

УДК 539.3

© 1990 г.

**Ю. А. АНТИПОВ, Н. Х. АРУТЮНЯН**

**КРУЧЕНИЕ УПРУГОГО ШАРА  
С ДИСКООБРАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ**

Предлагается решение задачи о кручении упругого шара с дискообразной трещиной. Шар скручивается касательными окружными усилиями, приложенными вдоль противоположных параллелей. Моменты этих усилий равны по величине и противоположны по знаку. Берега трещины свободны от внешних нагрузок. Соответствующая смещенная краевая задача при помощи преобразования Лежандра сводится к интегро-дифференциальному уравнению, для решения которого построено спектральное соотношение (собственные функции характеристической части ядра уравнения — многочлены Гегенбауэра). В результате задача сведена к бесконечной алгебраической системе типа Пуанкаре — Коха, допускающей обращение при помощи рекуррентных соотношений. Получены удобные при численной реализации расчетные формулы для угловых смещений берегов трещины, а также коэффициентов интенсивности напряжений (КИН).

**1. Постановка задачи.** Пусть упругий шар  $B = \{(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$  с дисковой трещиной  $S_T = \{(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq b, \theta = \pi/2 \pm 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$  (фиг. 1) скручивается касательными окружными усилиями, приложенными вдоль параллелей  $\theta = \theta_0, \theta = \pi - \theta_0$  ( $0 < \theta_0 < \pi/2$ ). Величину крутящего момента будем обозначать через  $M$ , модуль сдвига упругого материала — через  $G$ . Требуется найти угловые смещения берегов трещины, а также КИН. Осесимметричная деформация скручиваемого шара [1] определяется угловым перемещением  $u_\varphi(r, \theta)$ . Компоненты тензора деформации и тензора напряжений определяется формулами (приводятся только ненулевые компоненты):

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{\varphi r} &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}, & 2\varepsilon_{\theta\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - \frac{\text{ctg } \theta}{r} u_\varphi \\ \tau_{\varphi r} &= G \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right), & \tau_{\theta\varphi} &= \frac{G}{r} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - \text{ctg } \theta u_\varphi \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Уравнения равновесия сводятся к одному

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} \right) - \frac{u_\varphi}{\sin^2 \theta} = 0 \quad (1.2)$$

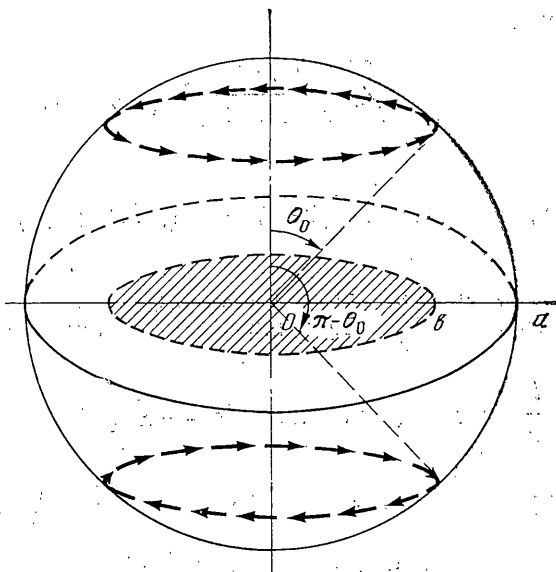
В силу симметрии задачи относительно плоскости  $\theta = \pi/2$  ограничимся рассмотрением верхнего полушара. Сформулируем граничные условия в экваториальном сечении шара. Точки экваториального сечения  $b \leq r \leq a, \theta = \pi/2$  не перемещаются в окружном направлении и следовательно

$$u_\varphi(r, \theta) |_{\theta = \pi/2} = 0 \quad (b \leq r \leq a) \quad (1.3)$$

На берегах трещины окружные перемещения отличны от нуля, равны по величине и противоположны по знаку. Обозначим

$$u_\varphi(r, \theta) |_{\theta = \pi/2 - 0} = -u_\varphi(r, \theta) |_{\theta = \pi/2 + 0} = \chi(r) \quad (0 \leq r \leq b) \quad (1.4)$$

Так как берега трещины свободны от поверхностных нагрузок, то  $\tau_{\theta\varphi}(r, \theta) = 0$  при  $0 \leq r < b, \theta = \pi/2$ .



Фиг. 1

Используя формулы (1.1), это условие представим в виде

$$\frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \theta}(r, \theta) \Big|_{\theta=\pi/2} = 0 \quad (0 \leq r < b) \quad (1.5)$$

Поверхность полусферы  $r=a$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  также свободна от нагрузок за исключением параллели  $\theta=\theta_0$ . Поэтому имеем следующее граничное условие на поверхности полусферы

$$\tau_{r\varphi}(r, \theta) \Big|_{r=a} = (2\pi a^3 \sin^2 \theta_0)^{-1} M \delta(\theta - \theta_0) \quad (0 \leq \theta \leq \pi/2)$$

где  $\delta(\xi)$  — дельта-функция Дирака. При помощи формул (1.1) представим последнее граничное условие в виде

$$\left[ \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial r}(r, \theta) - \frac{u_{\varphi}(r, \theta)}{r} \right] \Big|_{r=a} = \frac{M_0 \delta(\theta - \theta_0)}{\sin \theta_0} \quad (0 \leq \theta \leq \pi/2) \quad (1.6)$$

$$M_0 = (2\pi G a^3 \sin \theta_0)^{-1} M$$

Таким образом, в области  $0 < r < a$ ,  $0 < \theta < \pi/2$  необходимо найти решение  $u_{\varphi}(r, \theta)$  дифференциального уравнения (1.2), удовлетворяющее граничным условиям (1.3), (1.5), (1.6). Симметрия задачи позволяет заключить также, что  $u_{\varphi}(r, \theta) \Big|_{\theta=0} = 0$  ( $0 \leq r \leq a$ );  $u_{\varphi}(r, \theta) \Big|_{r=+0} = 0$  ( $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ).

**2. Приведение к интегро-дифференциальному уравнению.** Для удобства введем новую независимую переменную  $t = \cos \theta$  и обозначим  $u(r, t) = u_{\varphi}(r, \arccos t)$ . Уравнение (1.2) и граничные условия (1.3)–(1.6) примут вид

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left[ (1-t^2) \frac{\partial u}{\partial t} \right] - \frac{u}{1-t^2} = 0 \quad (0 \leq r < a, 0 < t < 1) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad (0 \leq r < b), \quad u \Big|_{t=0} = \chi(r) \quad (0 \leq r \leq a) \quad (2.2)$$

$$\chi(r) = 0 \quad (b \leq r \leq a)$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) \Big|_{r=a} = M_0 \delta(t - t_0) \quad (0 \leq t \leq 1), \quad t_0 = \cos \theta_0 \quad (2.3)$$

$$u \Big|_{t=1} = 0 \quad (0 \leq r \leq a), \quad u \Big|_{r=+0} = 0 \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (2.4)$$

Так как  $u_{\varphi}(r, \theta) \in C^2(B \setminus Cr)$ ,  $u_{\varphi}(r, \theta) = -u_{\varphi}(r, \pi - \theta)$ , то в области  $\{0 \leq r < a, 0 \leq t \leq 1\}$  функция  $u(r, t)$  допускает разложение в абсолютно и рав-

номерно сходящийся ряд

$$u(r, t) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4m+1}{m(2m+1)} P_{2m}^{(1)}(t) u_m(r) \quad (2.5)$$

$$u_m(r) = \int_0^1 u(r, \tau) P_{2m}^{(1)}(\tau) d\tau \quad (m=1, 2, \dots) \quad (2.6)$$

где  $P_k^{(1)}(t)$  — присоединенные функции Лежандра первого рода. Применим интегральное преобразование Лежандра (2.6) к краевой задаче (2.1)–(2.4); имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} u_m(r) \right) - (2m+1) 2m u_m(r) &= -\lambda_m \chi(r), \quad 0 \leq r < a \\ \left( \frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \right) u_m(r) \Big|_{r=a} &= M_0 P_{2m}^{(1)}(t_0), \quad u_m(+0) = 0 \\ \lambda_m = \frac{d}{dt} P_{2m}^{(1)}(t) \Big|_{t=0} &= \frac{4(-1)^m \Gamma(m+3/2)}{\pi^{1/2} (m-1)!} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Решение одномерной краевой задачи (2.7) при помощи функции Грина

$$\begin{aligned} G(r, \rho) &= -\frac{1}{4m+1} \left[ \frac{1}{\rho} g_0 \left( \frac{r}{\rho} \right) + \frac{1}{a} g_1 \left( \frac{r\rho}{a^2} \right) \right] \\ g_0(\xi) &= \begin{cases} \xi^{2m}, & \xi < 1 \\ \xi^{-2m-1}, & \xi > 1 \end{cases}, \quad g_1(\xi) = \frac{2(m+1)}{2m-1} \xi^{2m} \end{aligned}$$

запишется в виде

$$\begin{aligned} u_m(r) &= \frac{\lambda_m}{(4m+1)2m(2m+1)} \left\{ \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} \int_0^b \left[ \frac{1}{\rho} g_0 \left( \frac{r}{\rho} \right) + \frac{1}{a} g_1 \left( \frac{r\rho}{a^2} \right) \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \chi(\rho) d\rho + (4m+1) \chi(\rho) \right\} + a M_0 (2m-1)^{-1} P_{2m}^{(1)}(t_0) (r/a)^{2m} \end{aligned}$$

На основании формулы обратного преобразования (2.5) имеем

$$\begin{aligned} u(r, t) &= \chi(r) v(t) + \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \int_0^b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m P_{2m}^{(1)}(t)}{4m^2(2m+1)^2} \times \\ &\quad \times \left[ \frac{1}{\rho} g \left( \frac{r}{\rho} \right) + \frac{1}{a} g_1 \left( \frac{r\rho}{a^2} \right) \right] \chi(\rho) d\rho + \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$+ a M_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(4m+1) P_{2m}^{(1)}(t) P_{2m}^{(1)}(t_0)}{2m(2m+1)(2m-1)} \left( \frac{r}{a} \right)^{2m} \quad (2.9)$$

$$v(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(4m+1) P_{2m}^{(1)}(t)}{2m(2m+1)} v_m, \quad v_m = \frac{(-1)^m \Gamma(m+1/2)}{\pi^{1/2} m!}$$

Для удовлетворения первому условию из (2.2) необходимо вычислить  $v'(0)$ . Преобразуем выражение для  $v(t)$ . Принимая во внимание формулу 7.132(5) из [2], имеем

$$v_m = \int_0^1 (1-x^2)^{1/2} P_{2m}^{(1)}(x) dx - \frac{(-1)^m \Gamma(m-1/2)}{2\pi^{1/2} (m+1)!}$$

Подставляя последнее выражение в первое равенство из (2.9) и учитывая формулы (2.5) и (2.6), получим

$$v(t) = (1-t^2)^{1/2} - \frac{1}{2\pi^{1/2}} \sum_{m=1}^{\infty} v_m^{\circ} P_{2m}^{(1)}(t) \quad (2.10)$$

$$v_m^{\circ} = (2m+1/2) (-1)^m \Gamma(m-1/2) [m(2m+1)(m+1)!]^{-1}$$

$$|v_m^{\circ} P_{2m}^{(1)}(t)| \leq \text{const } m^{-3}, \quad m \rightarrow \infty, \quad 0 \leq t \leq 1$$

Переходя к пределу при  $t \rightarrow 0$  в равенствах (2.10), (2.8), находим  $v(0) = 1$ , и  $u(r, 0) = \chi(r)$  ( $P_{2m}^{(1)}(0) = 0$ , и ряды в (2.10), (2.8) сходятся равномерно), что согласуется со второй формулой в (2.2). Дифференцируя по  $t$  выражение (2.10), получаем на основании формулы 9.122(1) из [2]  $v'(0) = -1$ . Таким образом

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(r, 0) = & -\chi(r) + \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} \int_0^b \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{(1/2)_m}{m!} \right]^2 g_0 \left( \frac{r}{\rho} \right) \times \\ & \times \chi(\rho) \frac{d\rho}{\rho} + \frac{1}{a} \int_0^b V \left( \frac{r\rho}{a^2} \right) \chi(\rho) d\rho + h(r) \end{aligned} \quad (2.11)$$

$(a)_m$  — факториальный символ

$$V(\xi) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma(m-1/2) \Gamma(m+3/2)}{(m-1)! m!} (m+1) \xi^{2m}$$

$$h(r) = \frac{aM_0}{2\pi^{1/2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (4m+1) \Gamma(m-1/2)}{m!} P_{2m}^{(1)}(t_0) \left( \frac{r}{a} \right)^{2m} \quad (2.12)$$

Выражая ряд в первом интеграле в (2.11) через гипергеометрическую функцию Гаусса, а затем учитывая формулу 6.574(1) из [2], получаем окончательно

$$\frac{\partial u}{\partial t}(r, 0) = \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} \int_0^b W_{00}^0(r, \rho) \chi(\rho) d\rho + \frac{1}{a} \int_0^b V \left( \frac{r\rho}{a^2} \right) \chi(\rho) d\rho + h(r) \quad (2.13)$$

$$W_{\nu\mu}^{\lambda}(r, \rho) = \int_0^{\infty} t^{\lambda} J_{\nu}(rt) J_{\mu}(\rho t) dt$$

ядро Вебера — Сонина. Реализация первого условия в (2.2) и замена переменных  $r = b\xi$ ,  $\rho = b\eta$  приводит к следующему интегродифференциальному уравнению

$$\frac{d}{d\xi} \xi^2 \frac{d}{d\xi} \int_0^1 W_{00}^0(\xi, \eta) \chi(b\eta) d\eta + \lambda \int_0^1 V(\lambda^2 \xi \eta) \chi(b\eta) d\eta = -h(b\xi)$$

$$(0 \leq \xi < 1), \quad \lambda = b/a \quad (2.14)$$

**3. Спектральное соотношение.** Решение уравнения (2.14) будем строить методом ортогональных многочленов. Для вывода спектрального соотношения, следуя [3], рассмотрим следующий интеграл

$$I(\xi) = \frac{d}{d\xi} \xi^2 \frac{d}{d\xi} \int_0^1 W_{00}^0(\xi, \eta) q_n^{\alpha, \beta}(\eta^2) \eta^{1-2\sigma} d\eta \quad (3.1)$$

$$(0 \leq \xi < 1), \quad q_n^{\alpha, \beta}(\eta) = \eta^\alpha (1-\eta)^\beta P_n^{\alpha, \beta}(1-2\eta)$$

где  $P_n^{\alpha, \beta}(x)$  — многочлены Якоби. Параметры  $\alpha, \beta, \sigma$  принимают значения, при которых интеграл (3.1) имеет смысл. При помощи теоремы о свертке Меллина преобразуем (3.1) к виду

$$I(\xi) = \frac{\kappa_n}{2} \frac{d}{d\xi} \xi^2 \frac{d}{d\xi} \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty} \frac{\Gamma(z) \Gamma(1/2-z) \Gamma(1/2+z+\alpha-\sigma)}{\Gamma(1-z) \Gamma(1/2+z) \Gamma(1/2-z+\sigma)} \times \\ \times \Gamma(1/2-z+\sigma+n) [\Gamma(z+\beta-\sigma+\alpha+n+3/2) \xi^{2z}]^{-1} dz \\ \kappa_n = (n!)^{-1} \Gamma(\beta+n+1), \quad \max(0, \sigma-\alpha-1/2) < \kappa < 1/2$$

Раскладывая последний интеграл в ряд по вычетам в точках  $z = -j$  ( $j=0, 1, \dots$ ), полагая  $\alpha = \sigma$  и внося дифференциальный оператор под знак суммы, получаем

$$I(\xi) = \kappa_n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j (2j+1) \Gamma(j+1/2) \Gamma(j+\sigma+1/2+n) \xi^{2j}}{(j-1)! j! \Gamma(j+1/2+\sigma) \Gamma(\beta-j+n+3/2)}$$

Положим теперь  $\sigma=1, \beta=1/2+m$  ( $m$  — целое) и выразим функцию  $I(\xi)$  через гипергеометрическую функцию Гаусса

$$I(\xi) = -\frac{2\Gamma(n+m+3/2) \Gamma(n+5/2) \xi^2}{n!(n+m)!} F\left(-m-n, n+\frac{5}{2}; 2; \xi^2\right)$$

Сопоставляя последнее равенство с (3.1) и учитывая связь многочленов Якоби с функцией Гаусса, приходим к следующему спектральному соотношению

$$\frac{d}{d\xi} \xi^2 \frac{d}{d\xi} \int_0^1 W_{00}^0(\xi, \eta) \eta (1-\eta^2)^{m+1/2} P_n^{1, m+1/2}(1-2\eta^2) d\eta = \\ = -2[n!(n+m+1)!]^{-1} \Gamma(n+m+3/2) \Gamma(n+5/2) \xi^2 P_{n+m}^{1, 1/2-m}(1-2\xi^2) \\ (0 \leq \xi < 1, m=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (3.2)$$

При  $m=-2, -3, \dots$  интеграл в (3.2) понимается в регуляризованном (обобщенном) смысле [4].

Если положить в (3.2)  $m=0$  и воспользоваться связью многочленов Якоби с многочленами Гегенбауэра  $P_n^{1, 1/2}(1-2\eta^2) = -(2n+3)^{-1} (1-\eta^2)^{-1/2} \times \times C_{2n+1}^{3/2}((1-\eta^2)^{1/2})$ , то приходим к спектральному соотношению

$$\frac{d}{d\xi} \xi^2 \frac{d}{d\xi} \int_0^1 W_{00}^0(\xi, \eta) C_{2n+1}^{3/2}((1-\eta^2)^{1/2}) \eta d\eta = \\ = -\sigma_n \xi^2 (1-\xi^2)^{-1/2} C_{2n+1}^{3/2}((1-\xi^2)^{1/2}) \quad (0 \leq \xi < 1) \quad (3.3) \\ \sigma_n = 2\Gamma(n+3/2) \Gamma(n+5/2) [n!(n+1)!]^{-1}$$

**4. Решение интегро-дифференциального уравнения.** Учитывая, что  $\chi(b\eta) = O((1-\eta)^{1/2})$ ,  $\eta \rightarrow 1-0$  и вследствие (2.4)  $\chi(b\eta) \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0$ , на основании спектрального соотношения (3.3) решение уравнения (2.14) ищем в виде

$$\chi(b\eta) = M_* \eta \sum_{k=0}^{\infty} X_k C_{2k+1}^{3/2}((1-\eta^2)^{1/2}) \quad (4.1)$$

где  $M_* = aM_0(2\pi^{1/2})^{-1}$ ,  $X_k$  — неизвестные коэффициенты. Подставляя (4.1)

в уравнение (2.14) и используя соотношение ортогональности

$$\int_0^1 C_{2k+1}^{\frac{1}{2}}((1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}) C_{2n+1}^{\frac{1}{2}}((1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}) \frac{\xi^3 d\xi}{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(n+1)(2n+3)}{2n+5/2} \delta_{nk}$$

приходим к бесконечной алгебраической системе типа Пуанкаре — Коха

$$X_n = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}(\lambda) X_k + b_n(\lambda) \quad (n=0, 1, \dots) \quad (4.2)$$

$$a_{nk}(\lambda) = \frac{1}{\rho_n} \int_0^1 \int_0^1 V(\lambda^2 \xi \eta) \eta \xi C_{2k+1}^{\frac{1}{2}}((1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}) C_{2n+1}^{\frac{1}{2}}((1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}) d\eta d\xi$$

$$b_n(\lambda) = \frac{1}{\rho_n M_*} \int_0^1 h(b\xi) \xi C_{2n+1}^{\frac{1}{2}}((1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}) d\xi$$

$$\rho_n = 4(2n+5/2)^{-1} [\Gamma(n+5/2)(n!)^{-1}]^2 \quad (4.3)$$

Подставим в (4.3) выражения (2.12) и при помощи формулы 7.391 (4) из [2] коэффициенты  $a_{nk}(\lambda)$ ,  $b_n(\lambda)$  преобразуем к виду

$$a_{nk}(\lambda) = \lambda^{4v+4} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nkm} \lambda^{4m}, \quad v = \max(n, k); \quad b_n(\lambda) = \lambda^{2n+2} \sum_{m=0}^{\infty} B_{nm} \lambda^{2m} \quad (4.4)$$

$$A_{nkm} = \frac{(-1)^{n+k} n! (2n+5/2) \Gamma(k+5/2) \Gamma(m+v+1/2) \Gamma(m+v+5/2)}{\pi k! \Gamma(n+5/2) \Gamma(m+1+v-n) \Gamma(m+1+v-k)} \times$$

$$\times \Gamma(m+v+1) \Gamma(m+v+3) [\Gamma(m+v+n+7/2) \Gamma(m+v+k+7/2)]^{-1}$$

$$B_{nm} = - \frac{n! (2n+5/2) (-1)^m \Gamma(m+n+1/2) (m+n)! P_{2(m+n+1)}^{(1)}(t_0)}{\Gamma(n+5/2) m! \Gamma(m+2n+7/2) (m+n+5/4)^{-1}} \quad (4.5)$$

Система уравнений (4.2) может быть решена не только методом редукции, но и следующим образом. Разложим искомые коэффициенты  $X_n$  в ряд по степеням  $\lambda$  ( $0 < \lambda < 1$ ):

$$X_n = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_{nm} \lambda^{m+2} \quad (4.6)$$

и подставим это разложение вместе с (4.4) в систему (4.2):

$$\sum_{m=0}^{\infty} \Phi_{nm} \lambda^m = \lambda^5 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{4v} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nkm} \lambda^{4m} \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{kj} \lambda^j + \lambda^{2n} \sum_{m=0}^{\infty} B_{nm} \lambda^{2m}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\lambda$ , приходим к следующим рекуррентным соотношениям

$$\Phi_{n,4k+s} = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1-\mu} A_{nij} \Phi_{i,4(k-j-\mu)+s-5} - \delta_s B_{n,2k-n+s/2} \quad (4.7)$$

$$\mu = \max(n, i), \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad k=0, 1, 2, \dots, \quad s=1, 2, 3, 4$$

$$B_{nm} = 0 \quad (m=-1, -2, \dots), \quad \Phi_{n0} = B_{00} \delta_{n0} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

$$\delta_1 = \delta_3 = 0, \quad \delta_2 = \delta_4 = 1$$

$\Phi_{nm}$  — символ Кронекера. Если в суммах (4.7) верхний индекс суммирования меньше нуля, то считаем эти суммы равными нулю.

Подстановка соотношений (4.7) в выражения (4.6) приводит к сле-

дующему асимптотическому разложению для  $X_n$ :

$$X_n = \sum_{i=0}^5 B_{n,i-n} \lambda^{2+2i} + A_{000} (B_{00} + \lambda^2 B_{01}) \delta_{n0} \lambda^7 + [(A_{000} B_{02} + A_{001} B_{00}) \delta_{n0} + A_{100} B_{00} \delta_{n1}] \lambda^{11} + A_{000}^2 B_{00} \delta_{n0} \lambda^{12} + O(\lambda^{13}) \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (4.8)$$

удобному при численной реализации. Отсюда, в частности, получаем  $X_n = O(\lambda^{12})$ ,  $\lambda \rightarrow 0$  ( $n=6, 7, \dots$ ).

**5. Коэффициент интенсивности напряжений.** Введем коэффициент интенсивности касательных напряжений  $\tau_{\theta\varphi}$  у берегов трещины

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow b+0} [2\pi(r-b)]^{1/2} \tau_{\theta\varphi} |_{\theta=\pi/2}$$

Учитывая связь (1.1),  $u_{\varphi}(r, \theta) = u(r, \cos \theta)$ , а также формулу (2.13), получаем

$$K_{III} = -G \left( \frac{2\pi}{b} \right)^{1/2} \lim_{\xi \rightarrow 1+0} (\xi-1)^{1/2} \frac{d}{d\xi} \xi^2 \frac{d}{d\xi} \int_0^1 W_{00}^0(\xi, \eta) \chi(b\eta) d\eta \quad (5.1)$$

Примем во внимание тождество  $d/d\xi W_{00}^0(\xi, \eta) = -W_{10}^1(\xi, \eta)$  и формулу 6.574(1) из [2]. Тогда

$$\begin{aligned} -\xi^2 \frac{d}{d\xi} \int_0^1 W_{00}^0(\xi, \eta) \chi(b\eta) d\eta &= \int_0^{\xi} F\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}; 1; \frac{\eta^2}{\xi^2}\right) \chi(b\eta) d\eta - \\ &- \frac{1}{2} \int_{\xi}^1 \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^3 F\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 2; \frac{\xi^2}{\eta^2}\right) \chi(b\eta) d\eta \end{aligned} \quad (5.2)$$

Выделим сингулярную часть функции  $F(3/2, 1/2; 1; x)$ . Для этого воспользуемся формулой 9.131(2) из [2]:

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; 1; x\right) &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2\pi} \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{1}{\mu} \left[ F\left(\frac{1}{2} + \mu, \frac{3}{2}; 2 + \mu; 1-x\right) - \right. \\ &- \left. \frac{2\Gamma(2+\mu)}{\pi^{1/2} \Gamma(1/2+\mu)} (1-x)^{-1-\mu} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Gamma(-1/2-\mu+j) \Gamma(-1/2+j)}{\Gamma(j-\mu) j!} (1-x)^j \right] = \\ &= 2[\pi(1-x)]^{-1} - (2\pi)^{-1} F_*\left(1/2, 3/2; 2; 1-x\right) \end{aligned}$$

$$F_*(a, b; c; x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j (b)_j}{(c)_j j!} x^j [\psi(a+j) + \psi(b+j) - \psi(c+j) - \psi(1+j) + \ln x]$$

Аналогично приходим к представлению

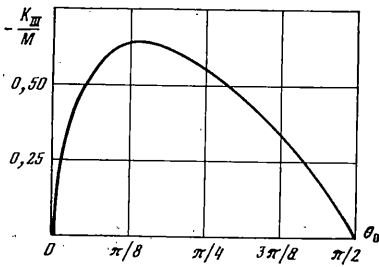
$$F_*\left(3/2, 3/2; 2; x\right) = 4[\pi(1-x)]^{-1} + \pi^{-1} F_*\left(3/2, 3/2; 2; 1-x\right)$$

Если подставить полученное выражение в (5.2), то на основании (5.1) имеем

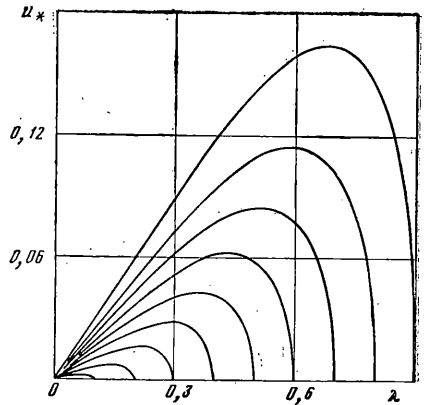
$$K_{III} = \frac{2}{\pi} \left( \frac{2\pi}{b} \right)^{1/2} G \lim_{\xi \rightarrow 1+0} (\xi-1)^{1/2} \frac{d}{d\xi} \int_0^1 \frac{\chi(b\eta) \eta^2 d\eta}{\xi^2 - \eta^2} \quad (5.3)$$

Учитывая, что вследствие формулы В2.2 из [3] справедливо соотношение

$$\lim_{\xi \rightarrow 1+0} (\xi-1)^{1/2} \frac{d}{d\xi} \int_0^1 \frac{C_{2k+1}^{3/2} ((1-\eta^2)^{1/2})}{\xi^2 - \eta^2} \eta^3 d\eta = \frac{(2\pi)^{1/2} (-1)^{k+1}}{k!} \Gamma\left(k + \frac{5}{2}\right)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

после подстановки разложения (4.1) в (5.3) имеем окончательную следующую расчетную формулу для КИН

$$K_{III} = \frac{M}{\pi (\pi\lambda)^{1/2} a^{3/2} \sin \theta_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \Gamma(k+5/2)}{k!} X_k$$

Угловые смещения берегов трещины на основании (1.4) и (4.1) представляются в виде

$$u_{\varphi} \left( r, \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{M r}{4\pi^{1/2} G a^3 \lambda \sin \theta_0} \sum_{k=0}^{\infty} X_k C_{2k+1}^{1/2} \left( \left( 1 - \frac{r^2}{b^2} \right)^{1/2} \right)$$

Коэффициенты  $X_k$  определяются формулами (4.6), (4.7), а входящие в них коэффициенты  $A_{nkm}$ ,  $B_{nm}$  — формулами (4.5).

6. Численная реализация. Обозначим  $K^{\circ} = -K_{III}/M$ . На фиг. 2 изображен график зависимости величины  $K^{\circ}$  от угла  $\theta_0$  при  $\lambda=0,5$ . Ниже представлены значения  $K^{\circ}$  для различных радиусов трещины при  $\theta_0=\pi/4$  (вторая строка) и  $\theta_0=\pi/8$  (третья строка):

$\lambda$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$K^{\circ}$	0,050	0,142	0,259	0,397	0,553	0,729	0,936	1,213	1,726
$K^{\circ}$	0,065	0,181	0,322	0,475	0,633	0,795	0,970	1,197	1,630

На фиг. 3 показана зависимость угловых смещений  $u_{\varphi}(r, \pi/2-0)$  (на графике  $u_* = M^{-1} G u_{\varphi}(r, \pi/2-0)$ ) верхнего берега разреза от величины  $r$  ( $0 \leq r \leq \lambda$ ) для случаев  $\lambda = i/10$  ( $i=1, 2, \dots, 9$ ) при  $\theta_0 = \pi/4$ .

Заметим, что задача о кручении упругого полого шара усилиями, приложенными к поверхностям разрезов, с помощью другого подхода рассматривалась в [5].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 686 с.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов сумм, рядов и производений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
3. Пислов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
4. Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958. 439 с.
5. Златкин А. Н., Лавров Н. А. Кручение упругого полого шара, ослабленного кольцевыми надрезами // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 4. С. 68-72.

Одесса, Москва

Поступила в редакцию  
28.X.1989