

УДК 539.3.01

© 1990 г.

В. В. ВЛАСОВ

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ
СОСТАВНОГО КРУТЛОГО ДИСКА
ПРИ РАВНОМЕРНОМ НАГРЕВЕ

В виде аналитических формул определяется напряженно-деформированное состояние равномерно нагретого плоского составного круглого диска из двух, в общем случае, неодинаковых по площади сегментов, выполненных из разных материалов (плоское напряженное состояние). Материалы сегментов имеют одинаковые упругие постоянные, коэффициенты же их линейного расширения считаются различными.

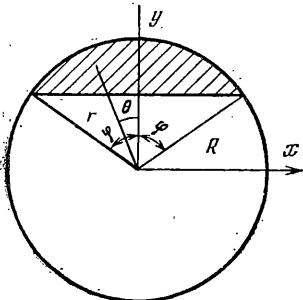
1. Остановимся вначале на термоупругой задаче для составного диска радиуса R , склеенного из двух равновеликих сегментов, т. е. в случае, когда граница сегментов $y=0$ проходит по диаметру диска, $\varphi=\pi/2$ (фиг. 1).

Искомое напряженно-деформированное состояние такого диска при равномерном нагреве будем находить суперпозицией двух решений. За первое из них, обозначаемое индексом 1, примем элементарные зависимости для перемещений и напряжений в диске

$$\sigma_x^{(1)} = -E\alpha t, \quad \sigma_y^{(1)} = \tau_{xy}^{(1)} = u_0^{(1)} = 0,$$

$$v_0^{(1)} = (1+\nu)\alpha t y, \quad y > 0$$

$$\sigma_x^{(1)} = \sigma_y^{(1)} = \tau_{xy}^{(1)} = u_0^{(1)} = v_0^{(1)} = 0, \quad y < 0 \quad (1)$$



Фиг. 1

Здесь E и ν — модуль упругости материала диска на растяжение—сжатие и коэффициент Пуассона; $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ — разность коэффициентов линейного расширения соответственно верхней $y > 0$ и нижней $y < 0$ частей диска. Зависимости отвечают частному решению для составного диска при равномерном нагреве его на температуру t . При этом величины $u_0^{(1)}$ и $v_0^{(1)}$ представляют собой часть полных перемещений, обусловленную разностью α коэффициентов линейного расширения слоев. Эти величины и напряжения σ_y , τ_{xy} удовлетворяют условиям неразрывности при переходе через границу $y=0$ частей диска. Нормальное напряжение σ_x терпит разрыв непрерывности на линии $y=0$ на величину $E\alpha t$.

Переход от декартовых x , y к полярным координатам r , θ осуществляется формулами $x = -r \sin \theta$, $y = r \cos \theta$. С учетом формул преобразования компонент перемещений u_0 , v_0 и напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} в декартовой системе координат к компонентам перемещений u , v и напряжений σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ в полярной системе координат

$$u = -u_0 \sin \theta + v_0 \cos \theta, \quad v = -u_0 \cos \theta - v_0 \sin \theta$$

$$\sigma_r = 1/2(\sigma_x + \sigma_y) - 1/2(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma_\theta = 1/2(\sigma_x + \sigma_y) + 1/2(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = 1/2(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta$$

запишем решение (1) в полярных координатах:

$$u^{(1)} = \frac{1+\nu}{2} \alpha r (1 + \cos 2\theta), \quad v^{(1)} = -\frac{1+\nu}{2} \alpha r \sin 2\theta, \quad \tau_{r\theta}^{(1)} = -\frac{E\alpha t}{2} \sin 2\theta$$

$$\sigma_r^{(1)} = -\frac{E\alpha t}{2} (1 - \cos 2\theta), \quad \sigma_\theta^{(1)} = -\frac{E\alpha t}{2} (1 + \cos 2\theta) \quad (2)$$

$$-\pi/2 < \theta < \pi/2$$

$$u^{(1)} = v^{(1)} = \sigma_r^{(1)} = \sigma_\theta^{(1)} = \tau_{r\theta}^{(1)} = 0, \quad \pi/2 < \theta < 3\pi/2$$

Введем в рассмотрение общее решение плоской задачи в одинарных тригонометрических рядах. С учетом симметрии задачи относительно плоскости $x=0$ и ограниченности решения в центре диска зависимости для перемещений и напряжений в рядах, обозначаемые индексом 2, примем в виде [1, 2]:

$$Eu^{(2)} = (1-\nu)A_0 r - \frac{1-3\nu}{2} A_1 r^2 \cos \theta + \sum_{n=2,3}^{\infty} u_n \cos n\theta$$

$$Ev^{(2)} = -\frac{5+\nu}{2} A_1 r^2 \sin \theta + \sum_{n=2,3}^{\infty} v_n \sin n\theta$$

$$\sigma_r^{(2)} = A_0 - A_1 r \cos \theta + \sum_{n=2,3}^{\infty} \sigma_{1n} \cos n\theta, \quad \tau_{r\theta}^{(2)} = -A_1 r \sin \theta + \sum_{n=2,3}^{\infty} \tau_n \sin n\theta$$

$$\sigma_\theta^{(2)} = A_0 - 3A_1 r \cos \theta + \sum_{n=2,3}^{\infty} \sigma_{2n} \cos n\theta \quad (3)$$

$$u_n = -\frac{1}{n+1} [2(1-\nu) - (1+\nu)n] A_{n1} r^{n+1} + \frac{1+\nu}{n-1} A_{n2} r^{n-1}$$

$$v_n = -\frac{(1+\nu)n+4}{n+1} A_{n1} r^{n+1} - \frac{1+\nu}{n-1} A_{n2} r^{n-1} \quad (4)$$

$$\tau_n = -n A_{n1} r^n - A_{n2} r^{n-2}, \quad \sigma_{1n} = (n-2) A_{n1} r^n + A_{n2} r^{n-2}$$

$$\sigma_{2n} = -(n+2) A_{n1} r^n - A_{n2} r^{n-2}$$

Произвольные постоянные A_0, A_1, A_{n1}, A_{n2} в решении (3) определим таким образом, чтобы суммарное решение оставляло контур диска свободным от нагрузок

$$\sigma_r^{(1)} + \sigma_r^{(2)} \Big|_{r=R} = 0, \quad \tau_{r\theta}^{(1)} + \tau_{r\theta}^{(2)} \Big|_{r=R} = 0 \quad (5)$$

Согласно (2):

$$\sigma_r^{(2)} \Big|_{r=R} = f_1(\theta), \quad \tau_{r\theta}^{(2)} \Big|_{r=R} = f_2(\theta) \quad (6)$$

$$f_1(\theta) = \begin{cases} \frac{E\alpha t}{2} (1 - \cos 2\theta) & -\pi/2 < \theta < \pi/2 \\ 0 & \pi/2 < \theta < 3\pi/2 \end{cases} \quad (7)$$

$$f_2(\theta) = \begin{cases} \frac{E\alpha t}{2} \sin 2\theta & -\pi/2 < \theta < \pi/2 \\ 0 & \pi/2 < \theta < 3\pi/2 \end{cases}$$

Разрывные контурные нагрузки (7) переразложим в тригонометриче-

ские ряды по всей длине контура диска

$$f_1(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta, \quad f_2(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta \quad (8)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} f_1(\theta) d\theta, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f_1(\theta) \cos n\theta d\theta$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f_2(\theta) \sin n\theta d\theta$$

интегралы вычисляются в пределах $0 < \theta < \pi/2$, поскольку при $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$ функции f_1 и f_2 обращаются в нуль. Принимая во внимание (7), в результате интегрирования получим

$$a_0 = -a_2 = b_2 = \frac{1}{4} Ect \quad (9)$$

$$a_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{2Ect}{\pi} \frac{n^2 - 2}{n(n^2 - 4)}, \quad b_n = -(-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{2Ect}{\pi} \frac{1}{n^2 - 4}$$

($n = 1, 3, 5, \dots, \infty$)

При четных значениях n , за исключением $n=2$, коэффициенты Фурье обращаются в нуль.

Внесем ряды для $\sigma_r^{(2)}$, $\tau_{r\theta}^{(2)}$ (3) при $r=R$ и f_1, f_2 (8) в граничные условия (6). С учетом ортогональности тригонометрических функций для каждого номера n получим независимые соотношения относительно постоянных, из которых найдем:

$$A_0 = -A_{22} = \frac{Ect}{4}, \quad A_1 = -\frac{2}{3} \frac{Ect}{R}, \quad A_{21} = 0, \quad (10)$$

$$A_{n1} = -(-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{Ect}{\pi R^n} \frac{n+1}{n(n+2)}, \quad A_{n2} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{Ect}{\pi R^{n-2}} \frac{n(n-1)}{n^2-4}$$

($n = 3, 5, 7, \dots, \infty$)

Далее на основании (3), (4) получим зависимости для перемещений и напряжений в форме рядов, отвечающие второму решению:

$$u = \frac{1}{2} BR \left\{ \frac{1-\nu}{2} \rho + \frac{2(1-3\nu)}{3\pi} \rho^2 \cos \theta - \frac{1+\nu}{2} \rho \cos 2\theta + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\pi} \sum_{n=3, 5, 7}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{2(1-\nu) - (1+\nu)n}{n(n+2)} \rho^{n+1} + \frac{(1+\nu)n}{n^2-4} \rho^{n-1} \right] \cos n\theta \right\}$$

$$v = \frac{1}{2} BR \left\{ \frac{2(5+\nu)}{3\pi} \rho^2 \sin \theta + \frac{1+\nu}{2} \rho \sin 2\theta + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\pi} \sum_{n=3, 5, 7}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{(1+\nu)n+4}{n(n+2)} \rho^{n+1} - \frac{(1+\nu)n}{n^2-4} \rho^{n-1} \right] \sin n\theta \right\} \quad (11)$$

$$\sigma_r = \frac{A}{2} \left\{ \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) + \frac{4}{3\pi} \rho \cos \theta + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\pi} \sum_{n=3, 5, 7}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\rho^{n-2}}{n(n^2-4)} [n^2(n-1) - (n-2)^2(n+1)\rho^2] \cos n\theta \right\}$$

$$\sigma_\theta = \frac{A}{2} \left\{ \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) + \frac{4}{\pi} \rho \cos \theta - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{\pi} \sum_{n=3, 5, 7}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\rho^{n-2}}{n(n^2-4)} [n^2(n-1) - (n^2-4)(n+1)\rho^2] \cos n\theta \} \\
& \tau_{r\theta} = \frac{A}{2} \left\{ \frac{4}{3\pi} \rho \sin \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta - \right. \\
& \left. -\frac{2}{\pi} \sum_{n=3, 5, 7}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\rho^{n-2}}{n^2-4} [n(n-1) - (n-2)(n+1)\rho^2] \sin n\theta \right\}
\end{aligned}$$

В формулах введена безразмерная координата ρ :

$$\rho = \frac{r}{R} \quad (0 \leq \rho \leq 1), \quad A = Eat, \quad B = at \quad (12)$$

Искомое распределение перемещений и напряжений находится сложением решений (2), (11). При $y < 0$ решение (2) обращается в нуль. Следовательно, формулами (11) определяется напряженно-деформированное состояние нижней части диска $y < 0$, обусловленное нагревом составного диска на постоянную температуру t . В связи с этим индекс 2 в формулах опущен. Для верхней части диска к зависимостям (11) добавляется решение (2). Эти выражения можно преобразовать к замкнутому виду, если воспользоваться формулами суммирования рядов [2, 3]:

$$F_1 = \sum_{n=1, 3, 5}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n} \rho^n \sin n\theta = \frac{1}{4} \ln \frac{1 + 2\rho \sin \theta + \rho^2}{1 - 2\rho \sin \theta + \rho^2} \quad (13)$$

$$\Phi_1 = \sum_{n=1, 3, 5}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n} \rho^n \cos n\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\rho \cos \theta}{1 - \rho^2}$$

$$\rho \frac{\partial F_1}{\partial \rho} = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} = \sum_{n=1, 3, 5}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \rho^n \sin n\theta = \frac{\rho(1 - \rho^2) \sin \theta}{\rho^4 + 2\rho^2 \cos 2\theta + 1}$$

$$\rho \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} = \frac{\partial F_1}{\partial \theta} = \sum_{n=1, 3, 5}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \rho^n \cos n\theta = \frac{\rho(1 + \rho^2) \cos \theta}{\rho^4 + 2\rho^2 \cos 2\theta + 1}$$

Во второй формуле имеется в виду главное значение обратной тригонометрической функции.

В итоге получим:

$$\begin{aligned}
u = \frac{BR}{2\pi} \left\{ \pi \rho \left[1 \pm \frac{1+\nu}{2} (1 + \cos 2\theta) \right] + \left[\frac{1+\nu}{\rho^2} - \frac{1}{3} (13+\nu) \right] \cos \theta + \right. \\
+ 2(1-\nu) \rho \Phi_1 + \left[\frac{4}{\rho} - \frac{1+\nu}{\rho^3} - (1+\nu) \rho \right] \Phi_1 \cos 2\theta + \\
\left. + \left[\frac{4}{\rho} - (1+\nu) \frac{1}{\rho^3} + (1+\nu) \rho \right] F_1 \sin 2\theta \right\} \\
v = \frac{BR}{2\pi} \left\{ \mp \frac{1+\nu}{2} \pi \rho \sin 2\theta + \left[\frac{1}{3} (7-5\nu) + \frac{1+\nu}{\rho^2} \right] \sin \theta \pm \right. \\
+ 4\rho F_1 + \left[(1+\nu) \rho + 2(1-\nu) \frac{1}{\rho} + \frac{1+\nu}{\rho^3} \right] F_1 \cos 2\theta + \\
\left. + \left[(1+\nu) \rho - 2(1-\nu) \frac{1}{\rho} - \frac{1+\nu}{\rho^3} \right] \Phi_1 \sin 2\theta \right\} \quad (14)
\end{aligned}$$

$$\sigma_r = \frac{A}{2} \left\{ \mp \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) + \frac{1}{\pi} \left[3 \frac{\rho^2 - 1}{\rho^3} \cos \theta + 2 \frac{1 - \rho^2}{\rho} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} + 2\Phi_1 + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\rho^4}(3-4\rho^2-\rho^4)\Phi_1 \cos 2\theta + \frac{1}{\rho^4}(3-4\rho^2+\rho^4)F_1 \sin 2\theta \left. \right\} \\
\sigma_\theta = & \frac{A}{2} \left\{ \mp (1+\cos 2\theta) + \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{\rho^3}(3+\rho^2)\cos \theta + \frac{2}{\rho}(\rho^2-1)\frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2\Phi_1 + \frac{1}{\rho^4}(\rho^4-3)\Phi_1 \cos 2\theta - \frac{1}{\rho^4}(3+\rho^4)F_1 \sin 2\theta \right] \right\} \\
\tau_{r\theta} = & \frac{A}{2} \left\{ \mp \frac{1}{2}\sin 2\theta + \frac{1}{\pi} \left[\frac{3}{\rho^3}(\rho^2-1)\sin \theta + \frac{2}{\rho}(\rho^2-1)\frac{\partial F_1}{\partial \rho} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{\rho^4}(-3+2\rho^2+\rho^4)F_1 \cos 2\theta + \frac{1}{\rho^4}(3-2\rho^2+\rho^4)\Phi_1 \sin 2\theta \right] \right\}
\end{aligned}$$

Здесь верхние знаки у первых слагаемых берутся для верхней половины диска, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, нижние знаки — для нижней, $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$; постоянные A, B определяются согласно (12).

Покажем, например, как получается аналитическое выражение для σ_r . Ряд в формуле для σ_r (11) представляется как сумма четырех рядов:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=3,5,7}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\rho^{n-2}}{n(n^2-4)} [n^2(n-1) - (n-2)^2(n+1)\rho^2] \cos n\theta = \\
& = \frac{1-\rho^2}{\rho^2} \sum_{n=3,5,7}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \rho^n \cos n\theta + \sum_{n=3,5,7}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\rho^n}{n} \cos n\theta + \\
& \quad + \frac{1}{2} \sum_{n=3,5,7}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\rho^{n-2}}{n-2} \cos n\theta + \\
& \quad + \frac{4\rho^2-3}{2\rho^4} \sum_{n=3,5,7}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\rho^{n+2}}{n+2} \cos n\theta
\end{aligned}$$

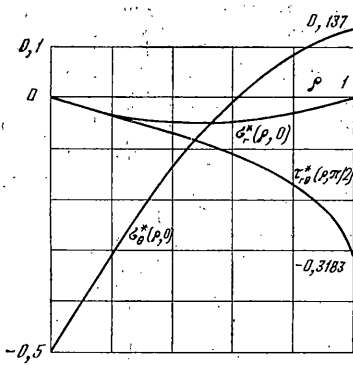
Каждый из них можно просуммировать, если воспользоваться формулами (13):

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=3,5,7}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\rho^n}{n} \cos n\theta = \Phi_1 - \rho \cos \theta, \\
& \sum_{n=3,5,7}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\rho^{n-2}}{n-2} \cos n\theta = \sum_{n=3,5,7}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\rho^{n-2}}{n-2} [\cos(n-2)\theta \cos 2\theta - \\
& \quad - \sin(n-2)\theta \sin 2\theta] = -\Phi_1 \cos 2\theta + F_1 \sin 2\theta \\
& \sum_{n=3,5,7}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\rho^{n+2}}{n+2} \cos n\theta = \sum_{n=3,5,7}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\rho^{n+2}}{n+2} [\cos(n+2)\theta \times \\
& \quad \times \cos 2\theta + \sin(n+2)\theta \sin 2\theta] = -\Phi_1 \cos 2\theta - \\
& \quad - F_1 \sin 2\theta + \rho \left(1 - \frac{\rho^2}{3} \right) \cos \theta.
\end{aligned}$$

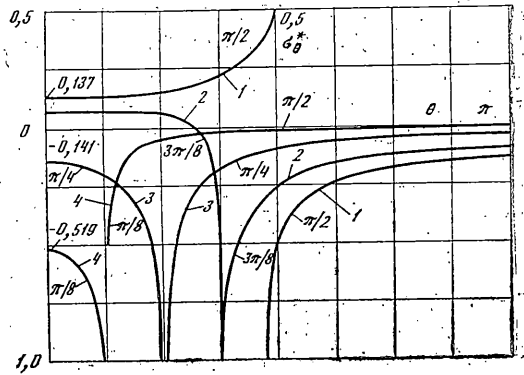
В итоге получаем искомую зависимость для σ_r (14). Аналогичным образом находятся остальные аналитические выражения (14).

Отметим, что u (14) представляет собой часть радиального перемещения, обусловленную разностью α коэффициентов линейного расширения. Фактически это относительное перемещение. Чтобы получить полное радиальное перемещение необходимо добавить слагаемое $E\alpha_2 tr$, соответствующее равномерному тепловому расширению всего диска от коэффициента линейного расширения α_2 нижней его части.

Как следовало ожидать, напряженное состояние круглого диска обрат-



Фиг. 2



Фиг. 3

но симметрично относительно горизонтального диаметра, разделяющего части нагретого составного диска. Полагая в третьей формуле (14) $\theta = \pm\pi/2$, найдем касательные напряжения по горизонтальному диаметру диска:

$$\tau_{r\theta} |_{\theta=\pi/2} = -\tau_{r\theta} |_{\theta=-\pi/2} = \frac{A}{2\pi} \left(\frac{\rho^2-3}{\rho^3} + \frac{3-2\rho^2-\rho^4}{2\rho^4} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho} \right) \quad (15)$$

Изменение этих напряжений в безразмерной форме для величины

$$\tau^* = \tau_{r\theta}/A \quad (16)$$

приведено в форме графика на фиг. 2.

Нормальные напряжения σ_θ (14) на горизонтальном диаметре $\theta = \pm\pi/2$ обращаются в нуль. Нормальные напряжения σ_r при переходе через горизонтальный диаметр терпят разрыв непрерывности на величину $A = E\alpha t$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_r |_{\pi/2-\varepsilon} = -\frac{A}{2}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_r |_{\pi/2+\varepsilon} = \frac{A}{2}$$

Нормальные напряжения σ_r и σ_θ на вертикальном диаметре диска определяются зависимостями:

$$\sigma_\theta |_{\theta=0} = -\sigma_\theta |_{\theta=\pi} = \frac{A}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{\pi\rho^3} \left[\frac{3+2\rho^2+3\rho^4}{1+\rho^2} + \frac{3(\rho^4-1)}{2\rho} \operatorname{arctg} \frac{2\rho}{1-\rho^2} \right] \right\}$$

$$\sigma_r |_{\theta=0} = -\sigma_r |_{\theta=\pi} = \frac{A}{2\pi} \frac{1-\rho^2}{\rho^3} \left(-\frac{3+\rho^2}{1+\rho^2} + \frac{3-\rho^2}{2\rho} \operatorname{arctg} \frac{2\rho}{1-\rho^2} \right)$$

На концах диаметра кольцевые напряжения принимают значения:

$$\sigma_\theta |_{\rho=0} = -\sigma_\theta |_{\rho=1} = \frac{A}{2} \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right) \quad (17)$$

Изменение напряжений σ_r и σ_θ вдоль вертикального диаметра для безразмерных коэффициентов напряжений

$$\sigma_r^* = \sigma_r/A, \quad \sigma_\theta^* = \sigma_\theta/A \quad (18)$$

представлено в форме графиков на фиг. 2.

Для кольцевых напряжений σ_θ на контуре диска $\rho=1$ согласно (14) получаем зависимость:

$$\sigma_\theta |_{\rho=1} = \frac{A}{2} \left(\frac{4}{\pi} \cos \theta \mp \cos 2\theta - \frac{1}{\pi} \sin 2\theta \ln \frac{1+\sin \theta}{1-\sin \theta} \right) \quad (19)$$

Здесь верхний знак во втором слагаемом соответствует верхней половине диска, а нижний знак — нижней. Изменение этих напряжений в безразмерной форме (18) по контуру диска ($0 < \theta < \pi$) приведено в виде графика на фиг. 3 для $\rho=1$.

Концы горизонтального диаметра диска $\rho=1$, $\theta = \pm\pi/2$ являются особыми точками для решения, поскольку напряжения в них не определяются

однозначно. В самом деле, на горизонтальном диаметре напряжения σ_r равняются нулю при любом ρ , а при стремлении к особой точке по контуру круга $\rho=1$, $\theta \rightarrow \pi/2$, ($\theta < \pi/2$) согласно (19) возрастают и стремятся к значению $A/2$. В последнем можно убедиться, если сделать соответствующий предельный переход. Аналогичным образом касательные напряжения $\tau_{r\theta}$ при стремлении к особой точке по горизонтальному диаметру $\theta=\pi/2$, $\rho \rightarrow 1$, возрастают и согласно (15) стремятся к конечному значению $-A/\pi$, на контуре же диска $\rho=1$ они равняются нулю при любом θ .

Решение (11) легко распространить на случай плоской деформации равномерно нагретого составного круглого цилиндра, склеенного из двух половин, поперечное сечение которых представляет собой полукруг. Половины диска выполнены из разных материалов, имеющих одинаковые упругие характеристики, и отличающихся между собой коэффициентами линейного расширения. В соответствии с плоской деформацией считается, что торцы цилиндра $z=0$ и $z=l$ закреплены от осевых перемещений w .

Рассуждая при определении решения таким же образом, что и ранее, придем к зависимостям для перемещений и напряжений в круглом цилиндре (14). Однако для плоской деформации круглого цилиндра постоянные A и B принимают значения $A = E\alpha t / (1-\nu)$, $B = (1+\nu)\alpha t$.

Рассмотрим теперь более общую задачу о равномерном нагреве круглого составного диска, склеенного из двух сегментов, граница между которыми соответствует произвольному центральному углу 2φ , фиг. 1. Как и ранее считаем, что материалы сегментов диска имеют одинаковые упругие характеристики и отличаются между собой лишь значениями коэффициентов линейного расширения.

Ход рассуждений при определении решения задачи остается прежним. Первое решение найдется по формулам (2), однако область его определения для верхней части диска удовлетворяет условию $r \cos \theta > R \cos \varphi$, а для нижней — условию $r \cos \theta < R \cos \varphi$.

Для контурных функций f_1 и f_2 вместо (7) получим с учетом (12) зависимости:

$$f_1(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2}A(1 - \cos 2\theta) & -\varphi < \theta < \varphi \\ 0 & \varphi < \theta < 2\pi - \varphi \end{cases}$$

$$f_2(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2}A \sin 2\theta & -\varphi < \theta < \varphi \\ 0 & \varphi < \theta < 2\pi - \varphi \end{cases}$$

Представление этих функций в форме тригонометрических рядов (8) имеет вид

$$f_1(\theta) = \frac{A}{2\pi} \left\{ \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi + \left(\sin 2\varphi - \varphi - \frac{1}{4} \sin 4\varphi \right) \cos 2\theta + \right.$$

$$+ \sum_{n=1,3,4,5}^{\infty} \left[\frac{2}{n} \sin n\varphi - \frac{\sin(n-2)\varphi}{n-2} - \frac{\sin(n+2)\varphi}{n+2} \right] \cos n\theta \left. \right\}$$

$$f_2(\theta) = \frac{A}{2\pi} \left\{ \left(\varphi - \frac{1}{4} \sin 4\varphi \right) \sin 2\theta + \right.$$

$$+ \sum_{n=1,3,4,5}^{\infty} \left[\frac{\sin(n-2)\varphi}{n-2} - \frac{\sin(n+2)\varphi}{n+2} \right] \sin n\theta \left. \right\}$$

Для постоянных в решении (4) вместо (9) найдем значения

$$A_0 = \frac{A}{2\pi} \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right), \quad A_1 = -\frac{A}{2\pi R} \left(\sin \varphi - \frac{1}{3} \sin 3\varphi \right)$$

$$A_{21} = \frac{A}{4\pi R^2} \left(\sin 2\varphi - \frac{1}{2} \sin 4\varphi \right), \quad A_{22} = \frac{A}{2\pi} \left(\sin 2\varphi - \varphi - \frac{1}{4} \sin 4\varphi \right)$$

$$A_{n1} = -\frac{A}{2\pi R^n} \left[\frac{1}{n} \sin n\varphi - \frac{\sin(n+2)\varphi}{n+2} \right]$$

$$A_{n2} = \frac{A}{2\pi R^{n-2}} \left[\sin n\varphi - \frac{1}{n-2} \sin(n-2)\varphi - \frac{n-1}{n+2} \sin(n+2)\varphi \right]$$

($n=3, 4, 5, \dots, \infty$)

С учетом этих значений на основании (4) получим искомые зависимости для перемещений и напряжений в форме одинарных тригонометрических рядов.

Зависимости для напряжений суммированием рядов представляются в замкнутом аналитическом виде.

Для нижней части диска

$$\rho \cos \theta < \cos \varphi, \quad \sigma_r = \frac{A}{2\pi} [\varphi(1 - \cos 2\theta) + \sigma_1]$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{A}{2\pi} (\varphi \sin 2\theta + \tau), \quad \sigma_\theta = \frac{A}{2\pi} [\varphi(1 + \cos 2\theta) + \sigma_2]$$

Для верхней части диска

$$\rho \cos \theta > \cos \varphi, \quad \sigma_r = \frac{A}{2\pi} [(\varphi - \pi)(1 - \cos 2\theta) + \sigma_1]$$

$$\sigma_\theta = \frac{A}{2\pi} [(\varphi - \pi)(1 + \cos 2\theta) + \sigma_2], \quad \tau_{r\theta} = \frac{A}{2\pi} [(\varphi - \pi) \sin 2\theta + \tau]$$

$$\sigma_1 = \frac{3}{2\rho^2}(\rho^2 - 1) \sin 2\varphi + \frac{3}{\rho^3}(\rho^2 - 1) \sin \varphi \cos \theta + \left(\frac{1}{\rho} - \rho \right) \frac{\partial}{\partial \rho} [(1 - \cos 2\varphi)H -$$

$$- \sin 2\varphi \Psi] + 2H - \left(1 + \frac{4}{\rho^3} - \frac{3}{\rho^4} \right) H \cos 2\theta + \left(1 - \frac{4}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4} \right) F \sin 2\theta$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} \left(-1 + \frac{3}{\rho^2} \right) \sin 2\varphi + \frac{1}{\rho^3} (3 + \rho^2) \sin \varphi \cos \theta +$$

$$+ \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial}{\partial \rho} [(1 - \cos 2\varphi)H - \Psi \sin 2\varphi] + 2H + \left(1 - \frac{3}{\rho^4} \right) H \cos 2\theta -$$

$$- \left(1 + \frac{3}{\rho^4} \right) F \sin 2\theta$$

$$\tau = \frac{3}{\rho^3}(\rho^2 - 1) \sin \varphi \sin \theta + \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial}{\partial \rho} [(1 - \cos 2\varphi)F + \Phi \sin 2\varphi] +$$

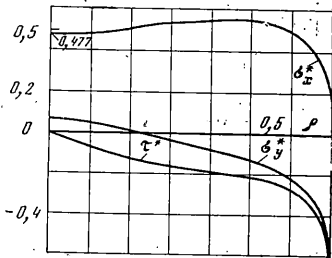
$$+ \left(1 - \frac{2}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4} \right) H \sin 2\theta + \left(1 + \frac{2}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4} \right) F \cos 2\theta$$

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{n} \sin n\varphi \sin n\theta = \frac{1}{2} (\Phi_{01} - \Phi_{02}),$$

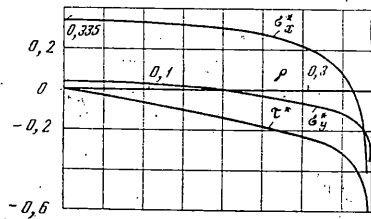
$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{n} \sin n\varphi \cos n\theta = \frac{1}{2} (F_{02} - F_{01}),$$

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{n} \cos n\varphi \sin n\theta = \frac{1}{2} (F_{02} + F_{01}),$$

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{n} \cos n\varphi \cos n\theta = \frac{1}{2} (\Phi_{01} + \Phi_{02})$$



Фиг. 4



Фиг. 5

Функции F_{01} , F_{02} , Φ_{01} и Φ_{02} определяются через функции F_0 и Φ_0 [1, 3]:

$$F_0(\rho, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rho^n \sin n\theta = \operatorname{arctg} \frac{\rho \sin \theta}{1 - \rho \cos \theta},$$

$$\Phi_0(\rho, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rho^n \cos n\theta = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2\rho \cos \theta + \rho^2),$$

по формулам $F_{01} = F_0(\rho, \theta - \varphi)$, $F_{02} = F_0(\rho, \theta + \varphi)$, $\Phi_{01} = \Phi_0(\rho, \theta - \varphi)$, $\Phi_{02} = \Phi_0(\rho, \theta + \varphi)$.

На фиг. 3 для значений $\varphi = \pi/2, 3\pi/8, \pi/4, \pi/8$ центрального угла 2φ , разделяющего сегменты составного диска, фиг. 1, приведены графики безразмерных кольцевых напряжений σ_0^* на контуре диска $\rho = 1$, построенные на основании зависимостей для σ_0 (20), (21). Для значений $\varphi = \pi/4$ (фиг. 4) и $\varphi = \pi/8$ (фиг. 5) приведены графики для нормальных и касательных напряжений в верхней части диска на линии контакта сегментов диска. Эпюры напряжений для безразмерных величин σ_x^* , σ_y^* , τ^* (16), (18) получены на основании (20), (21) и формул перехода от полярной к декартовой системе координат.

Анализ зависимостей (20), (21) показывает σ_0 напряжения на контуре диска, а также контактные напряжения σ_x , σ_y и τ_{xy} с приближением к точкам контура диска, разделяющим части диска ($\theta = \pm\varphi, \rho = 1$) в общем случае неограниченно возрастают. Здесь для них имеется логарифмическая особенность. Только в случае $\varphi = \pi/2$ (составные части диска одинаковы) напряжения в указанных особых точках решения принимают постоянные значения. Последнее видно и из приведенных графиков для напряжений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Власов В. В., Власова И. В. Расчет круглых пластин, нагруженных сосредоточенными силами и моментами, действующими в плоскости пластин // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1977. Вып. 18. С. 170–189.
2. Власов В. В., Власова И. В. Некоторые задачи расчета круглого диска на сосредоточенные нагрузки в плоскости диска // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1980. Вып. 24. С. 198–245.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.

Москва

Поступила в редакцию
20.I.1990