МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1990

УДК 539.3

К. Ф. ЧЕРНЫХ

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Для осесимметричной деформации нелинейно-упругого тела вращения предлагается сравнительно простой и хорошо обозримый вариант теории, близкий к предложенному автором [1, 2] для нелинейной плоской задачи.

1. Исходные комплексные зависимости. В нелинейной теории упругости широко используются комплексные координаты и компоненты векторов, тензоров [1]:

$$\zeta=x_1^\circ+ix_2^\circ,\quad \bar\zeta=x_1^\circ-ix_2^\circ;\quad z=x_1+ix_2,\quad \bar z=x_1-ix_2$$

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1^\circ}-i\frac{\partial}{\partial x_2^\circ}\right),\quad \frac{\partial}{\partial\bar\zeta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1^\circ}+i\frac{\partial}{\partial x_2^\circ}\right)\tag{1.1}$$

$$T_1=t_{11}+t_{22}+i(t_{12}-t_{21}),\quad T_2=t_{11}-t_{22}+i(t_{12}+t_{21})$$
$$T_3=t_{13}+it_{23},\quad T_4=t_{31}+it_{32},\quad T_5=t_{33}\tag{1.2}$$

Здесь и ниже индекс нуль сопровождает величины, отнесенные к недеформированной конфигурации тела.

Скалярное произведение двух тензоров $\mathbf{T}\cdot\mathbf{S}$ имеет следующие комплексные компоненты

$$\begin{aligned}(T\cdot S)_1&={}^1/_2(T_1S_1+\bar T_2S_2)+\bar T_3S_4\\ (T\cdot S)_2&={}^1/_2(\bar T_1S_2+T_2S_1)+T_3S_4\\ (T\cdot S)_3&={}^1/_2(\bar T_1S_3+T_2\bar S_3)+T_3S_5\\ (T\cdot S)_4&={}^1/_2(T_4S_1+\bar T_4S_2)+T_5S_4\\ (\mathrm{T}\cdot S)_5&={}^1/_2(T_4\bar S_3+\bar T_4S_3)+T_5S_5\end{aligned}\tag{1.3}$$

Для сопряженного и единичного тензоров ($\mathbf{T}^*$, $\mathbf{1}$):

$$T_1^*=\bar T_1,\quad T_2^*=T_2,\quad T_3^*=T_4,\quad T_4^*=T_3,\quad T_5^*=T_5$$
$$1_1=2,\quad 1_2=1_3=1_4=0,\quad 1_5=1\tag{1.4}$$

При повороте вокруг третьей оси на угол χ комплексные компоненты тензоров и векторов преобразуются по формулам

$$T_1'=T_1,\ T_2'=T_2e^{-i2\chi},\ T_3'=T_3e^{-i\chi},\ T_4'=T_4e^{-i\chi},\ T_5'=T_5$$
$$a_1'+ia_2'=(a_1+ia_2)e^{-i\chi},\quad a_3'=a_3\tag{1.5}$$

Для тензора поворота $\mathbf{Q}$ имеем комплексные компоненты

$$Q_1=2\cos\omega+\frac{\omega_1{}^\vee\bar\omega_1{}^\vee}{1+\cos\omega}-i2\omega_2{}^\vee,\quad Q_5=1-\frac{\omega_1{}^\vee\bar\omega_1{}^\vee}{1+\cos\omega}$$

$$Q_2=\frac{\omega_1{}^{\vee 2}}{1+\cos\omega},\quad Q_3=\left(\frac{\omega_2{}^\vee}{1+\cos\omega}-i\right)\omega_1{}^\vee,\quad Q_4=\left(\frac{\omega_2{}^\vee}{1+\cos\omega}+i\right)\omega_1{}^\vee$$

$$\omega_1^{\vee}=\frac{\sin\omega}{\omega}(\omega_1+i\omega_2),\qquad \omega_2^{\vee}=\frac{\sin\omega}{\omega}\,\omega_3 \tag{1.6}$$

где ω_i — компоненты вектора поворота.

Компоненты и главные инварианты симметричного тензора **A** подсчитываются по формулам

$$\begin{gathered}
A_1=a_{11}+a_{22},\ A_2=a_{11}-a_{22}+i2a_{12},\ A_3=A_4=a_{13}+ia_{23},\ A_5=a_{33}\\
I_A=A_1+A_5,\ \ II_A={}^1/_4(A_1^2-A_2\bar{A}_2)-A_3\bar{A}_3+A_1A_5\\
III_A={}^1/_4(A_1^2-A_2\bar{A}_2)A_5-{}^1/_2A_1A_3\bar{A}_3+{}^1/_4(A_2\bar{A}_3^2+\bar{A}_2A_3^2)
\end{gathered} \tag{1.7}$$

Комплексные компоненты градиента движения и ему обратного тензора имеют вид

$$F_1=2\overline{\frac{\partial z}{\partial\zeta}},\qquad J(F^{-1})_1=2\left(\frac{\partial z}{\partial\zeta}\frac{\partial x_3}{\partial x_3^\circ}-\frac{\partial z}{\partial x_3^\circ}\frac{\partial x_3}{\partial\zeta}\right) \tag{1.8}$$

$$F_2=2\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta},\qquad J(F^{-1})_2=2\left(\frac{\partial x_3}{\partial\bar\zeta}\frac{\partial z}{\partial x_3^\circ}-\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}\frac{\partial x_3}{\partial x_3^\circ}\right)$$

$$F_3=\frac{\partial z}{\partial x_3^\circ},\qquad J(F^{-1})_3=\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}\overline{\frac{\partial z}{\partial x_3^\circ}}-\overline{\frac{\partial z}{\partial\zeta}}\frac{\partial z}{\partial x_3^\circ}$$

$$F_4=2\frac{\partial x_3}{\partial\bar\zeta},\qquad J(F^{-1})_4=2\left(\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}\frac{\partial x_3}{\partial\zeta}-\frac{\partial z}{\partial\zeta}\frac{\partial x_3}{\partial\bar\zeta}\right)$$

$$F_5=\frac{\partial x_3}{\partial x_3^\circ},\qquad J(F^{-1})_5=\frac{\partial z}{\partial\zeta}\overline{\frac{\partial z}{\partial\zeta}}-\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}\overline{\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}}$$

$$J=\left(\frac{\partial z}{\partial\zeta}\overline{\frac{\partial z}{\partial\zeta}}-\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}\overline{\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}}\right)\frac{\partial x_3}{\partial x_3^\circ}+\left(\frac{\partial x_3}{\partial\bar\zeta}\overline{\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}}-\frac{\partial x_3}{\partial\zeta}\overline{\frac{\partial z}{\partial\zeta}}\right)\frac{\partial z}{\partial x_3^\circ}+$$

$$+\left(\frac{\partial x_3}{\partial\zeta}\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}-\frac{\partial x_3}{\partial\bar\zeta}\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right)\overline{\frac{\partial z}{\partial x_3^\circ}}$$

кратность изменения объема.

Для сжимаемого и несжимаемого материалов имеем, соответственно, законы упругости ($i=1,\ldots,5$):

$$\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_i=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{I}_A}+I_A\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{II}_A}\right)Q_i^*-\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{II}_A}F_i^*+\mathrm{III}_A\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{III}_A}(F^{-1})_i \tag{1.10}$$

$$\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_i=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial I_A}+\mathrm{I}_A\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{II}_A}\right)Q_i^*-\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{II}_A}F_i^*+p(F^{-1})_i \tag{1.11}$$

Имеют место комплексные уравнения движения

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_1}{\partial\bar\zeta}+\frac{\partial\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_2}{\partial\zeta}+\frac{\partial\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_4}{\partial x_3^\circ}+\rho^\circ\left(f_1+if_2-\frac{\partial^2 z}{(\partial t)^2}\right)=0\\
\frac{\partial\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_3}{\partial\zeta}+\overline{\frac{\partial\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_3}{\partial\zeta}}+\frac{\partial\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_5}{\partial x_3^\circ}+\rho^\circ\left(f_3-\frac{\partial^2 x_3}{(\partial t)^2}\right)=0
\end{gathered} \tag{1.12}$$

и комплексная запись силовых граничных условий

$$\begin{gathered}
(n_1^\circ+in_2^\circ)\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_1+\overline{(n_1^\circ+in_2^\circ)}\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_2+\\
+2n_3^\circ\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_4=2(\sigma_{n\bullet1}+i\sigma_{n\bullet2}),\\
(n_1^\circ+in_2^\circ)\overline{\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_3}+\overline{(n_1^\circ+in_2^\circ)}\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_3+2n_3^\circ\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_5=2\sigma_{n\bullet3}
\end{gathered} \tag{1.13}$$

где n_i° — компоненты единичной внешней нормали к поверхности недеформированного тела.

Наконец, для тензора условных напряжений (симметричный тензор Био) Σ_i° имеют место следующие выражения

$$\Sigma^\circ = {}^1/_2[\{\mathbf{F}^{-1}\cdot J\Sigma\}\cdot\mathbf{Q}+\mathbf{Q}^*\cdot\{\mathbf{F}^{-1}\cdot J\Sigma\}] \tag{1.14}$$

Выражения для тензора истинных напряжений [1] не выписываются, так как имеются убедительные соображения о существенных преимуществах условных напряжений перед истинными [3].

2. Осесимметричная деформация. При осесимметричной деформации тел вращения (фиг. 1):

$$x_1^\circ = r^\circ\cos\theta^\circ,\qquad x_2^\circ = r^\circ\sin\theta^\circ$$

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}=\frac{e^{-i\theta^\circ}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r^\circ}-i\frac{\partial}{r^\circ\partial\theta^\circ}\right),\qquad \frac{\partial}{\partial\bar\xi}=\frac{e^{i\theta^\circ}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r^\circ}+i\frac{\partial}{r^\circ\partial\theta^\circ}\right) \tag{2.1}$$

$$z=r(r^\circ, x_3^\circ)e^{i\theta^\circ},\qquad x_3=x_3(r^\circ, x_3^\circ)$$

Используя соотношения (1.8), (1.5) и (1.2), получаем при $\chi\to\theta^\circ$:

$$F_1'\equiv F_{rr}+F_{\theta\theta}+i(F_{r\theta}-F_{\theta r})=\partial r/\partial r^\circ+r/r^\circ$$

$$F_2'\equiv F_{rr}-F_{\theta\theta}+i(F_{r\theta}+F_{\theta r})=\partial r/\partial r^\circ-r/r^\circ$$

$$F_3'\equiv F_{r3}+iF_{\theta 3}=\partial r/\partial x_3^\circ,\qquad F_4'\equiv F_{3r}+iF_{3\theta}=\partial x_3/\partial r^\circ$$

$$F_5'\equiv F_{33}=\partial x_3/\partial x_3^\circ$$

Таким образом от нуля отличны лишь компоненты

$$F_{rr}=\frac{\partial r}{\partial r^\circ},\qquad F_{\theta\theta}=\frac{r}{r^\circ},\qquad F_{r3}=\frac{\partial r}{\partial x_3^\circ},\qquad F_{3r}=\frac{\partial x_3}{\partial r^\circ},\qquad F_{33}=\frac{\partial x_3}{\partial x_3^\circ} \tag{2.2}$$

По аналогии с выражениями (1.1)—(1.2) введем

$$\xi=r^\circ+ix_3^\circ,\qquad w=r+ix_3$$

$$\partial/\partial\xi={}^1/_2(\partial/\partial r^\circ-i\partial/\partial x_3^\circ),\qquad \partial/\partial\bar\xi={}^1/_2(\partial/\partial r^\circ+i\partial/\partial x_3^\circ) \tag{2.3}$$

$$T_r=t_{rr}+t_{33}+i(t_{r3}-t_{3r}),\qquad T_3=t_{rr}-t_{33}+i(t_{r3}+t_{3r}) \tag{2.4}$$

Отсюда и из (2.2) получаем с учетом того, что $w=w(\xi,\bar\xi)$, первый столбец следующих соотношений

$$F_r=2\overline{\partial w}/\partial\xi,\qquad F_r^*=2\partial w/\partial\xi,\qquad (F^{-1})_r=2\partial w/(\Delta\partial\xi)$$

$$F_3=2\partial w/\partial\bar\xi,\qquad F_3^*=2\partial w/\partial\bar\xi,\qquad (F^{-1})_3=-2\partial w/(\Delta\partial\bar\xi) \tag{2.5}$$

$$F_{\theta\theta}=r/r^\circ,\qquad F_{\theta\theta}^*=r/r^\circ,\qquad (F^{-1})_{\theta\theta}=(r/r^\circ)^{-1}$$

$$\Delta=|\partial w/\partial\xi|^2-|\partial w/\partial\bar\xi|^2 \tag{2.6}$$

Остальные выражения получаем, используя зависимости (1.3) и (1.4).

Рассмотрим тензор поворота. В силу осесимметричности деформации (фиг. 2) $\omega_1=-\omega\sin\theta^\circ$, $\omega_2=\omega\cos\theta^\circ$, $\omega_3=0$ и согласно (1.6), (1.5) и согласно (1.6), (1.5) и (2.4):

$$Q_{rr}=\cos\omega,\qquad Q_{\theta\theta}=1,\qquad Q_{r3}=\sin\omega,\qquad Q_{3r}=-\sin\omega,\qquad Q_{33}=\cos\omega$$

$$Q_r=2e^{i\omega},\qquad Q_3=0,\qquad Q_{\theta\theta}=1$$

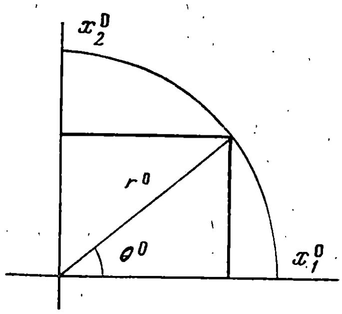
$$Q_r^*=2e^{-i\omega},\qquad Q_3^*=0,\qquad Q_{\theta\theta}^*=1 \tag{2.7}$$

Используя теперь выражения (2.5) и (2.7), применим соотношения (1.3) к полярному разложению $\mathbf{F}=\mathbf{Q}\cdot\mathbf{\Lambda}^\circ$ $(T_i=Q_i,\ S_i=\Lambda_i^\circ)$. В результате имеем

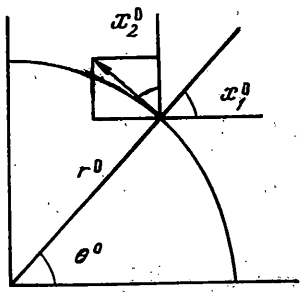
$$e^{i\omega}\Lambda_r^\circ=2\overline{\partial w}/\partial\xi,\qquad e^{-i\omega}\Lambda_3^\circ=2\partial w/\partial\bar\xi,\qquad \Lambda_{\theta\theta}^\circ=r/r^\circ$$

Отсюда с учетом положительности Λ_r° находим выражения для угла поворота ω и комплексных компонент тензора кратностей удлинений

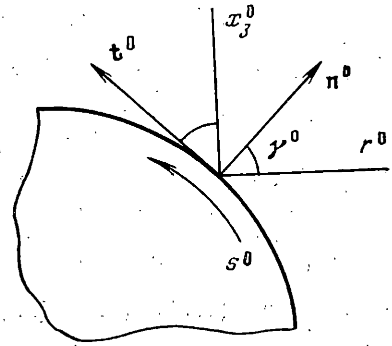
$$e^{i\omega}=|\partial w/\partial\xi|^{-1}\overline{\partial w}/\partial\xi \tag{2.8}$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

$$\Lambda_r^\circ=2\left|\frac{\partial w}{\partial \xi}\right|, \qquad \Lambda_3^\circ=2\frac{\overline{\partial w}}{\partial \xi}\frac{\partial w}{\partial \bar\xi}\left|\frac{\partial w}{\partial \xi}\right|^{-1} \qquad \Lambda_{\theta\theta}^\circ=\frac{r}{r^\circ} \tag{2.9}$$

3. Закон упругости. Прежде всего из выражений (1.7), (1.5) и (2.9) получаем выражения для главных инвариантов тензора кратностей удлинений

$$\mathrm{I}_\Lambda=2\left|\frac{\partial w}{\partial \xi}\right|+\frac{r}{r^\circ}, \qquad \mathrm{II}_\Lambda=\Delta+2\frac{r}{r^\circ}\left|\frac{\partial w}{\partial \bar\xi}\right|^{-1}, \qquad \mathrm{III}_\Lambda=\Delta\frac{r}{r^\circ} \tag{3.1}$$

Отсюда и из (2.6) получаем необходимые в дальнейшем выражения

$$\frac{\partial}{\partial|\partial w/\partial\xi|}=2\left[\frac{\partial}{\partial \mathrm{I}_\Lambda}+\left(\left|\frac{\partial w}{\partial \xi}\right|+\frac{r}{r^\circ}\right)\frac{\partial}{\partial \mathrm{II}_\Lambda}+\frac{r}{r^\circ}\left|\frac{\partial w}{\partial \xi}\right|\frac{\partial}{\partial \mathrm{III}_\Lambda}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial|\partial w/\partial\bar\xi|}=-2\left|\frac{\partial w}{\partial \bar\xi}\right|\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{II}_\Lambda}+\frac{r}{r^\circ}\frac{\partial}{\partial \mathrm{III}_\Lambda}\right) \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial(r/r^\circ)}=\frac{\partial}{\partial \mathrm{I}_\Lambda}+2\left|\frac{\partial w}{\partial \xi}\right|\frac{\partial}{\partial \mathrm{II}_\Lambda}+\Delta\frac{\partial}{\partial \mathrm{III}_\Lambda}$$

Из соотношений (1.10), (1.5), (2.5), (2.7) и (3.2) получаем для *сжимаемого* материала компактную форму закона упругости

$$\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_r=\frac{\partial w}{\partial \xi}\left|\frac{\partial w}{\partial \xi}\right|^{-1}\frac{\partial \Phi}{\partial|\partial w/\partial\xi|}$$

$$\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_3=\frac{\partial w}{\partial \bar\xi}\left|\frac{\partial w}{\partial \bar\xi}\right|^{-1}\frac{\partial \Phi}{\partial|\partial w/\partial\bar\xi|}, \qquad \{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_{\theta\theta}=\frac{\partial \Phi}{\partial(r/r^\circ)} \tag{3.3}$$

Для несжимаемого материала

$$J=\Delta(r/r^\circ)=1, \qquad r/r^\circ=\Delta^{-1}, \qquad \Phi=\Phi(\mathrm{I}_\Lambda, \mathrm{II}_\Lambda) \tag{3.4}$$

и согласно (3.2):

$$\frac{\partial\Phi}{\partial|\partial w/\partial\xi|}=2\left[\frac{\partial\Phi}{\partial I_\Lambda}+\left(\left|\frac{\partial w}{\partial\xi}\right|+\frac{1}{\Delta}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{II}_\Lambda}\right]$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial|\partial w/\partial\bar\xi|}=-2\left|\frac{\partial w}{\partial\bar\xi}\right|\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{II}_\Lambda},\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial(r/r^\circ)}=\frac{\partial\Phi}{\partial I_\Lambda}+2\left|\frac{\partial w}{\partial\xi}\right|\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{II}_\Lambda} \tag{3.5}$$

С учетом условий несжимаемости (3.4) введем величину

$$\Phi_\Delta=\Phi|_{(r/r^\circ)=\Delta^{-1}} \tag{3.6}$$

Отсюда и из (3.4), (3.5), (2.6) находим

$$\frac{\partial\Phi_\Delta}{\partial|\partial w/\partial\xi|}=\frac{\partial\Phi}{\partial|\partial w/\partial\xi|}-\frac{2}{\Delta^2}\left|\frac{\partial w}{\partial\xi}\right|\frac{\partial\Phi}{\partial(r/r^\circ)}=$$

$$=2\left[\left(1-\frac{1}{\Delta^2}\left|\frac{\partial w}{\partial\xi}\right|\right)\frac{\partial\Phi}{\partial I_\Lambda}+\left(\left|\frac{\partial w}{\partial\xi}\right|+\frac{1}{\Delta}-\frac{2}{\Delta^2}\left|\frac{\partial w}{\partial\xi}\right|^2\right)\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{II}_\Lambda}\right]$$

$$\frac{\partial\Phi_\Delta}{\partial|\partial w/\partial\bar\xi|}=\frac{\partial\Phi}{\partial|\partial w/\partial\bar\xi|}+\frac{2}{\Delta^2}\left|\frac{\partial w}{\partial\bar\xi}\right|\frac{\partial\Phi}{\partial(r/r^\circ)}= \tag{3.7}$$

$$=2\left[\frac{1}{\Delta^2}\left|\frac{\partial w}{\partial\bar\xi}\right|\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{I}_\Lambda}+\left|\frac{\partial w}{\partial\bar\xi}\right|\left(-1+\frac{2}{\Delta^2}\left|\frac{\partial w}{\partial\xi}\right|\right)\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{II}_\Lambda}\right]$$

Далее, согласно соотношениям (1.11), (1.5), (2.5) и (2.7) имеем

$$\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_r=2\frac{\partial w}{\partial\xi}\left|\frac{\partial w}{\partial\xi}\right|^{-1}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{I}_\Lambda}+\left(\left|\frac{\partial w}{\partial\xi}\right|+\frac{1}{\Delta}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{II}_\Lambda}+\frac{p}{\Delta}\right]$$

$$\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_3=-2\frac{\partial w}{\partial\bar\xi}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{II}_\Lambda}+\frac{p}{\Delta}\right],\qquad \{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_{\theta\theta}=\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{I}_\Lambda}+2\left|\frac{\partial w}{\partial\xi}\right|\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{II}_\Lambda}+p\Delta \tag{3.8}$$

Если ввести новую вещественную функцию

$$q(\xi,\bar\xi)=\frac{2}{\Delta^2}\left[p\Delta+\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{I}_\Lambda}+2\left|\frac{\partial w}{\partial\xi}\right|\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{II}_\Lambda}\right]$$

и использовать соотношения (3.7), то из (3.8) вытекает для несжимаемого материала следующий компактный закон упругости

$$\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_r=\frac{\partial w}{\partial\xi}\left[\left|\frac{\partial w}{\partial\xi}\right|^{-1}\frac{\partial\Phi_\Delta}{\partial|\partial w/\partial\xi|}+q\right]$$

$$\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_3=\frac{\partial w}{\partial\bar\xi}\left[\left|\frac{\partial w}{\partial\bar\xi}\right|^{-1}\frac{\partial\Phi_\Delta}{\partial|\partial w/\partial\bar\xi|}-q\right],\qquad \{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_{\theta\theta}=\frac{q\Delta^2}{2} \tag{3.9}$$

Коль скоро найдены основные функции $w(\xi, \bar\xi)$ и $q(\xi, \bar\xi)$, для определения условных напряжений можно использовать соотношения (1.14). Согласно (1.3), (1.5), (2.7) и (2.8) имеем

$$\Sigma_r{}^\circ=\frac{1}{2}\left|\frac{\partial w}{\partial\xi}\right|^{-1}\left[\overline{\frac{\partial w}{\partial\xi}}\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_r+\frac{\partial w}{\partial\xi}\overline{\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_r}\right]$$

$$\Sigma_3{}^\circ=\overline{\frac{\partial w}{\partial\xi}}\left|\frac{\partial w}{\partial\xi}\right|^{-1}\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_3,\qquad \Sigma_{\theta\theta}{}^\circ=\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_{\theta\theta}$$

Используя теперь законы упругости (3.3) и (3.9), получаем:
для сжимаемого материала

$$\Sigma_r{}^\circ\equiv\sigma_{rr}{}^\circ+\sigma_{33}{}^\circ=\partial\Phi/\partial|\partial w/\partial\xi|$$

$$\Sigma_3{}^\circ\equiv\sigma_{rr}{}^\circ-\sigma_{33}{}^\circ+i2\sigma_{r3}{}^\circ=\overline{\frac{\partial w}{\partial\xi}}\frac{\partial w}{\partial\bar\xi}\left|\frac{\partial w}{\partial\xi}\right|^{-1}\left|\frac{\partial w}{\partial\bar\xi}\right|^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial|\partial w/\partial\bar\xi|}$$

$$\sigma_{33}{}^\circ=\partial\Phi/\partial(r/r^\circ) \tag{3.10}$$

для несжимаемого материала

$$\Sigma_r^\circ \equiv \sigma_{rr}^\circ + \sigma_{33}^\circ = \frac{\partial \Phi_\Delta}{\partial |\partial w/\partial \xi|} + \left|\frac{\partial w}{\partial \xi}\right| q$$

$$\Sigma_3^\circ \equiv \sigma_{rr}^\circ - \sigma_{33}^\circ + i2\sigma_{r3}^\circ = \frac{\partial w}{\partial \xi}\frac{\overline{\partial w}}{\partial \bar\xi}\left|\frac{\partial w}{\partial \xi}\right|^{-1}\left|\frac{\partial w}{\partial \bar\xi}\right|^{-1}\left[\frac{\partial \Phi_\Delta}{\partial |\partial w/\partial \bar\xi|} - \left|\frac{\partial w}{\partial \bar\xi}\right| q\right]$$

$$\sigma_{\theta\theta}^\circ = \Delta^2 q/2 \tag{3.11}$$

Иногда удобно вести рассмотрение в главных осях деформации и напряжений. Согласно (3.1) и очевидным выражениям $I_\Lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, $II_\Lambda = \lambda_1\lambda_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_3$, $III_\Lambda = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ имеем при $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$:

$$\left|\frac{\partial w}{\partial \xi}\right| = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, \qquad \left|\frac{\partial w}{\partial \bar\xi}\right| = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}, \qquad \lambda_3 = \frac{r}{r^\circ} \tag{3.12}$$

Здесь λ_i — главные кратности удлинений. Далее, из соотношений (3.10) получаем для сжимаемого материала

$$\sigma_{rr}^\circ = \frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial |\partial w/\partial \xi|} + \frac{1}{4}\left[\frac{\overline{\partial w}}{\partial \xi}\frac{\partial w}{\partial \bar\xi} + \frac{\partial w}{\partial \xi}\frac{\overline{\partial w}}{\partial \bar\xi}\right]\left|\frac{\partial w}{\partial \xi}\right|^{-1}\left|\frac{\overline{\partial w}}{\partial \bar\xi}\right|^{-1}\frac{\partial \Phi}{\partial |\overline{\partial w}/\partial \bar\xi|}$$

$$\sigma_{33}^\circ = \frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial |\partial w/\partial \xi|} - \frac{1}{4}\left[\frac{\overline{\partial w}}{\partial \xi}\frac{\partial w}{\partial \bar\xi} + \frac{\partial w}{\partial \xi}\frac{\overline{\partial w}}{\partial \bar\xi}\right]\left|\frac{\partial w}{\partial \xi}\right|^{-1}\left|\frac{\overline{\partial w}}{\partial \bar\xi}\right|^{-1}\frac{\partial \Phi}{\partial |\overline{\partial w}/\partial \bar\xi|}$$

$$\sigma_{r3}^\circ = -\frac{i}{4}\left[\frac{\overline{\partial w}}{\partial \xi}\frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{\partial w}{\partial \xi}\frac{\overline{\partial w}}{\partial \bar\xi}\right]\left|\frac{\partial w}{\partial \bar\xi}\right|^{-1}\left|\frac{\partial w}{\partial \bar\xi}\right|^{-1}\frac{\partial \Phi}{\partial |\overline{\partial w}/\partial \bar\xi|}$$

Введем главные условные напряжения σ_i°. Используя только что выписанные выражения, получаем, выписывая два инварианта:

$$\sigma_1^\circ + \sigma_2^\circ = \sigma_{rr}^\circ + \sigma_{33}^\circ = \partial\Phi/\partial|\partial w/\partial \xi|$$

$$\sigma_1^\circ\sigma_2^\circ = \sigma_{33}^\circ\sigma_{rr}^\circ - \sigma_{r3}^{\circ 2} = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial |\partial w/\partial \xi|}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial |\partial w/\partial \bar\xi|}\right)^2\right]$$

Отсюда и находим выражения для главных условных напряжений при сжимаемом материале

$$\sigma_1^\circ = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial |\partial w/\partial \xi|} + \frac{\partial \Phi}{\partial |\partial w/\partial \bar\xi|}\right), \qquad \sigma_2^\circ = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial |\partial w/\partial \xi|} - \frac{\partial \Phi}{\partial |\partial w/\partial \bar\xi|}\right)$$

$$\sigma_3^\circ = \sigma_{\theta\theta}^\circ = \partial\Phi/\partial(r/r^\circ) \tag{3.13}$$

Аналогично выводятся выражения при несжимаемом материале

$$\sigma_1^\circ = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi_\Delta}{\partial |\partial w/\partial \xi|} + \frac{\partial \Phi_\Delta}{\partial |\partial w/\partial \bar\xi|}\right) + \frac{q}{2}\left(\left|\frac{\partial w}{\partial \xi}\right| - \left|\frac{\partial w}{\partial \bar\xi}\right|\right)$$

$$\sigma_2^\circ = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi_\Delta}{\partial |\partial w/\partial \xi|} - \frac{\partial \Phi_\Delta}{\partial |\partial w/\partial \bar\xi|}\right) + \frac{q}{2}\left(\left|\frac{\partial w}{\partial \xi}\right| + \left|\frac{\partial w}{\partial \bar\xi}\right|\right)$$

$$\sigma_3^\circ = \sigma_{\theta\theta}^\circ = \frac{q}{2}\left(\left|\frac{\partial w}{\partial \xi}\right|^2 - \left|\frac{\partial w}{\partial \xi}\right|^2\right)^2 \tag{3.14}$$

Напомним, что появление дополнительной искомой вещественной функции $q(\xi, \bar\xi)$ «компенсируется» дополнительным уравнением — условием несжимаемости. Последнее согласно (2.3), (3.4) и (2.6) имеет вид

$$\frac{w + \bar w}{\xi + \bar\xi}\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\frac{\overline{\partial w}}{\partial \xi} - \frac{\partial w}{\partial \bar\xi}\frac{\overline{\partial w}}{\partial \bar\xi}\right) = 1 \tag{3.15}$$

4. Уравнения движения. Граничные условия. Прежде всего из соотношений (1.3) и (2.4) находим (при $\chi\to\theta^\circ$):

$$\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_1=[\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_{rr}+\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_{\theta\theta}] \tag{4.1}$$

$$\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_2=[\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_{rr}-\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_{\theta\theta}]e^{i2\theta^\circ},\quad \{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_3=[\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_{r3}]e^{i\theta^\circ}$$

$$\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_4=[\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_{3r}]e^{i\theta^\circ},\ \{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_5=[\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_{33}]$$

При этом в силу осесимметричности нагрузки величины в квадратных скобках не зависят от θ°.

Подстановка полученных выражений в комплексные уравнения (1.12) приводит с учетом (2.1) к уравнениям

$$\frac{\partial\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_{rr}}{\partial r^\circ}+\frac{\partial\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_{3r}}{\partial x_3{}^\circ}+\frac{\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_{rr}-\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_{\theta\theta}}{r^\circ}+\rho^\circ\left(f_r-\frac{\partial^2 r}{(\partial t)^2}\right)=0$$

$$\frac{\partial\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_{r3}}{\partial r^\circ}+\frac{\partial\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_{33}}{\partial x_3{}^\circ}+\frac{\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_{r3}}{r^\circ}+\rho^\circ\left(f_3-\frac{\partial^2 x_3}{(\partial t)^2}\right)=0 \tag{4.2}$$

Умножая второе уравнение на i и прибавляя полученное к первому, получаем с учетом (2.3) и (2.4) комплексное уравнение движения

$$\frac{\partial\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_r}{\partial\bar\xi}+\frac{\partial\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_3}{\partial\xi}+\frac{\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_r+\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_3}{2r^\circ}-\frac{\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_{\theta\theta}}{r^\circ}+$$

$$+\rho^\circ\left(f_r+if_3-\frac{\partial^2 w}{(\partial t)^2}\right)=0 \tag{4.3}$$

С учетом того, что согласно (2.3) $\partial r^\circ/\partial\xi=\partial r^\circ/\partial\bar\xi=1/2$ уравнению (4.3) можно придать и более компактный вид:

$$\frac{\partial[r^\circ\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_r]}{\partial\bar\xi}+\frac{\partial[r^\circ\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_3]}{\partial\xi}-\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_{\theta\theta}+\rho^\circ r^\circ\left(f_r+if_3-\frac{\partial^2 w}{(\partial t)^2}\right)=0 \tag{4.4}$$

Рассмотрим граничные условия. Прежде всего согласно (1.5) и осесимметричности задачи имеем ($\chi\to\theta^\circ$, $n_\theta{}^\circ=0$, $\sigma_{n^\circ\theta}=0$):

$$n_1{}^\circ+in_2{}^\circ=n_r{}^\circ e^{i\theta^\circ},\quad \sigma_{n^\circ 1}+i\sigma_{n^\circ 2}=\sigma_{n^\circ r}e^{i\theta^\circ}$$

Подстановка этих выражений, а также (4.1) в силовое граничное условие (1.13) дает

$$n_r{}^\circ\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_{rr}+n_3{}^\circ\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_{3r}=\sigma_{n^\circ r},\ n_r{}^\circ\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_{r3}+n_3{}^\circ\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_{33}=\sigma_{n^\circ 3} \tag{4.5}$$

Из фиг. 3 следует

$$n_r{}^\circ=t_3{}^\circ=\cos\gamma^\circ=dx_3{}^\circ/ds^\circ,\ n_3{}^\circ=-t_r{}^\circ=\sin\gamma^\circ=-dr^\circ/ds^\circ$$

$$n_r{}^\circ+in_3{}^\circ=e^{i\gamma^\circ}=-id\xi/ds^\circ \tag{4.6}$$

Умножая второе из соотношений (4.5) на i и прибавляя полученное к первому, получаем с учетом (4.6) граничное *силовое* условие

$$e^{i\gamma^\circ}\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_r+e^{-i\gamma^\circ}\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_3=\sigma_{n^\circ r}(s^\circ)+i\sigma_{n^\circ 3}(s^\circ)=$$

$$=e^{i\gamma^\circ}[\sigma_{n^\circ n^\circ}(s^\circ)+i\sigma_{n^\circ t^\circ}(s^\circ)] \tag{4.6}$$

Из геометрического граничного условия $w=w(s^\circ)$ дифференцированием по дуге получаем с учетом последнего из соотношений в (4.6) дисторсионное граничном условие

$$e^{i\gamma^\circ}\partial w/\partial\xi-e^{-i\gamma^\circ}\partial w/\partial\bar\xi=-idw(s^\circ)/ds^\circ \tag{4.7}$$

Частным видом (3.11) является граничное условие заделки $w=\xi(s^\circ)$, подстановка последнего в (4.7) приводит с учетом (4.6) к граничному условию жесткого края

$$e^{i\gamma^\circ}\partial w/\partial\xi-e^{-i\gamma^\circ}\partial w/\partial\bar\xi=e^{i\gamma^\circ}$$

5. Основная краевая задача. Используя полученные соотношения, сформулируем основную краевую задачу для сжимаемого и несжимаемого материалов. Будем при этом считать, что поверхность тела представима в виде $S^0=S_\sigma^0+S_u^0$, где на S_σ^0 заданы напряжения, а на S_u^0 — условия жесткого края. Итак, для сжимаемого материала

$$\frac{\partial\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_r}{\partial\bar{\xi}}+\frac{\partial\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_3}{\partial\xi}+\frac{\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_r+\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_3}{2r^\circ}-\frac{\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_{\theta\theta}}{r^\circ}+$$
$$+\rho^\circ\left(f_r+if_3-\frac{\partial^2 w}{(\partial t)^2}\right)=0$$
$$\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_r=\frac{\partial w}{\partial\xi}\left|\frac{\partial w}{\partial\xi}\right|^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial|\partial w/\partial\xi|},\quad \{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_3=$$
$$=\frac{\partial w}{\partial\bar{\xi}}\left|\frac{\partial w}{\partial\bar{\xi}}\right|^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial|\partial w/\partial\bar{\xi}|} \tag{5.1}$$
$$\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_{\theta\theta}=\partial\Phi/\partial(r/r^\circ);\ r/r^\circ=(w+\bar{w})/(\xi+\bar{\xi})$$
$$e^{i\gamma^\circ}\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_r+e^{-i\gamma^\circ}\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_3=\sigma_{n^\circ r}(s^\circ)_2+i\sigma_{n^\circ 3}(s^\circ)$$
$$(s^\circ\in S_\sigma^\circ)=e^{i\gamma^\circ}[\sigma_{n^\circ n^\circ}(s^\circ)+i\sigma_{n^\circ t^\circ}(s^\circ)]$$
$$(s^\circ\in S_u^\circ)\quad e^{i\gamma^\circ}\frac{\partial w}{\partial\xi}-e^{-i\gamma^\circ}\frac{\partial w}{\partial\bar{\xi}}=e^{i\gamma^\circ}$$

для несжимаемого материала

$$\frac{\partial\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_r}{\partial\xi}+\frac{\partial\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_3}{\partial\xi}+\frac{\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_r+\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_3}{2r^\circ}-\frac{\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_{\theta\theta}}{r^\circ}+$$
$$+\rho^\circ\left(f_r+if_3-\frac{\partial^2 w}{(\partial t)^2}\right)=0$$
$$\frac{w+\bar{w}}{\xi+\bar{\xi}}\left(\left|\frac{\partial w}{\partial\xi}\right|^2-\left|\frac{\partial w}{\partial\bar{\xi}}\right|^2\right)=1$$
$$\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_r=\frac{\partial w}{\partial\xi}\left[\left|\frac{\partial w}{\partial\xi}\right|^{-1}\frac{\partial\Phi_\Delta}{\partial|\partial w/\partial\xi|}+q\right]$$
$$\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_3=\frac{\partial w}{\partial\xi}\left[\left|\frac{\partial w}{\partial\bar{\xi}}\right|^{-1}\frac{\partial\Phi_\Delta}{\partial|\partial w/\partial\bar{\xi}|}-q\right] \tag{5.2}$$
$$\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_{\theta\theta}=\frac{q}{2}\left(\left|\frac{\partial w}{\partial\xi}\right|^2-\left|\frac{\partial w}{\partial\bar{\xi}}\right|^2\right)$$
$$e^{i\gamma^\circ}\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_r+e^{-i\gamma^\circ}\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_3=\sigma_{n^\circ r}(s^\circ)+i\sigma_{n^\circ 3}(s^\circ)$$
$$(s^\circ\in S_\sigma^\circ)=e^{i\gamma^\circ}[\sigma_{n^\circ n^\circ}(s^\circ)+i\sigma_{n^\circ t^\circ}(s^\circ)]$$
$$(s^\circ\in S_u^\circ)=e^{i\gamma^\circ}\partial w/\partial\xi-e^{-i\gamma^\circ}\partial w/\partial\bar{\xi}=e^{i\gamma^\circ}$$

Коль скоро основные искомые функции $w(\xi,\bar{\xi})$ и $q(\xi,\bar{\xi})$ найдены, через них определяются и остальные величины: угол поворота материальной частицы (2.8), кратность изменения площади (2.6), комплексные компоненты тензора условных напряжений для сжимаемого материала (3.10) и несжимаемого (3.11). В главных осях деформации и напряжений имеем соотношения (3.12)—(3.14).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Черных К. Ф.* Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.
2. *Черных К. Ф., Литвиненкова З. Н.* Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. 254 с.
3. *Новожилов В. В.*, *Черных К. Ф.* Об «истинных» мерах напряжений и деформаций в нелинейной механике деформируемого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 73–79.

Ленинград

Поступила в редакцию 22.I.1990