ных волн образуется две другие ударные волны: впереди идет быстрая, за ней медленная. Таким образом, решение выходит на автомодельную асимптотику, соответствующую решению первого типа автомодельной задачи.

Также численно была исследована задача о взаимодействии медленной ударной волны, соответствующей скачку из точки A в точку эволюционного участка LD и малого возмущения, сформированного перед ударной волной. В результате образуется одна ударная волна.

Таким образом, для сред с $\varkappa_1<0$ решение первого типа (последовательность быстрой простой или ударной волны и медленной ударной волны) реализуется наиболее часто. Аналогичный вывод был сделан в [4], при численном исследовании решения в области неединственности для упругих сред с $\varkappa_1>0$.

Автор благодарит Куликовского А. Г. и Свешникову Е. И. за внимание к работе и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Куликовский А. Г., Свешникова Е. И.* Автомодельная задача о действии внезапной нагрузки на границу упругого полупространства // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 284–291.
2. *Куликовский А. Г., Свешникова Е. И.* Нелинейные волны, возникающие при изменении напряжений на границе упругого полупространства // Вопросы нелинейной механики сплошной среды. Таллин: Валгус, 1985. С. 133–145.
3. *Куликовский А. Г., Свешникова Е. И.* О структуре квазипоперечных упругих ударных волн // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 6. С. 926–932.
4. *Чугайнова А. П.* О формировании автомодельного решения в задаче о нелинейных волнах в упругом полупространстве // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 692–697.

Москва

Поступила в редакцию
8.XII.1988

УДК 539.3

Ю. И. ВОЛОГЖАНИНОВ

ОПТИМАЛЬНЫЙ ПО ОБЪЕМУ ВАРИАНТ ПОЛЯРИЗАЦИОННО-ОПТИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ ДЛЯ РАЗДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЛОСКОСТЯХ СИММЕТРИИ

Вопросы минимизации объема экспериментальных измерений, необходимых для полного определения напряжений, рассматривались в [1–4].

Исследование пространственных задач поляризационно-оптическим методом связано с большим объемом измерений. Известные методики разделения напряжений в некоторой плоскости, в том числе и в плоскости симметрии, предполагают наличие результатов нормального и наклонного просвечивания как минимум в двух параллельных срезах или данных нормального просвечивания в перпендикулярных семействах срезов. В публикуемой работе показано, что объем необходимых для разделения напряжений измерений может быть существенно уменьшен. Установлено, что при разделении напряжений в плоскостях симметрии на основе метода разности касательных напряжений (МРКН), минимальный объем измерений соответствует использованию срезов или оптически-чувствительных слоев, наклоненных к плоскости симметрии под углом 45°.

Необходимые данные для численного интегрирования вдоль оси x уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+X=0 \tag{1}$$

могут быть получены на основе результатов нормального и наклонного просвечивания двух параллельных срезов, срединные плоскости которых $y=0$, $y=\Delta y$ или на основе нормального просвечивания двух перпендикулярных срезов, срединные плоскости которых $y=0$, $z=0$. Это обычный путь разделения напряжений на основе МРКН [5].

Рассмотрим возможности, появляющиеся при использовании срезов в плоскостях xy_1 и xz_1, повернутых относительно плоскостей xy и xz на угол α. Уравнение (1) в осях x, y_1, z_1 имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy_1}}{\partial y_1}+\frac{\partial \tau_{xz_1}}{\partial z_1}+X=0 \tag{2}$$

Используя связь между координатами и компонентами напряжений в осях x, y, z и x, y_1, z_1:

$$
\begin{gathered}
x=x_1,\ y=y_1\cos\alpha-z_1\sin\alpha\\
z=y_1\sin\alpha+z_1\cos\alpha,\ \tau_{xy_1}=\tau_{xy}\cos\alpha+\tau_{xz}\sin\alpha\\
\tau_{xz_1}=-\tau_{xy}\sin\alpha+\tau_{xz}\cos\alpha
\end{gathered}
\tag{3}
$$

находим

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial\tau_{xy_1}}{\partial y_1}=\frac{\partial\tau_{xy_1}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y_1}+\frac{\partial\tau_{xy_1}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y_1}+\frac{\partial\tau_{xy_1}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y_1}=\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial y}+\sin\alpha\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\\
\times(\tau_{xy}\cos\alpha+\tau_{xz}\sin\alpha)=\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}\cos^2\alpha+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\sin^2\alpha+\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial y}\right)\frac{\sin 2\alpha}{2}\\
\frac{\partial\tau_{xz_1}}{\partial z_1}=\frac{\partial\tau_{xz_1}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z_1}+\frac{\partial\tau_{xz_1}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z_1}+\frac{\partial\tau_{xz_1}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial z_1}=\left(-\sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}+\cos\alpha\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\\
\times(-\tau_{xy}\sin\alpha+\tau_{xz}\cos\alpha)=\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}\sin^2\alpha+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\cos^2\alpha-\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial y}\right)\frac{\sin 2\alpha}{2}
\end{gathered}
\tag{4}
$$

Пусть xz – плоскость симметрии напряженно-деформированного состояния. Тогда τ_{xz} – четная, а τ_{xy} – нечетная функции от y:

$$
\begin{gathered}
\tau_{xz}=f_0(x,z)+y^2f_2(x,z)+\ldots\\
\tau_{xy}=yf_1(x,z)+y^3f_3(x,z)+\ldots
\end{gathered}
\tag{5}
$$

Из (5) следует, что вдоль оси x, где $y=0$, выполняются соотношения $\partial\tau_{xy}/\partial z=\partial\tau_{xz}/\partial y=0$.

При этом соотношения (4) упрощаются:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial\tau_{xy_1}}{\partial y_1}=\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}\cos^2\alpha+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\sin^2\alpha\\
\frac{\partial\tau_{xz_1}}{\partial z_1}=\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}\sin^2\alpha+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\cos^2\alpha
\end{gathered}
$$

Остановимся на случае $\alpha=45°$. При этом $\partial\tau_{xy_1}/\partial y_1=\partial\tau_{xz_1}/\partial z_1$ и уравнение равновесия (2) принимает вид

$$\partial\sigma_x/\partial x+2\partial\tau_{xy_1}/\partial y_1+X=0$$

из которого следует, что для нахождения σ_x вдоль оси x в плоскости симметрии xz достаточно данных нормального просвечивания среза в плоскости xy_1, составляющей с плоскостью симметрии угол в 45°. На оси x касательные напряжения $\tau_{xy}=\tau_{yz}=0$. С учетом этого из (3) находим, что на оси x: $\tau_{xz}=\sqrt{2}\tau_{xy_1}$.

Кроме τ_{xy_1}, нормальное просвечивание среза xy_1 дает значения разностей нормальных напряжений $r_{xy_1}=\sigma_x-\sigma_{y_1}$.

На оси x эта величина, с учетом формул преобразования напряжений [5] при $\alpha=45°$, равна $r_{xy_1}=\sigma_x-{}^1/_2(\sigma_y+\sigma_z)$. Зная σ_x и r_{xy_1} отсюда можно найти сумму $\sigma_y+\sigma_z=2(\sigma_x-r_{xy_1})$. Для получения отдельных значений σ_y и σ_z требуются данные наклонного просвечивания среза xy_1.

Заметим, что в тех случаях, когда xz и xy являются плоскостями одинаковой симметрии, на оси x равны σ_y и σ_z, $\partial\tau_{xy}/\partial y$ и $\partial\tau_{xz}/\partial z$, уравнение (1) имеет вид

$$\partial\sigma_x/\partial x+2\partial\tau_{xy}/\partial y+X=0 \tag{6}$$

Видно, что все напряжения на оси x разделяются по данным нормального просвечивания среза в плоскости xy или xz. Так, в частности, обстоит дело при разделении напряжений вдоль оси вращения z в осесимметричных задачах. При этом аналогом уравнения (6) является уравнение

$$\partial\sigma_z/\partial z+2\partial\tau_{\rho z}/\partial\rho+Z=0$$

Таким образом, для нахождения всех напряжений в плоскости симметрии, достаточно данных поляризационно-оптических измерений при нормальном и наклонном просвечивании лишь одного семейства срезов, составляющих угол, равный 45° с плоскостью симметрии. При этом объем необходимых измерений существенно меньше, чем при использовании обычного МРКН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вологжанинов Ю. И.* Приближенный метод разделения напряжений в фотоупругости // Прикл. механика. 1981. Т. 17. № 8. С. 56–61.
2. *Вологжанинов Ю. И.* Приближенный метод разделения напряжений в пространственной фотоупругости // Докл. АН УССР. Сер. А. 1982. № 10. С. 31–33.
3. *Гузь А. Н., Вологжанинов Ю. И.* Определение напряжений на основе ограниченного объема экспериментальных измерений // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277. № 3. С. 563–565.

4. *Нетребко В. П., Вологжанинов Ю. И.* Приближенный метод разделения напряжений в фотоупругости ортотропных материалов // Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ. 1987. С. 30–39.
5. *Александров А. Я., Ахметзянов М. Х.* Поляризационно-оптические методы механики деформируемого тела. М.: Наука, 1973. 576 с.

Киев

Поступила в редакцию
26.VII.1988
