

УДК 531.39

© 1990 г.

Д. М. КЛИМОВ, А. П. МАРКЕЕВ

ПЛОСКИЕ ДВИЖЕНИЯ УПРУГОВЯЗКОГО КОЛЬЦА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Исследуется динамика тела, представляющего собой тонкое упруговязкое нерастяжимое однородное круговое кольцо, в одной точке которого жестко прикреплена материальная точка малой массы. Дан анализ движения кольца на круговой орбите, рассмотрены колебания на орбите малого эксцентриситета, а также резонансные и нерезонансные вращения кольца на орбите произвольного эксцентриситета.

1. Введение. В последние годы возрос интерес к большим упругим системам, движущимся в гравитационном поле (обширная библиография приведена в [1–4]). Изучается движение системы в целом с учетом деформаций ее отдельных элементов. Область приложений этих исследований связана, например, с задачами эволюции движения планет, с динамикой крупногабаритных конструкций [4–5].

Теоретическое исследование движения больших упругих систем представляет собой весьма сложную задачу. Поэтому представляет большой интерес решение отдельных модельных задач, позволяющих понять характерные закономерности движения и более сложных тел и конструкций.

В данной работе исследуется динамика тела, представляющего собой тонкое упругое нерастяжимое однородное круговое кольцо, в одной точке которого жестко прикрепена материальная точка малой массы.

Предполагается, что движение кольца происходит в центральном ньютоновском гравитационном поле при обычном [5] допущении о независимости движения центра масс тела от его движения относительно центра масс. Рассматриваются случаи круговой и эллиптической орбит центра масс. Исследование проводится в рамках линейной теории упругости. Диссипативные силы, возникающие при относительных смещениях элементов кольца, выбираются в виде сил вязкого трения, соответствующих принятой в [6] модели диссипации энергии деформируемых тел.

Одним из основных допущений является предположение о том, что время затухания собственных упругих колебаний кольца много меньше характерного времени движения кольца как целого. Это позволяет сосредоточить основное внимание на учете вынужденных колебаний элементов кольца. Движение кольца, устанавливающееся после затухания собственных упругих колебаний, назовем квазистатическим или долгопериодическим движением.

В принятых предположениях выписано приближенное уравнение плоских долгопериодических движений неоднородного кольца. Это уравнение затем использовано для анализа движения кольца на круговой орбите, колебаний на орбите малого эксцентриситета, резонансных и нерезонансных вращений кольца на орбите произвольного эксцентриситета.

Эволюция быстровращающегося однородного кольца на круговой орбите исследована ранее¹⁾. Задача о существовании и устойчивости положений равновесия кольца с точечной массой в орбитальной системе координат на

¹ См. Сидоренко В. В. Эволюция быстрых вращений упругого кольца в гравитационном поле: Препринт № 93. М.: ИПМ АН СССР, 1987.

круговой орбите исследовалась в [7]²⁾. Устойчивость орбитального кольца, образованного упругой нерастяжимой нитью, рассмотрена в [8, 9]. Устойчивость движения жесткого кольца с одной неподвижной точкой в гравитационном поле исследована в [10].

2. Об уравнениях движения упруго-вязкого тела и методе их исследования. Пусть $Ox_1x_2x_3$ — орбитальная система координат. Ее ось Ox_3 направлена вдоль радиус-вектора центра масс O тела относительно притягивающего центра, а оси Ox_2 и Ox_1 направлены соответственно по бинормали к орбите и по трансверсали в сторону движения центра масс. Для описания движения тела как целого и отсчета упругих деформаций введем связанную с телом (и «плавающую» в нем [11]) систему координат $Ox_1x_2x_3$; в качестве этой системы координат примем так называемую «среднюю» систему координат, которая характеризуется тем, что в каждый момент времени справедливы равенства

$$\int \mathbf{u} dm = 0, \quad \int \rho \times \mathbf{u} dm = 0 \quad (2.1)$$

где \mathbf{u} — упругое смещение элемента тела dm , положение которого в недеформированном состоянии тела определяется радиус-вектором $\rho = (x_1, x_2, x_3)$. Интегрирование в (2.1) производится по объему недеформированного тела. Будем считать, что при отсутствии упругих деформаций оси средней системы координат направлены вдоль главных центральных осей инерции тела.

Первое из условий (2.1) всегда выполнено, если O — центр масс деформированного тела. В средней системе координат отсутствуют смещения тела как абсолютно твердого [4, 11, 12].

Ориентацию средней системы координат относительно орбитальной можно задать, например, при помощи углов Эйлера, которые вводятся обычным образом.

Положение произвольной точки деформированного тела определяется ее радиус-вектором \mathbf{r} относительно точки O . При этом

$$\mathbf{r} = \rho + \mathbf{u}(\rho, t) \quad (2.2)$$

Далее будет применяться метод модального анализа [4, 13], в котором используется разложение упругого смещения \mathbf{u} в ряд по собственным формам $\mathbf{U}^{(n)} = (U_1^{(n)}, U_2^{(n)}, U_3^{(n)})$ свободных колебаний упругого тела

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \mathbf{U}^{(n)}(\rho)$$

Собственные формы $\mathbf{U}^{(n)}$ удовлетворяют условию ортонормированности $\int \mathbf{U}^{(n)} \cdot \mathbf{U}^{(h)} dm = \delta_{nh}$, где δ_{nh} — символ Кронекера.

Зависимость от времени обобщенных (нормальных) координат q_n , соответствующих формам $\mathbf{U}^{(n)}$, подлежит определению; для свободных упругих колебаний функции $q_n(t)$ удовлетворяют уравнениям гармонических колебаний, частоты которых ω_n являются частотами свободных колебаний упругого тела.

Потенциальная и кинетическая энергии упругих деформаций запишутся в виде

$$П = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 q_n^2, \quad T = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n^2$$

Точкой здесь и далее обозначается дифференцирование по времени.

Диссипативную функцию, отвечающую внутренней вязкости тела, за-

² См. Сидоренко В. В. Исследование устойчивости стационарных движений упругого кольца в плоскости круговой орбиты: Препринт № 108. М.: ИПМ АН СССР, 1986.

пишем в виде [6]:

$$R = \chi b \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 q_n^2$$

где b — положительная постоянная, а χ — безразмерный параметр.

Пусть ω — вектор абсолютной угловой скорости трехгранника $Ox_1x_2x_3$, а γ — единичный вектор, направленный вдоль радиус-вектора центра масс тела относительно притягивающего центра. В средней системе координат $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$.

3. Уравнения движения упругого тела (с внутренней вязкостью) в центральном ньютоновском гравитационном поле сил. Эти уравнения могут быть записаны в виде [13]:

$$(d/dt)(J\omega) + \omega \times J\omega = 3\omega_*^2 \gamma \times J\gamma \quad (3.1)$$

$$q_n'' + 2\chi b \omega_n^2 q_n' + \omega_n^2 q_n = Q_n + F_n \quad (n=1, 2, \dots) \quad (3.2)$$

$$J = J_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q_n J^{(n)}$$

$$J_0 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix}, \quad J^{(n)} = \begin{pmatrix} H_{22}^{(n)} + H_{33}^{(n)} & -H_{12}^{(n)} & -H_{13}^{(n)} \\ -H_{12}^{(n)} & H_{33}^{(n)} + H_{11}^{(n)} & -H_{23}^{(n)} \\ -H_{13}^{(n)} & -H_{23}^{(n)} & H_{11}^{(n)} + H_{22}^{(n)} \end{pmatrix} \quad (n=1, 2, \dots)$$

где A_i — момент инерции недеформированного тела относительно оси Ox_i ($i=1, 2, 3$), а $H_{ij}^{(n)} = \int x_i U_j^{(n)} dm$ ($i, j=1, 2, 3; n=1, 2, \dots$) (в силу второго

из равенств (2.4) выполняются равенства $H_{ij}^{(n)} = H_{ji}^{(n)}$):

$$\omega_*^2 = \omega_0^2 (1 + e \cos v)^3 / (1 - e^2)^3 \quad (3.3)$$

$$Q_n = \omega \cdot J^{(n)} \omega - 3\omega_*^2 \gamma \cdot J^{(n)} \gamma + 2\omega_*^2 (H_{11}^{(n)} + H_{22}^{(n)} + H_{33}^{(n)})$$

ω_0 — среднее движение центра масс по орбите, e — эксцентриситет орбиты, v — истинная аномалия. В (3.2) F_n — функции второй степени от r_i и линейные от r_i ($i=1, 2, 3$); явный вид функций F_n в дальнейшем не требуется.

Уравнения (3.1), (3.2) замыкаются кинематическими уравнениями Эйлера и дифференциальным уравнением

$$\dot{v} = \omega_0 (1 + e \cos v)^2 / (1 - e^2)^{3/2} \quad (3.4)$$

описывающим зависимость истинной аномалии от времени.

Для анализа дифференциальных уравнений движения (3.1), (3.2) используем асимптотические методы в форме, предложенной в [14]. Введем три характерных масштаба времени: τ_1 — наибольший период свободных колебаний упругого тела, τ_2 — характерное время затухания этих колебаний и τ_3 — характерное время движения тела как целого. Главное предположение, лежащее в основе дальнейшего асимптотического анализа динамики упругого тела, состоит в том, что выполняются неравенства

$$\tau_1 \ll \tau_2 \ll \tau_3 \quad (3.5)$$

Пусть τ_3 — величина порядка единицы измерения времени. Предполагаем тело достаточно жестким, будем считать, что величина τ_1/τ_3 имеет порядок ε ($0 < \varepsilon \ll 1$). Положив в (3.2) $\omega_n = \omega_n^0/\varepsilon$, получим уравнения

$$\varepsilon^2 q_n'' + 2\chi b \omega_n^0{}^2 q_n' + \omega_n^0{}^2 q_n = \varepsilon^2 (Q_n + F_n) \quad (3.6)$$

Предельный случай $\varepsilon \rightarrow 0$ отвечает жесткому телу. Если $Q_n + F_n = 0$, то уравнения (3.6) переходят в уравнения

$$\varepsilon^2 q_n'' + 2\chi b \omega_n^0{}^2 q_n' + \omega_n^0{}^2 q_n = 0 \quad (n=1, 2, \dots) \quad (3.7)$$

описывающие свободные затухающие упругие колебания тела. Корни характеристического уравнения системы (3.7) имеют вид

$$\lambda_n = -\frac{\chi}{\varepsilon^2} b \omega_n^{02} \pm i \frac{\omega_n^0}{\varepsilon} \left(1 - \frac{\chi^2}{\varepsilon^2} b^2 \omega_n^{02} \right)^{1/2} \quad (3.8)$$

Отсюда следует, что величина τ_2/τ_3 имеет порядок ε^2/χ и, следовательно, условие (3.5) запишется в виде

$$0 < \chi \ll \varepsilon \ll 1 \quad (3.9)$$

Асимптотическое решение уравнений (3.6) может быть построено при помощи методов, разработанных для систем дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных [14–16]. Свободные затухающие колебания, отвечающие (3.8), соответствуют части асимптотического решения типа погранслоя. На интервалах времени порядка τ_3 и больших свободными затухающими колебаниями можно пренебречь и для описания движения тела пользоваться только регулярной частью асимптотического решения; тем самым изменение величин q_n во времени будет соответствовать вынужденным упругим колебаниям под действием гравитационных сил и сил инерции.

Регулярная часть асимптотического решения уравнений (3.6) может быть получена в виде ряда по степеням величин ε^2 и χ . Полагая, что $\chi \sim \varepsilon^{1+\delta}$ ($0 < \delta < 1$), находим, что

$$q_n = \omega_n^{-2} (\varepsilon^2 Q_n - 2\chi \varepsilon^2 b Q_n') + O(\varepsilon^4) \quad (n=1, 2, \dots) \quad (3.10)$$

Здесь для простоты записи опущен верхний индекс у величин ω_n^0 .

Подставив выражения (3.10) для q_n в правую часть уравнения (3.4), получим упрощенную систему дифференциальных уравнений, описывающую движение тела как целого. Если в получающихся таким путем уравнениях отбросить величины порядка ε^4 и выше, то их правые части будут содержать величины порядка ε^2 и $\chi \varepsilon^2$. Первые соответствуют внутренним упругим, а вторые — диссипативным силам.

При $\varepsilon=0$ уравнения (3.1) описывают движение жесткого тела относительно центра масс. При малых, но отличных от нуля значениях ε , упрощенная система может быть исследована при помощи методов малого параметра.

4. Уравнение плоских долгопериодических движений неоднородного кольца. Рассмотрим однородное круговое кольцо постоянного сечения, линейные размеры которого малы по сравнению с радиусом r центральной линии кольца. Пусть σ — плотность, F — площадь поперечного сечения, m_0 — масса кольца, а EJ — его изгибная жесткость. Предположим, что однородность кольца нарушена тем, что в каком-либо его месте жестко прикреплена материальная точка массой μm_0 ($0 < \mu < 1$) (фиг. 1).

Будем изучать движение такого неоднородного кольца в центральном ньютоновском гравитационном поле, предполагая, что движение является плоским, т. е. во время движения все элементы dm кольца лежат в плоскости орбиты его центра масс.

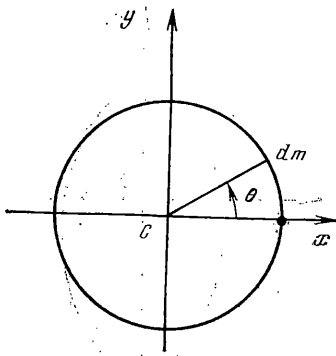
Упругие колебания однородных круговых колец хорошо изучены [17, 18]. Мы будем интересоваться только плоскими изгибными колебаниями. Частоты Ω_j таких свободных упругих колебаний однородного кольца определяются формулой

$$\Omega_j^2 = EJ(j^2 - 1)^2 j^2 / [\sigma F r^4 (j^2 + 1)] \quad (j=2, 3, \dots)$$

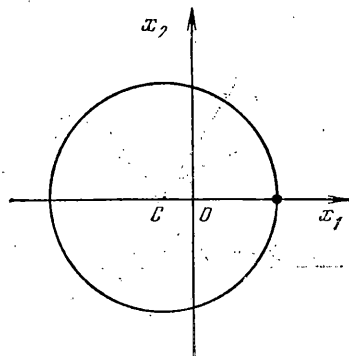
Для однородного кольца каждая из частот Ω_j отвечает двум независимым собственным формам колебаний.

В случае неоднородного кольца при малых значениях параметра нормальные координаты, частоты и собственные формы колебаний можно найти при помощи способа, изложенного в [19]. Показано³⁾, что при $\mu \neq 0$ происходит «расщепление» частоты: вместо двух равных частот Ω_j , отвечающих двум независимым собственным формам колебаний, появляются

³ См. Климов Д. М., Маркеев А. П. Динамика неоднородного упругого кольца в гравитационном поле: Препринт № 331. М.: ИПМ АН СССР, 1988.



Фиг. 1



Фиг. 2

ся две различных частоты ω_j' и ω_j'' ($j=2, 3, \dots$), причем с погрешностью порядка μ^2 :

$$\omega_j'^2 = \Omega_j^2 (1 - \mu 2j^2 / (j^2 + 1)), \quad \omega_j''^2 = \Omega_j^2 (1 - \mu 2 / (j^2 + 1)) \quad (4.1)$$

Найдены также (с той же погрешностью) соответствующие формы колебаний $U^{(j)}$, $U''^{(j)}$. Упругое смещение u элементов кольца dm в средней системе координат записывается в виде

$$u = \sum_{n=2}^{\infty} (q_n' U^{(n)} + q_n'' U''^{(n)}) \quad (4.2)$$

а потенциальная и кинетическая энергии, обусловленные упругими смещениями элементов кольца, задаются равенствами

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (\omega_n'^2 q_n'^2 + \omega_n''^2 q_n''^2), \quad T = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (q_n'^2 + q_n''^2) \quad (4.3)$$

В (4.2), (4.3) q_n' , q_n'' ($n=2, 3, \dots$) — нормальные координаты для изгибных колебаний неоднородного кольца, ω_n' , ω_n'' — соответствующие им частоты из (4.1).

На фиг. 2 показана средняя система координат в случае недеформированного кольца. Компоненты радиус-вектора ρ произвольного элемента dm кольца с погрешностью порядка μ^2 будут такими⁴:

$$x_1 = r(\cos \theta - \mu), \quad x_2 = r \sin \theta, \quad x_3 = 0 \quad (4.4)$$

В дальнейшем считаем, что величины μ и $\chi \varepsilon^2$ имеют одинаковый порядок малости и для определенности положим (с учетом (3.9)), что $\varepsilon \sim \mu^{3/10}$, $\chi \sim \mu^{4/10}$.

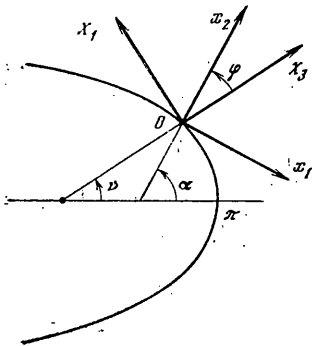
Можно показать⁵, что в случае плоского долгопериодического режима движения кольца значения нормальных координат q_n' , q_n'' определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} q_2' &= \frac{9r}{2} \left(\frac{m_0}{10} \right)^{1/2} \frac{\omega_*^2}{\Omega_2^2} \left[-\varepsilon^2 \cos 2\varphi + 4\chi \varepsilon^2 b \left(\frac{\omega_*}{\omega_*} \cos 2\varphi - \sin 2\varphi \right) \right] + O(\varepsilon^4) \\ q_2'' &= \frac{9r}{2} \left(\frac{m_0}{10} \right)^{1/2} \frac{\omega_*^2}{\Omega_2^2} \left[\varepsilon^2 \sin 2\varphi - 4\chi \varepsilon^2 b \left(\frac{\omega_*}{\omega_*} \sin 2\varphi + \cos 2\varphi \right) \right] + O(\varepsilon^4) \\ q_n' &= O(\mu \varepsilon^2), \quad q_n'' = O(\mu \varepsilon^2) \quad (n=3, 4, \dots) \end{aligned} \quad (4.5)$$

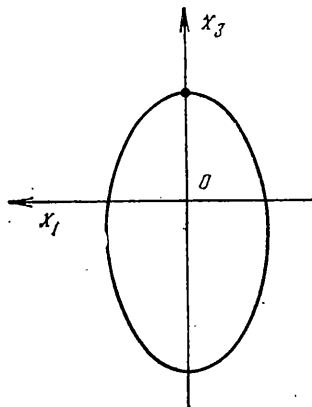
где φ — угол между осями Ox_2 и Ox_3 средней и орбитальной систем координат (фиг. 3).

⁴ Следует отметить, что в случае деформированного кольца точечная масса μm_0 не обязательно лежит на оси Ox_1 ; ее положение в средней системе координат определяется выражениями (2.2), (4.2) и (4.4), в которых $\theta=0$, а $q_n'(t)$, $q_n''(t)$ — функции времени, получаемые из решения уравнений (3.1), (3.2), (3.4).

⁵ См. Климов Д. М., Маркеев А. П. указ. публ. с. 6.



Фиг. 3



Фиг. 4

Из (4.5) и уравнений (3.1) следует, что плоское долгопериодическое движение кольца как целого наиболее существенно влияет на основные формы изгибных колебаний кольца, отвечающих наименьшей частоте Ω_2 свободных колебаний однородного кольца. Величина возбуждения остальных ($n > 2$) форм колебаний за счет движения кольца как целого на порядок μ меньше величины возбуждений, отвечающих основным формам. В свою очередь, главное влияние на движение кольца как целого, оказывают опять же его упругие колебания по основным формам.

Подставив q_n' и q_n'' из (4.5) в уравнение (3.1) и отбросив члены, порядок которых не ниже ε^4 , получим следующее уравнение плоских движений кольца как целого

$$\varphi'' - \frac{3}{2}\mu\omega_*^2 \sin 2\varphi = -\chi\varepsilon^2\kappa\omega_*^4\varphi'/\omega_0^3 - \nu'', \quad \kappa = 81b\omega_0^3/(5\Omega_2^2) \quad (4.6)$$

Уравнение (4.6) должно рассматриваться совместно с соотношениями (3.3), (3.4).

Если решение $\varphi = \varphi(t)$ уравнения (4.6) получено, то зависимость нормальных координат q_k' , q_k'' от t найдется подстановкой $\varphi(t)$ в равенства (4.5). Из (4.2) определяется затем форма деформированного кольца.

5. О движении кольца на круговой орбите. В случае круговой орбиты ($e=0$) уравнение (4.6) принимает вид

$$d^2\varphi/dt^2 - \frac{3}{2}\mu \sin 2\varphi + \chi\varepsilon^2\kappa d\varphi/dt = 0 \quad (\tau = \omega_0 t) \quad (5.1)$$

На фазовой плоскости $\varphi, \dot{\varphi}$ уравнение (5.1) имеет особые точки $P_k = (k\pi/2, 0)$ ($k=0, 1, 2, \dots$). Они отвечают положениям относительного равновесия деформированного кольца в орбитальной системе координат. Отличающимся одно от другого положениям кольца отвечают только четыре особые точки, например, P_0, P_1, P_2, P_3 . В положениях равновесия оси Ox_1 и Ox_2 средней системы координат направлены вдоль осей орбитальной системы координат. Деформация кольца может быть найдена из выражений (4.5) и (4.2). При этом

$$q_2' = -\varepsilon^2 \frac{9r}{2} \left(\frac{m_0}{10}\right)^{1/2} \frac{\omega_0^2}{\Omega_2^2} \cos 2\varphi_k + O(\varepsilon^4), \quad q_2'' = O(\varepsilon^4)$$

$$q_n' = O(\mu\varepsilon^2), \quad q_n'' = O(\mu\varepsilon^2) \quad (n=3, 4, \dots)$$

Равновесная конфигурация кольца, отвечающая особой точке $P_1 = (\pi/2, 0)$, схематично показана на фиг. 4.

Из характеристического уравнения линеаризованного в окрестности особых точек P_k уравнения (5.1):

$$\lambda^2 + \chi\varepsilon^2\kappa\lambda - 3\mu \cos 2\varphi_k = 0 \quad (k=0, 1, 2, 3)$$

следует, что P_0 и P_2 — особые точки типа седла, а P_1 и P_3 — устойчивые фокусы. Равновесные положения кольца, соответствующие точкам P_0, P_2 (для них точечная масса μm_0 лежит на касательной к орбите центра масс) неустойчивы, а положения, соответствующие P_1, P_3 (для них то-

чечная масса лежит на прямой, проходящей через центр масс кольца и притягивающий центр) асимптотически устойчивы.

Уравнение (5.1) представляет собой хорошо изученное [20, 21] уравнение движения математического маятника при наличии диссипативного момента. Фазовая плоскость уравнения (5.1) π -периодична по φ , она показана на фиг. 5. Почти все фазовые траектории стремятся к асимптотически устойчивой особой точке. Исключительными являются только две траектории, которые с возрастанием времени стремятся к седловой точке.

Следовательно, на круговой орбите движение кольца как целого при почти всех начальных условиях стремится к асимптотически устойчивым положениям равновесия, в которых точечная масса μt_0 лежит на прямой, проходящей через центр масс кольца и притягивающий центр, а само кольцо деформировано и вытянуто вдоль этой линии. В отмеченных выше исключительных случаях предельными положениями кольца могут быть его неустойчивые положения равновесия, когда точечная масса μt_0 лежит на касательной к орбите центра масс.

6. Эксцентриситетные колебания и их устойчивость. На эллиптической орбите равновесные положения кольца в орбитальной системе координат невозможны. При малых значениях эксцентриситета e устойчивые на круговой орбите равновесия переходят в периодические колебания малой амплитуды. Подобные колебания в динамике спутников — твердых тел называют эксцентриситетными колебаниями. Полагая, что $e \sim \varepsilon^2$, найдем эксцентриситетные колебания упруговязкого кольца и исследуем их устойчивость.

Для этого, используя соотношение (3.4), перейдем в уравнении (4.6) к новой независимой переменной — истинной аномалии v . Получим

$$d^2\varphi/dv^2 - 2e \sin v d\varphi/dv + \chi \varepsilon^2 \kappa d\varphi/dv - \frac{1}{2} \mu \sin 2\varphi = 2e \sin v \quad (6.1)$$

Здесь, как и всюду в этом пункте, отброшены члены порядка ε^4 и выше.

Пусть при $e=0$ кольцо находится в положении равновесия P_1 (фиг. 4). Решение $\varphi_*(v)$ уравнения (6.1), описывающее эксцентриситетные колебания, рождающиеся при $e \neq 0$ из этого положения равновесия, можно найти в виде ряда по степеням e . Получаем

$$\varphi_* = \pi/2 - 2e \sin v \quad (6.2)$$

Для исследования устойчивости колебаний (6.2) введем возмущение x , положив $\varphi = \varphi_* + x$. Линеаризованное уравнение возмущенного движения будет таким

$$d^2x/dv^2 - 2e \sin v dx/dv + \chi \varepsilon^2 \kappa dx/dv + 3\mu x = 0$$

Запишем это уравнение в виде системы второго порядка

$$dx/dv = y, \quad dy/dv = -3\mu x - (\chi \varepsilon^2 \kappa - 2e \sin v) y \quad (6.3)$$

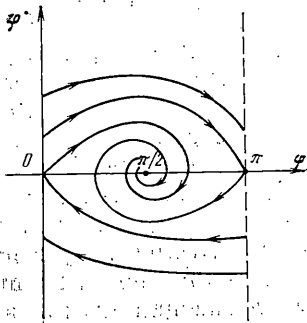
Как всякая линейная система дифференциальных уравнений с непрерывными периодическими коэффициентами, эта система приводима [22, 23]. В случае системы (6.3) соответствующая линейная замена переменных $x, y \rightarrow z_1, z_2$ может быть получена в явном виде

$$z_1 = x + 2e \sin v y, \quad z_2 = (1 + 2e \cos v) y$$

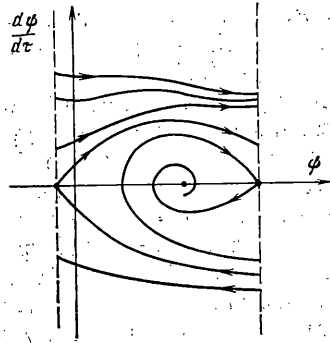
В переменных z_1, z_2 система уравнений (6.3) преобразуется к следующей системе с постоянными коэффициентами

$$dz_1/dv = z_2, \quad dz_2/dv = -3\mu z_1 - \chi \varepsilon^2 \kappa z_2 \quad (6.4)$$

Задачи об устойчивости систем (6.3) и (6.4) эквивалентны. Корни характеристического уравнения системы (6.4) $\lambda^2 + \chi \varepsilon^2 \kappa \lambda + 3\mu = 0$ комплексно-сопряженные с отрицательной вещественной частью. Следовательно, эксцентриситетные колебания (6.2) асимптотически устойчивы. (Разумеется, в рамках рассматриваемого приближения, когда всюду пренебрегаем малыми величинами порядка ε^4 и выше. На основании результатов теории устойчивости при постоянно действующих возмущениях [23] можно сделать вывод о том, что учет этих отброшенных величин при достаточно малых ε во всяком случае не приведет к неустойчивости).



Фиг. 5



Фиг. 6

7. Движения кольца, близкие к равномерным вращениям в абсолютной системе координат.

7.1. *Нерезонансные вращения.* Если кольцо является однородным ($\mu = 0$) твердым ($\varepsilon = 0$) телом, то общее решение уравнения (4.6) таково

$$\varphi = -\nu + \Omega\tau + \psi \quad (7.1)$$

где ψ и Ω — произвольные постоянные.

Решение (7.1) описывает равномерное вращение кольца в абсолютной системе координат: угол α между осью Ox_2 и линией апсид орбиты (фиг. 3) возрастает (при $\Omega > 0$) или убывает (при $\Omega < 0$) с постоянной скоростью $\Omega\omega_0$.

Для исследования движения кольца при малых, но отличных от нуля значениях μ и ε , введем в уравнение (4.6) вместо φ новую переменную ψ , определяемую равенством (7.1), в котором величину Ω считаем постоянной. Из (4.6) и (7.1) с учетом равенств (3.3) и (3.4) находим, что новая переменная удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2} - \frac{3}{2}\mu \frac{(1+e \cos \nu)^3}{(1-e^2)^3} \sin 2(\Omega\tau - \nu + \psi) + \chi\varepsilon^2\kappa \frac{(1+e \cos \nu)^6}{(1-e^2)^6} \left(\Omega - \frac{d\nu}{d\tau} + \frac{d\psi}{d\tau} \right) = 0$$

Для построения приближенного решения этого уравнения воспользуемся методом усреднения [24]. Решения усредненной системы дают ⁶⁾ погрешность порядка μ на интервале «времени» порядка $\mu^{-1/\mu}$.

Пусть 2Ω — не целое число и отличается от целого на величину порядка единицы. Тогда усредненное уравнение имеет вид

$$d^2\psi/d\tau^2 + \chi\varepsilon^2\kappa I_1(e) d\psi/d\tau = -\chi\varepsilon^2\kappa (\Omega I_1(e) - I_2(e)) \quad (7.2)$$

$$I_1(e) = (1 + 3e^2 + 3/8 e^4) / (1 - e^2)^{3/2} \quad (7.3)$$

$$I_2(e) = (1 + 15/2 e^2 + 45/8 e^4 + 5/16 e^6) / (1 - e^2)^6 \quad (7.4)$$

Уравнение (7.2) линейно и легко исследуется. Для любых начальных условий его решения с возрастанием τ асимптотически стремятся к решению $\psi(\tau) = (I_2(e)/I_1(e) - \Omega)\tau + \psi(0)$.

Учитывая замену переменных (7.1), получаем отсюда, что в нерезонансном случае, когда 2Ω — не целое число, все движения кольца как целого с возрастанием времени имеют тенденцию приближаться к равномерному в абсолютной системе координат вращению вокруг нормали к плоскости орбиты центра масс. Предельная угловая скорость r_3^* — функция эксцентриситета и определяется равенством

$$r_3^* = \omega_0 I_2(e) / I_1(e) \quad (7.5)$$

В предельном режиме движения имеем

$$\varphi(\tau) = -\nu(\tau) + I_2(e)\tau / I_1(e) + \psi(0) \quad (7.6)$$

⁶⁾ См. Климов Д. М., Маркеев А. П. указ. публ. с. 6.

а деформации в каждой точке кольца будут функциями времени, определяемыми из (4.2), (4.5) и (7.6).

Отметим, что предельное значение угловой скорости (7.5) ранее было известно в теории вращательного движения планет [5]:

7.2. *Резонансные вращения.* Пусть $2\Omega = m$ — целое число. В этом случае усредненное уравнение будет таким

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2} - \frac{3}{2}\mu\Phi_m(e)\sin 2\psi + \chi\varepsilon^2\kappa I_1(e)\frac{d\psi}{d\tau} = -\chi\varepsilon^2\kappa\left(\frac{m}{2}I_1(e) - I_2(e)\right) \quad (7.7)$$

$$\Phi_m(e) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1+e\cos\nu)^3}{(1-e^2)^3} \cos(m\tau - 2\nu) d\tau \quad (7.8)$$

При $m=0$ имеем $\Phi_0(e) \equiv 0$ и уравнение (7.7) переходит в уравнение (7.2). В случае твердого тела ($\varepsilon=0$) уравнение (7.7) получено и исследовано в [25].

Если величины ε и μ отличны от нуля, то уравнение (7.7) является уравнением движения математического маятника при наличии диссипативного и постоянного моментов. Это уравнение хорошо изучено [20, 21]. Пусть выполняется неравенство

$$\chi\varepsilon^2\kappa\left|\frac{1}{2}mI_1(e) - I_2(e)\right| > \frac{3}{2}\mu|\Phi_m(e)| \quad (7.9)$$

т. е. постоянная составляющая момента, возникающая из-за жесткости кольца, превосходит максимальное значение гравитационного момента, действующего на жесткое кольцо. Тогда все решения уравнения (7.7) с возрастанием времени стремятся к решению, в котором $d\psi/d\tau$ — π -периодическая функция ψ .

Движение кольца в этом случае асимптотически стремится к вращению с угловой скоростью, которая мало отличается от постоянной и не зависит от начальных условий. Приближенное значение предельной угловой скорости вращения кольца можно найти из уравнения (7.7) опять же при помощи метода усреднения. Для этого положим $z = d\psi/d\tau$, а ψ примем за независимую переменную. Уравнение (7.7) запишется тогда в виде

$$zdz/d\psi = \frac{3}{2}\mu\Phi_m(e)\sin 2\psi - \chi\varepsilon^2\kappa I_1(e)z - \chi\varepsilon^2\kappa\left(\frac{1}{2}mI_1(e) - I_2(e)\right)$$

Усреднив правую часть по ψ , получим

$$zdz/d\psi = -\chi\varepsilon^2\kappa I_1(e)z - \chi\varepsilon^2\kappa\left(\frac{1}{2}mI_1(e) - I_2(e)\right)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (7.2). Предельная угловая скорость вращения кольца определяется равенством (7.5). Указанный способ определения предельной угловой скорости дает ошибку порядка μ на интервале изменения ψ порядка $\mu^{-1/2}$, что находится в пределах точности решений усредненного уравнения (7.7).

Если неравенство (7.9) выполняется с обратным знаком, то картина движения будет иной. В этом случае уравнение (7.7) имеет особые точки и в зависимости от коэффициентов уравнения возможны два принципиально различных случая.

а). Почти все траектории уравнения (7.7) стремятся к асимптотически устойчивой особой точке (ср. с фиг. 5). Происходит «захват» почти всех движений кольца в резонансное вращение с угловой скоростью $\frac{1}{2}m\omega_0$ в абсолютной системе координат.

б). Помимо траекторий, стремящихся к асимптотически устойчивой особой точке, есть множество траекторий, стремящихся с возрастанием времени к траектории, на которой $d\psi/d\tau$ — π -периодическая функция ψ (фиг. 6). Поэтому не все движения кольца стремятся к резонансному вращению: существуют движения, которые не «захватываются» в резонанс, а стремятся к равномерному вращению в абсолютной системе координат с угловой скоростью r_3^* , определяемой равенством (7.5).

Отметим, что в обоих случаях существует ровно по два движения кольца, которые с ростом времени стремятся к неустойчивому резонанс-

ному вращению; этим движениям отвечает седловая особая точка уравнения (7.7).

7.3. *Случай слабоэллиптической орбиты.* Остановимся подробнее на анализе движения кольца на орбите малого эксцентриситета. В [25, 26] получены первые члены разложений функций (7.8) в ряды по степеням эксцентриситета. Найдено, что при $m \neq 0$:

$$\Phi_m(e) \sim e^{|m-2|} \quad (7.10)$$

В частности, в случае $m=2$, когда угловая скорость жесткого кольца близка к угловой скорости движения его центра масс по орбите, имеем

$$\Phi_2(e) = 1 - \frac{5}{2}e^2 + O(e^4) \quad (7.11)$$

Для величин (7.3) и (7.4) при малых e справедливы оценки

$$I_1(e) = 1 + \frac{15}{2}e^2 + O(e^4), \quad I_2(e) = 1 + \frac{27}{2}e^2 + O(e^4) \quad (7.12)$$

Из (7.10)–(7.12) следует, что если $m \neq 2$, то при достаточно малых e выполняется неравенство (7.9). И, следовательно, согласно п. 7.2, в этом случае почти все вращения кольца с ростом времени стремятся к вращению с угловой скоростью, мало отличающейся от значения (7.5).

Пусть теперь $m=2$. Сделав в уравнении (7.7) замену переменных $\psi = \pi/2 + x/2$, $\eta = (3\mu\Phi_2(e))^{1/2}\tau$ получим, что новая переменная x удовлетворяет уравнению

$$d^2x/d\eta^2 + \sin x + \alpha dx/d\eta = \sin \theta_0 \quad (7.13)$$

$$\alpha = \chi e^2 \chi (3\mu)^{-1/2} (1 + O(e^2)), \quad \sin \theta_0 = 4\chi e^2 \chi e^2 \mu^{-1} (1 + O(e^2)) \quad (7.14)$$

Фазовая плоскость x , $dx/d\eta$ уравнения (7.13) 2π – периодична по x . В интервале $0 < x < 2\pi$ существуют две особые точки Q_1 и Q_2 , для которых $x_1 = \theta_0$ и $x_2 = \pi - \theta_0$ соответственно. Первая из этих точек – устойчивый фокус, а вторая – седло. Точка Q_1 отвечает движению кольца, когда при его прохождении через перицентр орбиты угол между осью Ox_1 средней системы координат и линией асид орбиты равен $\theta_0/2$, для точки Q_2 этот угол равен $\pi/2 - \theta_0/2$.

Выясним, когда в эволюции движения кольца реализуются случаи а) и б), описанные в п. 7.2. Известно [21], что для уравнения (7.13) существует критическое значение α_* параметра α такое, что при $\alpha > \alpha_*$ имеет место случай а), а при $0 < \alpha < \alpha_*$ – случай б). В [21] приведен ряд оценок величины α_* сверху и снизу. Воспользуемся полученными в [27] оценками

$$2 \sin \theta_0 (\pi (2 \sin \theta_0 + \pi \cos \theta_0))^{-1/2} < \alpha_* < 2 \sin \theta_0 / 2 \quad (7.15)$$

Для интересующих нас малых значений угла θ_0 оценки (7.15) запишутся в виде $2\theta_0/\pi < \alpha_* < \theta_0$. Следовательно, при $\alpha > \theta_0$ реализуется случай а), а при $0 < \alpha < 2\theta_0/\pi$ – случай б). Подставив в последние неравенства значения α и θ_0 из (7.14), найдем, что при выполнении неравенства

$$e < (\mu/18)^{1/4} \approx 0,38(\mu)^{1/4} \quad (7.16)$$

все движения кольца (за исключением двух движений, стремящихся к неустойчивому резонансному движению, отвечающему особой точке Q_2 уравнения (7.13)) асимптотически стремятся к устойчивому резонансному вращению с постоянной в абсолютной системе координат угловой скоростью ω_0 (траектории уравнения (7.13) стремятся к особой точке Q_1). Вероятность захвата движения в резонансный режим в этом случае равна единице.

Если выполняется неравенство

$$e > (\pi^2 \mu / 192)^{1/4} \approx 0,48(\mu)^{1/4} \quad (7.17)$$

то существует множество движений кольца, которое с ростом времени стремится к вращению с угловой скоростью (7.5). Вероятность захвата движения в резонансный режим в этом случае меньше единицы. Так как при $\mu=0$ уравнение (7.7) переходит в уравнение (7.2), то, используя анализ п. 7.1, приходим к выводу, что эта вероятность стремится к нулю при $\mu \rightarrow 0$.

Интересно, что неравенства (7.16) и (7.17), являющиеся достаточными условиями осуществимости качественно различных эволюций движения кольца, не содержат параметров, характеризующих упругие и диссипативные свойства материала кольца. Условия (7.16) и (7.17) являются ограничениями на величины эксцентриситета орбиты и параметра μ , характеризующего степень неоднородности кольца.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Modi V. J.* Attitude Dynamics of Satellites with Flexible Appendages-A Brief Review // *J. of Spacecraft and Rockets*. 1974. Vol. II. P. 743-751.
2. *Рубановский В. Н.* Устойчивость установившихся движений сложных механических систем // *Итоги науки и техники. Сер.: Общая механика*. ВИНТИ. 1982. Т. 5. С. 62-134.
3. *Докучаев Л. В.* Нелинейная динамика упругого летательного аппарата // *Итоги науки и техники. Сер.: Общая механика*. ВИНТИ. 1982. Т. 5. С. 135-197.
4. *Докучаев Л. В.* Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. М.: Машиностроение, 1987. 231 с.
5. *Белецкий В. В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория упругости. М.: Наука, 1965. 203 с.
7. *Садов Ю. А., Сидоренко В. В.* Равновесные конфигурации упругого кольца в плоскости круговой орбиты // *Космические исследования*. 1986. Т. 24. Вып. 5. С. 659-667.
8. *Кузьмин П. А.* Устойчивость круговой формы нити, имеющей счетное множество степеней свободы // *Казань: Тр. КИАИ*. 1949. Т. 22. С. 3-15.
9. *Breakwell J. V.* Stability of an orbiting ring // *AIAA Paper*. 1980. No 57.
10. *Maxwell J. G.* On the stability of the motion of Saturn's rings // In: *The scientific paper of J. C. Maxwell*. Paris: Hermann, 1927. Vol. 1. P. 288-376.
11. *Sanavin J. R., Likins P. W.* Flotating reference frames for flexible spacecraft // *J. of Spacecraft and Rockets*. 1977. Vol. 14. No. 12. P. 724-732.
12. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Гостехиздат, 1957. 476 с.
13. *Santini P.* Stability of flexible spasecrafts // *Acta Astronautica*. 1976. Vol. 3. No. 9-10. P. 685-713.
14. *Черноузько Ф. Л.* О движении твердого тела с упругими и диссипативными элементами // *ПММ*. 1978. Т. 42. Вып. 1. С. 34-42.
15. *Черноузько Ф. Л., Шамаев А. С.* Асимптотика сингулярных возмущений в задаче динамики твердого тела с упругими и диссипативными элементами // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1983. № 3. С. 33-42.
16. *Васильева А. Б., Бугузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
17. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.-Л.: Гостехиздат, 1935. 674 с.
18. *Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
19. *Стратт Дж. В. (Лорд Рэлей).* Теория звука. Т. 1, М.-Л.: Гостехиздат, 1940. 499 с.
20. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. М.: Гостехиздат, 1959. 915 с.
21. *Барбашин Е. А., Табуева В. А.* Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука, 1969. 300 с.
22. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения // *Собр. соч.* Т. 2. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 7-263.
23. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 532 с.
24. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
25. *Черноузько Ф. Л.* Резонансные явления при движении спутника относительно центра масс // *Ж. вычисл. матем. и матем. физики*, 1963. Т. 3. № 3. С. 528-538.
26. *Голдрайх П., Пил С.* Динамика вращения планет // В кн.: *Приливы и резонансы в солнечной системе*. М.: Мир, 1975. С. 130-167.
27. *Vöht C.* Nouvi criteri di esistenza di soluzioni periodiche di una nota equazione differenziabile non lineare // *Annali di matematica pura ed applicata*. 1953. Ser. 4. T. 35. P. 343-353.

Москва

Поступила в редакцию
7.III.1989