. Geophis. Res. 1985. Vol. 90. No. B12. P. 10 261–10 273.
7. *Sadina F. J., Willis J. R.* A simple self-consistent analysis of wave propagation in particulate composites // Wave Motion. 1988. Vol. 10. No. 2. P. 127–142.
8. *Fu L. S.* A theory of dynamic elastic constants of heterogeneous media // Phil. Mag. ser. A. 1987. Vol. 56. No. 1. P. 149–159.
9. *Varadan V. K., Ma Y., Varadan V. V.* A multiple scattering theory for elastic wave propagation in discrete randon media // J. Acoustic. Soc. Amer. 1985. Vol. 77. No. 2. P. 375–385.
10. *Willis J. R.* A polarization approach to the scattering of elastic wave. II. Multiple scatterings from inclusions // J. Mech. and Phys. Solids. 1980. Vol. 28. No. 5–6. P. 307–326.
11. *Канаун С. К., Левин В. М.* О построении эффективного волнового оператора для среды с изолированными неоднородностями // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. N. 5. С. 67–76.
12. *Lax M.* Multiple scattering of wave // Rev. Moden Phys. 1951. Vol. 23. No. 4. P. 287–310.
13. *Datta S. K., Ladbetter H. M.* Effective wave speeds in an SiC – particle – reinforsed Al compozite // J. Acoustic. Soc. Amer. 1986. Vol. 79. No. 2. P. 239–248.
14. *Буряченко В. А.* Корреляционная функция полей напряжений в матричных композитах // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. N 3. С. 69–76.
15. *Li Hao, Zhong Wei-fang, Li Goug-fu.* On the method of equivalent inclusion in elastodynamic and the scattering fields of to ellipsoidal inhomogeneities // Appl. Math. Mech. 1985. Vol. 6. No. 6. P. 489–498.
16. *Sotiropoulos D. A., Achenbach J. D., Zhu H.* An inverse scattering method to characterize inhomogeneties in elastic solids // J. Appl. Phys. 1987. Vol. 62. No. 7. P. 2771–2777.
17. *Gubernatis J. E., Domany E.* Effects of microstructure on the speed and attenuation of elastic waves in porous materials // Wave Motion. 1984. Vol. 6. No. 6. P. 579–589.
18. *Mura T.* Micromechanics of defects in solids. The Hague, The Netherlands: Martinus Nijhoff. 1982. 494 p.
19. *Кунин И. А.* Теория упругих сред с микроструктурой. М.: Наука, 1975. 415 с.

Москва

Поступила в редакцию 4.X.1989