

УДК 620.18

© 1990 г.

Г. А. ВАНИН

УПРУГОСТЬ ВОЛОКНИСТЫХ СРЕД ПРОСТРАНСТВЕННОГО СТРОЕНИЯ

Определение пространственные волокнистые среды охватывает широкий класс перспективных композиционных материалов с многонаправленными волокнами типа углерод-углерод, углерод-карбид-углерод, армированные керамики и другие. Исследования по механике многомерно армированных материалов имеют первостепенное значение для разработки методов расчета конструкций, находящихся в сложном напряженном состоянии [1]. Известные модели в механике пространственно армированных материалов [2, 3, 4] основываются на представлении их в виде смеси линейно армированных слоев или на предположении об однородном напряженно деформированном состоянии компонентов. Рациональные методы проектирования и определения эффективных свойств материалов по свойствам компонентов, а также исследование взаимодействия внутренних полей в процессах изготовления и накопления повреждений при внешних нагрузках могут быть осуществлены на моделях, отражающих состояние материалов на уровне волокно-матрица. Ниже предлагается приближенное решение задачи, обобщающее результаты теории триортгонално армированных сред [5, 6].

1. Каркас многомерно армированных сред с ориентированной структурой образует система скрепляющихся волокон или жгутов (прутков) из множества элементарных волокон, соединенных между собой связующим. Рассматривается технология сложения волокон (нитей) в прутки без их крутки; задача проектирования многокомпонентных жгутов из волокон, обладающих различными свойствами, решается с привлечением теории, учитывающей их состав, компоновку и дефекты в компонентах [5].

Модели пространственно армированных сред строим путем задания на трех взаимно-перпендикулярных плоскостях проекций осей жгутов или волокон, а также набора Эйлеровых углов θ, φ, ψ наглядно определяющих ориентацию каждой оси. В общем случае введенные углы являются дискретными функциями координат проекции осей n, m, p ; для регулярной компоновки структуры достаточно задать углы ориентации осей в отдельном узле, расположенном в пределах параллелепипеда периодов. В дальнейшем тройку чисел n, m, p будем для сокращения письма обозначать одним индексом j .

Совмещение осей x'_j и j -го волокна в системе координат x_1, x_2, x_3 (фиг. 1) устанавливаем переносом начала и преобразованием

$$x'_j = x_1 \cos \theta_j + i/2 (z_1 e^{-i\varphi_j} - \bar{z}_1 e^{i\varphi_j}) \sin \theta_j \quad (1.1)$$

$$\bar{z}_j e^{-i\psi_j} = -ix_1 \sin \theta_j + z_1 e^{-i\varphi_j} \sin^2 \theta_j / 2 + \bar{z}_1 e^{i\varphi_j} \cos^2 \theta_j / 2$$

$$z_1 = x_2 + ix_3, j = nmp, n, m, p = 0, \pm 1, \dots$$

Обратные преобразования осуществляются подстановкой $\theta_j \rightarrow \theta, \varphi_j \rightarrow \pi - \psi, \psi_j \rightarrow \pi - \varphi$. Для сокращения письма вводим вместо компонентов тензоров напряжений и деформаций комбинации вида

$$\sigma_1, \sigma = \sigma_2 + \sigma_3, \Sigma = \sigma_3 - \sigma_2 + 2i\tau_3, \tau = \tau_1 - i\tau_2 \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_1, \varepsilon = \varepsilon_2 + \varepsilon_3, E = \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + i\gamma_3, \gamma = \gamma_1 - i\gamma_2 \quad (1.3)$$

Решение задачи строится при допущениях:

а) рассматриваются состояния в объеме, удаленном от источников локального возмущения напряженного состояния;

б) пренебрегаем взаимодействием напряжений рассеянных смежными волокнами;

в) пренебрегаем рассеянием напряжений в матрице в случае продольного растяжения среды с непрерывными волокнами;

г) условия на межфазных поверхностях выполняются точно, на границах выделенного объема интегрально.

Согласно условию б) состояние в матрице определяется суммой однородной σ_h^0 , τ_h^0 и рассеянной составляющих σ_h^* , τ_h^* , образующих локальное поле в окрестности отдельных включений, а также вблизи торцов оборванных волокон. Далее, продольные напряжения в волокнах $(\sigma_1)_a$ и матрице σ_1 связаны соотношением

$$(\sigma_1)_a/E_a \approx \sigma_1/E \quad (1.4)$$

Здесь и везде в дальнейшем индексом a отмечаются величины для волокна; без индекса — для матрицы или всех компонентов одновременно. Интегральные напряжения определяем для всей среды в целом или в объеме V , содержащем типовую для среды ориентацию волокон. Рассеянные поля учитываем суммированием состояний в повернутых на Эйлеровы углы объемах в совмещенных с осями волокон локальных системах координат (1.1). Формулы усреднения напряжений будут

$$\begin{aligned} \langle \sigma_1 \rangle &= \sigma_1^0 + \sum_j \left[(\sigma_1^0)_j \xi_j \left(\frac{E_a}{E} - 1 \right) \cos^2 \theta_j + \langle \sigma \rangle_j \frac{\sin^2 \theta_j}{2} + \right. \\ &+ (\langle \tau \rangle_j e^{-i\psi_j} - \langle \bar{\tau} \rangle_j e^{i\psi_j}) \left(\frac{i}{2} \sin 2\theta_j \right) + (\langle \Sigma \rangle_j e^{-2i\psi_j} + \langle \bar{\Sigma} \rangle_j e^{2i\psi_j}) \frac{\sin^2 \theta_j}{4} \Big] \\ \langle \sigma \rangle &= \sigma^0 + \sum_j \left[(\sigma_1^0)_j \xi_j \left(\frac{E_a}{E} - 1 \right) \sin^2 \theta_j + \langle \sigma \rangle_j \left(1 - \frac{\sin^2 \theta_j}{2} \right) + \right. \\ &+ (\langle \tau \rangle_j e^{-i\psi_j} - \langle \bar{\tau} \rangle_j e^{i\psi_j}) \left(-\frac{i}{2} \sin 2\theta_j \right) + (\langle \Sigma \rangle_j e^{-2i\psi_j} + \langle \bar{\Sigma} \rangle_j e^{2i\psi_j}) \left(-\frac{\sin^2 \theta_j}{4} \right) \Big] \\ \langle \Sigma \rangle &= \Sigma^0 + \sum_j \left[(\sigma_1^0)_j \xi_j \left(\frac{E_a}{E} - 1 \right) e^{-2i\psi_j} \sin^2 \theta_j + \langle \sigma \rangle_j \left(-e^{-2i\psi_j} \frac{\sin^2 \theta_j}{2} \right) + \right. \\ &+ \left(\langle \tau \rangle_j e^{-i\psi_j} \cos^2 \frac{\theta_j}{2} + \langle \bar{\tau} \rangle_j e^{i\psi_j} \sin^2 \frac{\theta_j}{2} \right) (-2ie^{-2i\psi_j} \sin \theta_j) + \\ &+ \langle \Sigma \rangle_j e^{-2i(\psi_j + \psi_j)} \cos^4 \frac{\theta_j}{2} + \langle \bar{\Sigma} \rangle_j e^{2i(\psi_j - \psi_j)} \sin^4 \frac{\theta_j}{2} \Big] \\ \langle \tau \rangle &= \tau^0 + \sum_j \left[(\sigma_1^0)_j \xi_j \left(\frac{E_a}{E} - 1 \right) \left(\frac{i}{2} e^{-i\psi_j} \sin 2\theta_j \right) + \right. \\ &+ \langle \sigma \rangle_j \left(-\frac{i}{4} e^{-i\psi_j} \sin 2\theta_j \right) + \langle \tau \rangle_j e^{-i(\psi_j + \psi_j)} \left(\frac{\cos \theta_j}{2} + \frac{\cos 2\theta_j}{2} \right) + \\ &+ \langle \bar{\tau} \rangle_j e^{i(\psi_j - \psi_j)} \left(\frac{\cos \theta_j}{2} - \frac{\cos 2\theta_j}{2} \right) + \langle \Sigma \rangle_j e^{-i(\psi_j + 2\psi_j)} \left(-\frac{i}{2} \sin \theta_j \cos^2 \frac{\theta_j}{2} \right) + \\ &+ \langle \bar{\Sigma} \rangle_j e^{i(2\psi_j - \psi_j)} \left(\frac{i}{2} \sin \theta_j \sin^2 \frac{\theta_j}{2} \right) \Big] \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь угловыми скобками отмечены средние напряжения, рассеянные j -м волокном. Они определяются потенциалами локальных состояний и в случае непрерывных неискривленных волокон находим их связи с однородными напряжениями

$$\langle \sigma \rangle_j = \frac{1}{V} \int_0^{h_j} dx_i \oint_{\Gamma_i} (z dG^* - \bar{z} d\bar{G}^*) = q_{ji} \sigma_j^0 + q_{j2} \Sigma_j^0 + q_{j3} \bar{\Sigma}_j^0 \quad (1.6)$$

$$\langle \Sigma \rangle_j = -\frac{i}{2V} \int_0^{h_j} dx_j \oint_{\Gamma_j} \bar{z} dG^* = p_{j1} \sigma_j^\circ + p_{j2} \Sigma_j^\circ + p_{j3} \bar{\Sigma}_j^\circ$$

$$\langle \tau \rangle_j = -\frac{i}{2V} \int_0^{h_j} dx_j \oint_{\Gamma_j} (\tau^* dz - \bar{\tau}^* d\bar{z}) = v_{j1} \tau_j^\circ + v_{j2} \bar{\tau}_j^\circ$$

Здесь $V = h_j F_j$; F_j — площадь усреднения, ограниченная Γ_j , в повернутом объеме V ; q_{jk} , p_{jk} , v_{jk} — параметры локального состояния; $dG^* = \sigma^* d\bar{z} + \Sigma^* dz$.

Систему (1.5) преобразуем с помощью соотношений, связывающих напряжения на наклонных и координатных площадках,

$$(\sigma_1^\circ)_j = \sigma_1^\circ \cos^2 \theta_j + \sigma^\circ \left(\frac{\sin^2 \theta_j}{2} \right) + (\tau^\circ e^{i\varphi_j} - \bar{\tau}^\circ e^{-i\varphi_j}) \left(-\frac{i}{2} \sin 2\theta_j \right) +$$

$$+ (\Sigma^\circ e^{2i\varphi_j} + \bar{\Sigma}^\circ e^{-2i\varphi_j}) \frac{\sin^2 \theta_j}{4} \quad (1.7)$$

$$\sigma_j^\circ = \sigma_1^\circ \sin^2 \theta_j + \sigma^\circ \left(1 - \frac{\sin^2 \theta_j}{2} \right) + (\tau^\circ e^{i\varphi_j} - \bar{\tau}^\circ e^{-i\varphi_j}) \left(\frac{i}{2} \sin 2\theta_j \right) +$$

$$+ (\Sigma^\circ e^{2i\varphi_j} + \bar{\Sigma}^\circ e^{-2i\varphi_j}) \left(-\frac{\sin^2 \theta_j}{4} \right)$$

$$\Sigma_j^\circ e^{-2i\varphi_j} = \sigma_1^\circ \sin^2 \theta_j + \sigma^\circ \left(-\frac{\sin^2 \theta_j}{2} \right) + \left(\tau^\circ e^{i\varphi_j} \cos^2 \frac{\theta_j}{2} + \right.$$

$$\left. + \bar{\tau}^\circ e^{-i\varphi_j} \sin^2 \frac{\theta_j}{2} \right) (2i \sin \theta_j) + \Sigma^\circ e^{2i\varphi_j} \cos^4 \frac{\theta_j}{2} + \bar{\Sigma}^\circ e^{-2i\varphi_j} \sin^4 \frac{\theta_j}{2}$$

$$\tau_j^\circ e^{-i\varphi_j} = \sigma_1^\circ \left(-\frac{i}{2} \sin 2\theta_j \right) + \sigma^\circ \left(\frac{i}{4} \sin 2\theta_j \right) + \tau^\circ e^{i\varphi_j} \left(\frac{\cos \theta_j}{2} + \frac{\cos 2\theta_j}{2} \right) +$$

$$+ \bar{\tau}^\circ e^{-i\varphi_j} \left(\frac{\cos \theta_j}{2} - \frac{\cos 2\theta_j}{2} \right) + \Sigma^\circ e^{2i\varphi_j} \left(\frac{i}{2} \sin \theta_j \cos^2 \frac{\theta_j}{2} \right) +$$

$$+ \Sigma^\circ e^{-2i\varphi_j} \left(-\frac{i}{2} \sin \theta_j \sin^2 \frac{\theta_j}{2} \right)$$

Преобразования с учетом (1.6) после операции симметризации, сводящейся к образованию полусуммы коэффициентов, расположенных симметрично относительно главной диагонали системы, приводят к 6 алгебраическим уравнениям относительно однородных напряжений в матрице. Ее решение имеет вид

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^\circ \\ \sigma_2^\circ \\ \sigma_3^\circ \\ \tau_1^\circ \\ \tau_2^\circ \\ \tau_3^\circ \end{bmatrix} = [A_{ik}] \begin{bmatrix} \langle \sigma_1 \rangle \\ \langle \sigma_2 \rangle \\ \langle \sigma_3 \rangle \\ \langle \tau_1 \rangle \\ \langle \tau_2 \rangle \\ \langle \tau_3 \rangle \end{bmatrix} \quad (i, k = 1, \dots, 6) \quad (1.8)$$

где $A_{ik} = A_{ki}$ зависят от углов поворота и свойств компонентов. Соотношения усреднения деформаций среды находим на основе разбиения состояния матрицы на две составляющие. Деформации в j -м повернутом объеме с одним волокном будут:

$$(\varepsilon_1)_j = (\sigma_1^\circ)_j / E - \nu \sigma_j^\circ / E + \langle \varepsilon_1 \rangle_j$$

$$\varepsilon_j = -\frac{2\nu}{E} (\sigma_1^\circ)_j + \frac{1-\nu}{E} \sigma_j^\circ + \langle \varepsilon \rangle_j, \quad \gamma_j = \frac{\tau_j^\circ}{G} + \langle \gamma \rangle_j$$

Интегральные деформации на координатных площадках получаем суммированием усредненных деформаций по всем элементам; группируя де-

формации однородного состояния, получим

$$\begin{aligned}
 \langle \varepsilon_1 \rangle &= \frac{\sigma_1^\circ}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma^\circ + \sum_j \left[\langle \varepsilon_1 \rangle_j \cos^2 \theta_j + \langle \varepsilon \rangle_j \frac{\sin^2 \theta_j}{2} + (\langle \gamma \rangle_j e^{-i\psi_j} - \right. \\
 &\quad \left. - \langle \bar{\gamma} \rangle_j e^{i\psi_j} \left(\frac{i}{4} \sin 2\theta_j \right) + (\langle E \rangle_j e^{2i\psi_j} + \langle \bar{E} \rangle_j e^{-2i\psi_j}) \left(-\frac{\sin^2 \theta_j}{4} \right) \right] \quad (1.9) \\
 \langle \varepsilon \rangle &= -\frac{2\nu}{E} \sigma_1^\circ + \frac{1-\nu}{E} \sigma^\circ + \sum_j \left[\langle \varepsilon_1 \rangle_j \sin^2 \theta_j + \langle \varepsilon \rangle_j \left(1 - \frac{\sin^2 \theta_j}{2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + (\langle \gamma \rangle_j e^{-i\psi_j} - \langle \bar{\gamma} \rangle_j e^{i\psi_j}) \left(-\frac{i}{4} \sin 2\theta_j \right) + (\langle E \rangle_j e^{2i\psi_j} + \langle \bar{E} \rangle_j e^{-2i\psi_j}) \left(\frac{\sin^2 \theta_j}{4} \right) \right] \\
 \langle E \rangle &= -\frac{\bar{\Sigma}^\circ}{2G} + \sum_j \left[\langle \varepsilon_1 \rangle_j (-e^{2i\psi_j} \sin^2 \theta_j) + \langle \varepsilon \rangle_j \left(e^{2i\psi_j} \frac{\sin^2 \theta_j}{2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \langle \gamma \rangle_j e^{i(2\varphi_j - \psi_j)} (-i \sin \theta_j \sin^2 \theta_j / 2) + \langle \bar{\gamma} \rangle_j e^{i(2\varphi_j + \psi_j)} (-i \sin \theta_j \cos^2 \theta_j / 2) + \right. \\
 &\quad \left. + \langle E \rangle_j (e^{2i(\varphi_j + \psi_j)} \cos^4 \theta_j / 2) + \langle \bar{E} \rangle_j (e^{2i(\varphi_j - \psi_j)} \sin^4 \theta_j / 2) \right] \\
 \langle \gamma \rangle &= \frac{\tau^\circ}{G} + \sum_j \left[\langle \varepsilon_1 \rangle_j (ie^{-i\varphi_j} \sin 2\theta_j) + \langle \varepsilon \rangle_j \left(-\frac{i}{2} e^{-i\varphi_j} \sin 2\theta_j \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \langle \gamma \rangle_j e^{-i(\varphi_j + \psi_j)} \left(\frac{\cos \theta_j}{2} + \frac{\cos 2\theta_j}{2} \right) + \langle \bar{\gamma} \rangle_j e^{-i(\varphi_j - \psi_j)} \left(\frac{\cos \theta_j}{2} - \frac{\cos 2\theta_j}{2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \langle E \rangle_j (-ie^{-i(\varphi_j - 2\psi_j)} \sin \theta_j \sin^2 \theta_j / 2) + \langle \bar{E} \rangle_j (ie^{-i(\varphi_j + 2\psi_j)} \sin \theta_j \cos^2 \theta_j / 2) \right]
 \end{aligned}$$

Плоское поперечное состояние j -го волокна с матрицей обеспечивается продольными напряжениями, усредненное значение которых выражается через компоненты поперечного состояния

$$(\sigma_1^\perp)_j = \frac{\nu i}{V} \int_0^{h_j} dx_j \oint_{\Gamma_j - l_j} (z dG - \bar{z} d\bar{G}) + \frac{\nu a i}{V} \int_0^{h_j} dx_j \oint_{l_j} (z dG - \bar{z} d\bar{G}) \quad (1.10)$$

где l_j и Γ_j — контуры поперечного сечения волокна и стороны повернутого объема, лежащие в одной плоскости. Здесь и везде в дальнейшем знак $\perp$ выделяет состояния, связанные с уравниванием продольных напряжений при плоской деформации. Деформация j -го волокна с матрицей при наличии межфазных трещин, неравномерного размещения волокон в пространстве и других факторов описывается соотношениями, характерными для тел с моноклинной симметрией в повернутой системе координат. Пренебрегая влиянием поперечных сдвигов на удлинение j -го элемента вдоль ориентации волокна и учитывая, что однородные деформации для всех элементов одни и те же, получим

$$\begin{aligned}
 \langle \varepsilon_1 \rangle_j &= -(\sigma_1^\perp)_j / E_j + \nu \sigma_j^\circ / E \\
 \langle \gamma \rangle_j &= \frac{i}{V} \int_0^{h_j} dx_j \oint_{\Gamma_j} (u_1)_j d\bar{z} - \frac{\tau_j^\circ}{G}, \quad \langle E \rangle_j = -\frac{i}{V} \int_0^{h_j} dx_j \oint_{\Gamma_j} (u_2 + iu_3)_j dz + \frac{\bar{\Sigma}_j^\circ}{2G} \\
 \langle \varepsilon \rangle_j &= \frac{i}{2V} \int_0^{h_j} dx_j \oint_{\Gamma_j} \{ [(u_2 + iu_3)_j + (u_2 + iu_3)_j^\perp] d\bar{z} - [(u_2 - iu_3)_j + \\
 &\quad + (u_2 - iu_3)_j^\perp] dz \} - \frac{1-\nu}{E} \sigma_j^\circ + 2\nu \frac{(\sigma_1^\perp)_j}{E_j}; \quad (1.11)
 \end{aligned}$$

где $E_j = \zeta_j E_a + (1 - \zeta_j) E$. Сумма функций под интегралом для $\langle \varepsilon \rangle_j$ определяет деформации в плоском поперечном состоянии j -го элемента и влияние стеснения, оказываемого волокном при заданной продольной деформации и пропорционального разности коэффициентов Пуассона компонентов. Сле-

дующее слагаемое отделяет однородные деформации в матрице; последний член учитывает вклад от уравнивающих напряжений, обеспечивающих условия плоской деформации элемента.

Интегрирование в (1.11) приводит к связи деформаций с однородными напряжениями в матрице

$$\begin{bmatrix} \langle \varepsilon_1 \rangle_j \\ \langle \varepsilon \rangle_j \\ \langle E \rangle_j \end{bmatrix} = [B_{ik}] \begin{bmatrix} \sigma_j^\circ \\ \Sigma_j^\circ \\ \bar{\Sigma}_j^\circ \end{bmatrix} \quad (i, k = 1, 2, 3) \quad (1.12)$$

Равенства (1.9) и (1.12) связывают полные усредненные деформации с однородными напряжениями в матрице в повернутых координатах, которые с помощью соотношений (1.7) преобразуются к симметричной системе уравнений вида

$$\begin{bmatrix} \langle \varepsilon_1 \rangle \\ \langle \varepsilon_2 \rangle \\ \langle \varepsilon_3 \rangle \\ \langle \gamma_1 \rangle \\ \langle \gamma_2 \rangle \\ \langle \gamma_3 \rangle \end{bmatrix} = [D_{ik}] \begin{bmatrix} \sigma_1^\circ \\ \sigma_2^\circ \\ \sigma_3^\circ \\ \tau_1^\circ \\ \tau_2^\circ \\ \tau_3^\circ \end{bmatrix} \quad (D_{ik} = D_{ki})$$

Последняя, если воспользоваться равенствами (1.8) и преобразованиями ее к симметричному виду, сводится к искомому представлению

$$\begin{bmatrix} \langle \varepsilon_1 \rangle \\ \langle \varepsilon_2 \rangle \\ \langle \varepsilon_3 \rangle \\ \langle \gamma_1 \rangle \\ \langle \gamma_2 \rangle \\ \langle \gamma_3 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & -\frac{\nu_{13}}{E_3} & \frac{\nu_{14}}{G_1} & \frac{\nu_{15}}{G_2} & \frac{\nu_{16}}{G_3} \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_3} & \frac{\nu_{24}}{G_1} & \frac{\nu_{25}}{G_2} & \frac{\nu_{26}}{G_3} \\ -\frac{\nu_{31}}{E_1} & -\frac{\nu_{32}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & \frac{\nu_{34}}{G_1} & \frac{\nu_{35}}{G_2} & \frac{\nu_{36}}{G_3} \\ \frac{\nu_{41}}{E_1} & \frac{\nu_{42}}{E_2} & \frac{\nu_{43}}{E_3} & \frac{1}{G_1} & \frac{\nu_{45}}{G_2} & \frac{\nu_{46}}{G_3} \\ \frac{\nu_{51}}{E_1} & \frac{\nu_{52}}{E_2} & \frac{\nu_{53}}{E_3} & \frac{\nu_{54}}{G_1} & \frac{1}{G_2} & \frac{\nu_{56}}{G_3} \\ \frac{\nu_{61}}{E_1} & \frac{\nu_{62}}{E_2} & \frac{\nu_{63}}{E_3} & \frac{\nu_{64}}{G_1} & \frac{\nu_{65}}{G_2} & \frac{1}{G_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \sigma_1 \rangle \\ \langle \sigma_2 \rangle \\ \langle \sigma_3 \rangle \\ \langle \tau_1 \rangle \\ \langle \tau_2 \rangle \\ \langle \tau_3 \rangle \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

Обобщенный Закон упругости волокнистой среды произвольного пространственного строения содержит 21 упругую постоянную, приближенная зависимость которых от параметров структуры может быть найдена с помощью предложенной методики расчета.

2. В среде с непрерывными изотропными волокнами при совершенном контакте с матрицей потенциалы локального состояния аппроксимируются отрезком ряда Лорана и убывают при удалении от источника возмущения [6]. Предлагая высокую симметрию структурных элементов и заменяя контуры Γ_j окружностями равновеликого радиуса, приводим результаты вычисления интегралов (1.6), (1.10), (1.11):

$$\begin{aligned} \langle \tau \rangle_j &= \nu_0 \tau_j^\circ = \xi_j \frac{1-G/G_a}{1+G/G_a} \tau_j^\circ, & \langle \sigma \rangle_j &= q \sigma_j^\circ = \xi_j \left(\frac{\kappa+1}{2+(\kappa_a-1)G/G_a} - 1 \right) \sigma_j^\circ \\ \langle \Sigma \rangle_j &= p \Sigma_j^\circ = \xi_j \frac{1-G/G_a}{\kappa+G/G_a} \Sigma_j^\circ, & (\sigma_i^\perp)_j &= -[(1-\xi_j)\nu + \xi_j\nu_a + q\nu_a] \sigma_j^\circ \\ \langle \gamma_j \rangle &= -\frac{\nu_0}{G} \tau_j^\circ, & \langle E \rangle_j &= \frac{\kappa p}{2G} \bar{\Sigma}_j^\circ \\ \langle \varepsilon_1 \rangle_j &= -\left(\nu + \frac{(1-\xi_j)\nu + \xi_j\nu_a + q\nu_a}{\delta+1} \right) \frac{\sigma_j^\circ}{E}, & \langle \varepsilon \rangle_j &= \frac{2\mu}{E} (\sigma_i^\circ)_j - \frac{\omega_0}{E} \sigma_j^\circ \\ \delta &= \xi_j \frac{E_a}{E} - \xi_j; & \mu &= \frac{\xi_j(\nu-\nu_a)(\kappa+1)}{2+\xi_j(\kappa-1)+(1-\xi_j)(\kappa_a-1)G/G_a} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\omega_0 = 2v^2 + (1+v)q - 2(v-\mu) \frac{(1-\xi_j)v + \xi_j v_a + qv_a}{\delta+1}$$

Если контуры интегрирования содержат N волокон, то используем преобразование

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \int_{\Gamma_a} dx_j \oint (...) &= \frac{1}{V} \int dx_j \sum_{n=1}^N \oint_{\Gamma_n} (...) = \\ &= \frac{1}{Nh} \int dx_j \sum_m \frac{m}{f} \oint_{\Gamma_m} (...) = \left\langle \frac{1}{hf} \int dx_j \oint_{\Gamma_m} (...) \right\rangle \end{aligned}$$

где замена индекса суммирования n на m означает переход от последовательного суммирования к суммированию по состояниям.

Простые схемы ориентации волокон в кубе, объемом h^3 и разбитом координатными плоскостями на октанты можно получить путем направления волокон по осям координат ($3D$), по главным диагоналям ($4D$) (фиг. 2) по диагоналям координатных плоскостей ($6D$) (фиг. 3), а также по ребрам октаэдра ($12D$) (фиг. 4), додекаэдра или икосаэдра ($30D$) и т. д. Производные структуры получаются путем совмещения указанных, что приводит к схемам $7D$, $9D$, $13D$ и т. д. Среда, полученная регулярной прямоугольной упаковкой кубов с указанными схемами армирования, обладает кубической симметрией и характеризуется тремя эффективными упругими постоянными E_a , ν_a , G_a . Структуры с одинаковыми волокнами, ориентированными в n направлениях, будут обозначаться nD_0 ; а с дефектами — nD_0' или nD' .

Упрощенные формулы для упругих характеристик сред nD_0 полученные в приближении однородного взаимодействия волокон, будут

$$E_a = \frac{[2 + \Sigma_n \langle 2\delta + (6\nu_0 - q - 5\delta + 3\chi \sin^2 \theta) \sin^2 \theta \rangle_n][1 + \Sigma_n \langle \delta + (q - \delta) \sin^2 \theta \rangle_n]}{[2 + \Sigma_n \langle 2\delta + (2\nu_0 + q - 3\delta + \chi \sin^2 \theta) \sin^2 \theta \rangle_n] H_1 - 2 \Sigma_n \langle (\delta + q - 2\nu_0 - \chi \sin^2 \theta) \sin^2 \theta \rangle_n H_2} \quad (2.2)$$

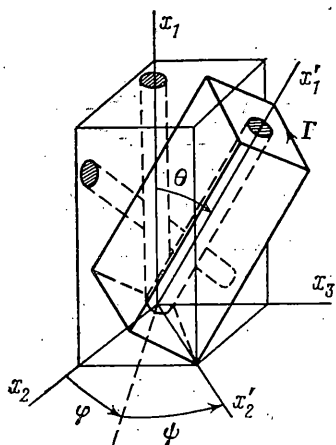
$$\nu_a = \frac{\Sigma_n \langle (\delta + q - 2\nu_0 - \chi \sin^2 \theta) \sin^2 \theta \rangle_n H_1 - 2[1 + \Sigma_n \langle \delta + (2\nu_0 - 2\delta + \chi \sin^2 \theta) \sin^2 \theta \rangle_n] H_2}{[2 + \Sigma_n \langle 2\delta + (2\nu_0 - 3\delta + q + \chi \sin^2 \theta) \sin^2 \theta \rangle_n] H_1 - 2 \Sigma_n \langle (\delta - 2\nu_0 + q - \chi \sin^2 \theta) \sin^2 \theta \rangle_n H_2} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{G_a}{G} &= \\ &= \frac{1 + \Sigma_n \langle \nu_0 \sin^2 \theta + p \cos^2 \theta \rangle_n + \Sigma_n \langle \frac{1}{2} \chi \sin^4 \theta \sin^2 2\varphi \rangle_n}{1 - \Sigma_n \langle \nu_0 \sin^2 \theta + \kappa p \cos^2 \theta \rangle_n + \Sigma_n \langle (\nu_0^{-1/4} \kappa p^{-1/4} (2\mu + 2\mu_0 + \omega_0) (1+v)^{-1}) \sin^4 \theta \sin 2\varphi \rangle_n} \end{aligned} \quad (2.4)$$

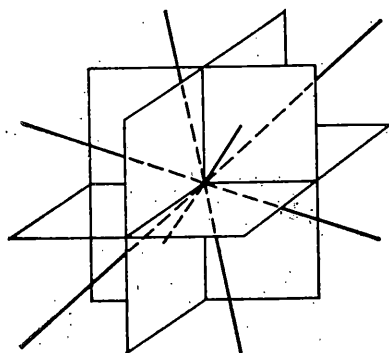
где угловые скобки обозначают суммирование по параметрам и углам ориентации волокон, образующих простую структуру; обобщение на случай совмещенных сред производится путем суммирования по n — числу составных простых структур. Далее

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{E} + \sum_n \left\langle \left(\frac{\mu + \mu_0}{E} - \frac{\nu_0}{G} \right) \frac{\sin^2 \theta}{4} - \left(\frac{\omega_0}{E} + \frac{\kappa p}{4G} \right) \sin^4 \theta \right\rangle_n \\ H_2 &= -\frac{\nu}{E} + \sum_n \left\langle \left(\frac{\mu + \mu_0}{E} + \frac{\kappa p}{2G} \right) \frac{\sin^4 \theta}{4} + \left(\frac{\mu + \mu_0}{2E} \cos^2 \theta - \frac{\omega_0}{2E} \sin^2 \theta \right) \times \right. \\ &\quad \times \left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{2} \right) + \frac{\nu_0}{8G} \sin^2 2\theta \left. \right\rangle_n, \quad \chi = \delta + \frac{1}{2} (q + p) - 2\nu_0 \\ \mu_0 &= \nu - [(1 - \xi)v + \xi v_a + qv_a] / (\delta + 1) \end{aligned}$$

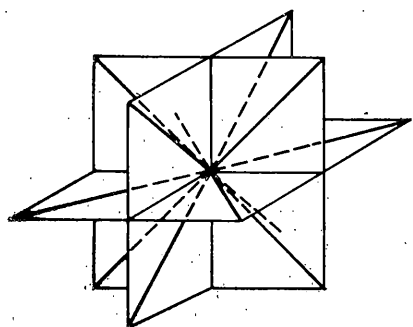
С ростом n при совмещении более сложных схем ориентации волокон достигается более высокая симметрия среды как в отдельных октантах, так и в их частях, что должно привести к сближению (2.4) и соотноше-



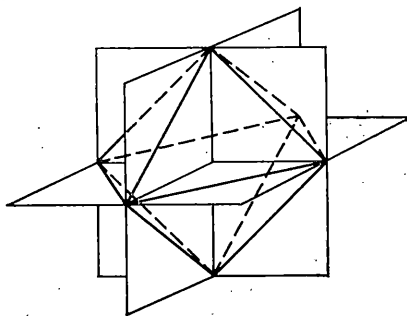
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

ния для изотропного тела

$$\frac{E_a}{2(1+\nu_a)} = \left[1 + \sum_n \left\langle \delta + \left(3\nu_0 - \frac{5}{2}\delta - \frac{1}{2}q + \frac{3}{2}\chi \sin^2 \theta \right) \sin^2 \theta \right\rangle_n \right] \times$$

$$\times \left[\frac{1}{G} - \sum_n \left\langle \left(\frac{\mu + \mu_0}{2E} + \frac{\omega_0}{E} + \frac{3\kappa p}{4G} \right) \sin^4 \theta - \left(\frac{\mu + \mu_0}{2E} - \frac{3\nu_0}{4G} \right) \sin^2 \theta + \right. \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\mu + \mu_0}{E} \cos^2 \theta - \frac{\omega_0}{E} \sin^2 \theta \right) \left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{2} \right) \right\rangle_n \right]^{-1} \quad (2.5)$$

В качестве примера рассмотрим среду $3D_0$, когда $\theta_1=0$; $\theta_2=\theta_3=\pi/2$; $\varphi_1=-\varphi_2=0$; $\varphi_3=\pi/3$, полагая в формулах (2.2) и (2.3) $g=\delta+1$, найдем

$$\frac{E_a}{E} = g(g+2q)(2g+q+3p) \{ (2g+3q+p) \{ (1-2\nu^2)g - (1+\nu)g(q+\kappa p) +$$

$$+ 2(\nu-\mu) [(1-\xi)\nu + \xi\nu_a + q\nu_a] \} + (q-p) \{ (1+\nu)g(q-\kappa p) - 2g(\mu-\nu^2) +$$

$$+ 2(1-\nu+\mu) [(1-\xi)\nu + \xi\nu_a + q\nu_a] \} \}^{-1} \quad (2.6)$$

$$\nu_a = \frac{(q-p) \{ (1-2\nu^2)g - (1+\nu)g(q+\kappa p) + 2(\nu-\mu) [(1-\xi)\nu + \xi\nu_a + q\nu_a] \} +$$

$$(2g+3q+p) \{ (1-2\nu^2)g - (1+\nu)g(q+\kappa p) + 2(\nu-\mu) [(1-\xi)\nu + \xi\nu_a + q\nu_a] \} +$$

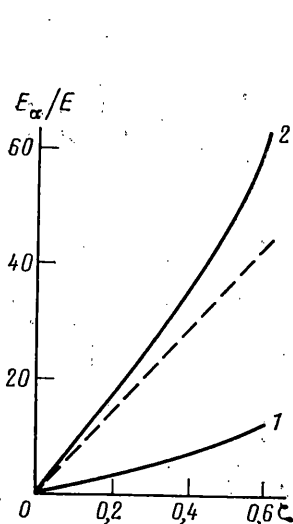
$$+ (g+q+p) \{ (1+\nu)g(q-\kappa p) - 2g(\mu-\nu^2) + 2(1-\nu+\mu) [(1-\xi)\nu + \xi\nu_a + q\nu_a] \}}{$$

$$+ (q-p) \{ (1+\nu)g(q-\kappa p) - 2g(\mu-\nu^2) + 2(1-\nu+\mu) [(1-\xi)\nu + \xi\nu_a + q\nu_a] \}}$$

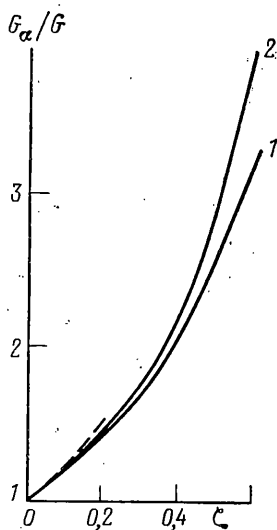
$$\frac{G_a}{G} = \frac{\xi + (1+2\xi)\kappa + [1+2\xi + \kappa(1-2\xi)]G/G_a + (1-3\xi)(G/G_a)^2}{(1-3\xi)\kappa + [1-2\xi + \kappa(1+2\xi)]G/G_a + (1+2\xi + \xi\kappa)(G/G_a)^2}$$

Зависимость упругих постоянных от суммарного содержания волокон для материалов с характеристиками $\nu=0,382$; $\nu_a=0,21$; $G/G_a=0,04$; $E/E_a=0,045$ и $G/G_a=0,004$; $E/E_a=0,0046$ приведены на фиг. 5, 6, 7.

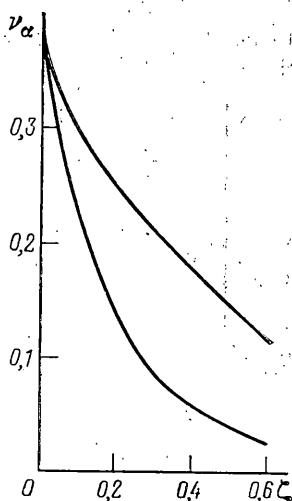
Кривые 1 и 2 соответствуют стеклопластику и углепластику с высоко-модульными волокнами. Штриховые кривые на фиг 5 и 6 определяют мо-



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

дули продольной упругости при растяжении и сдвиге линейно армированного углепластика при отслоении поперечных волокон от матрицы. Расчетные значения характеристик в целом согласуются с данными опытов [3, 7], хотя погрешности формулы для определения поперечных эффектов несколько выше, чем для модулей.

Для приложений изложенная методика позволяет определить внутреннее поле напряжений и эффективные упругие характеристики материалов и изделий с произвольной системой прямолинейноориентированными волокнами. С помощью приближенных соотношений (2.2), (2.3) и (2.4) решается задача проектирования и определения упругих модулей материалов и элементов конструкций для простых структур nD_0 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Образцов И. Ф. Актуальные проблемы механики конструкций из композитных материалов // ПММ. 1986, Т. 50. Вып. 6. С. 885–889.
2. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 334 с.
3. Тарнопольский Ю. М., Жигун И. Г., Поляков В. А. Пространственно-армированные композиционные материалы. М.: Машиностроение, 1987. 224 с.
4. Крегерс А. Ф., Тетерс Г. А. Структурная модель деформирования анизотропных пространственно-армированных композитов // Механика композит. материалов. 1982. № 1. С. 14–22.
5. Ванин Г. А. Упругость и разрушение триортогонально-армированных сред. I. Характеристики жгутов // Механика композит. материалов. 1989. № 2. С. 269–275.
6. Ванин Г. А. Упругость и разрушение триортогонально-армированных сред. 2. Сдвиг // Механика композит. материалов. 1989. № 3. С. 431–436.
7. Жигун И. Г., Поляков В. А. Свойства пространственно-армированных пластиков. Рига: Зинатне, 1978. 215 с.
8. Макаллистер Л., Лакман У. Многонаправленные углерод – углеродные композиты // Прикладная механика композитов/Пер. с англ. под ред. Ю. М. Тарнопольского. М.: Мир, 1989. С. 226–294.

Москва

Поступила в редакцию
5.III.1990