ны трещины, проходят по ее берегу, а затем срываются под прямым углом и возвращаются в вершину. Для антисимметричной части $\zeta^{(3)}$ потоков $\Pi_{2,3}$ вдоль берегов трещины нет (нет уголковых членов).

Выявленный характер распространения потоков энергии у конца трещины, по-видимому, является общим для всех тонких дефектов, у концов которых наблюдается особенность перерезывающей силы вида $r^{-1/2}$ [2, 4], т. е. в разложении (3) присутствует член $\zeta^{(3)}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Попов Г. Я., Толкачев В. М.* Проблема контакта жестких тел с тонкостенными элементами. // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 4. С. 192–206.
2. *Онищук О. В., Попов Г. Я.* О некоторых задачах изгиба пластин с трещинами и тонкими включениями.// Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 4. С. 141–150.
3. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. // М.: Наука, 1982. 342 с.
4. *Климюк Ю. С., Онищук О. В., Попов Г. Я.* Задачи о колебаниях и устойчивости прямоугольной пластинки с тонким включением. // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 6. С. 137–143.
5. *Хенл X., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции. // М.: Мир, 1964. 428 с.
6. *Кондратьев В. А., Олейник О. А.* Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях. // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38. Вып. 2. С. 3–76.
7. *Белинский Б. П., Коузов Д. П.* О формулах типа формул Грина для изгибно колеблющейся пластины. // Акуст. ж. 1981. Т. 27. Вып. 5. С. 710–718.

Ленинград — Поступила в редакцию 30.XII.1988

УДК 539.3:534.1

А. П. ЧУГАЙНОВА

О ВЫХОДЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН НА АВТОМОДЕЛЬНЫЙ РЕЖИМ В ЗАДАЧЕ О ДЕЙСТВИИ ВНЕЗАПНОГО ИЗМЕНЕНИЯ НАГРУЗКИ НА ГРАНИЦЕ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Изучаются движения в виде плоских нелинейных квазипоперечных волн в слабоанизотропной упругой среде.

В [1, 2] при построении решения автомодельной задачи о действии внезапного изменения нагрузки на границе упругого полупространства была обнаружена неединственность решения для некоторых областей параметров задачи. Вопрос выбора решения рассматривался для определенного класса упругих сред в [3]. В данной работе численно найдены автомодельные асимптотики ряда неавтомодельных задач для вязкоупругих сред, не рассмотренных в [3].

Аналогично [3] используются приближенные уравнения, описывающие слабонелинейные квазипоперечные волны в вязкоупругой среде с малой анизотропией, распространяющиеся только в одну сторону

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial u_\alpha}-\frac{\tau_{\alpha 3}}{2(\mu\rho_0)^{1/2}}\right)=0 \quad (\alpha=1,2) \qquad (1)$$

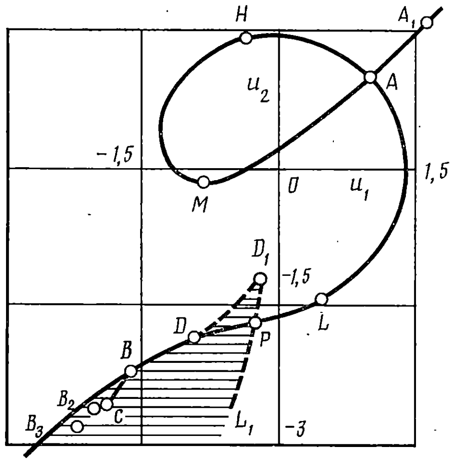
$$R(u_1, u_2)={}^1/_2(f-g)u_1^2+{}^1/_2(f+g)u_2^2-{}^1/_8\varkappa_1(u_1^2+u_2^2)^2$$

$$u_\alpha=\partial w_\alpha/\partial x,\ \tau_{\alpha 3}=\rho_0\nu\partial u_\alpha/\partial t\approx\nu(\mu\rho_0)^{1/2}\partial u_\alpha/\partial x$$

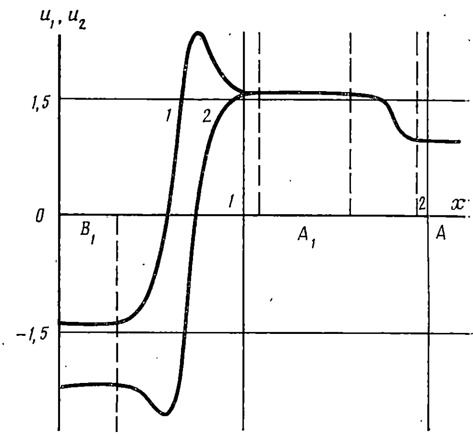
Здесь w_α – перемещения частиц, рассматриваемые как функции лагранжевых координат x_1, x_2, $x_3=x$, $\tau_{\alpha 3}$ – компоненты тензора вязких напряжений, ρ_0 – плотность в ненапряженном состоянии, μ – упругий коэффициент Ламе, ν – кинематический коэффициент вязкости, g – параметр анизотропии ($g\ll f$), f – характеристическая скорость при отсутствии анизотропии и нелинейности, f, g – постоянные, $\varkappa_1$ – постоянная с размерностью скорости, характеризующая нелинейные эффекты.

В результате построения решения автомодельной задачи о внезапном изменении нагрузки на границе упругого полупространства [1, 2] отмечено, что одним и тем же начальным условиям $u_1=U_1$, $u_2=U_2$ при $t=0$, $x>0$ и граничным условиям $u_1=u_1{}^*$ $u_2=u_2{}^*$ при $x=0$, $t>0$ в некоторой области задаваемых параметров могут соответствовать два различных решения, состоящих из последовательности простых и ударных волн, если значение выражения $2g/[(U_1^2+U_2^2)\varkappa_1]^{-1}$ достаточно мало.

Поведение ударных и простых волн существенно зависит от знака упругой константы $\varkappa_1$. В [4] исследовано решение в области неединственности для упругих сред с $\varkappa_1>0$. Ниже приводятся результаты аналогичного исследования решения для упругих сред с $\varkappa_1<0$. На фиг. 1 изображена ударная адиабата *AMHALD* (множество



Фиг. 1



Фиг. 2

состояний u_1, u_2, в которые можно попасть скачком из начального состояния U_1, U_2, соблюдая законы сохранения импульса и массы). Точка $A(1, 1)$ – начальная точка ударной адиабаты $AMHALD$. Точки H, L, D – точки Жуге. В точках Жуге L, D – скорость ударной волны равна характеристической по состоянию перед ней, в точке H скорость ударной волны равна характеристической скорости по состоянию за ней. Заштрихованная на фиг. 1 область является областью неединственности автомодельного решения ($2g/\varkappa_1=-0{,}1$). Эта область представляет собой множество точек, координаты которых u_1^*, u_2^* соответствуют граничным условиям при $x=0$, $t>0$. Область ограничена участком ударной адиабаты ниже точки D и линиями D_1D, D_1L_1 – найденными и описанными в [2].

Для выделенной области неединственности, расположенной ниже отрезка ударной адиабаты DP, теоретически были найдены два решения [2]. Решение первого типа – последовательность двух ударных волн. Решение второго типа содержит быструю ударную волну и сложную медленную волну. Сложная медленная волна это последовательность волн, движущихся с близкими скоростями. Эта последовательность волн состоит из медленной ударной волны Жуге (скачок типа $A\to H$), простой волны и медленной ударной волны Жуге (скачок типа $A\to L$). Для части области неединственности, расположенной выше отрезка DP, решения содержат не быструю ударную волну, а быструю простую волну.

С целью проведения численного исследования решения в области неоднозначности поставлена начально-краевая задача для уравнения (1), для решений которой рассмотренные выше автомодельные решения могут представлять асимптотики при $t\to\infty$. Расчет проводился в области x, t, ограниченной отрезком оси x и неподвижными правой и левой границами. Начальные условия ($t=0$) и правое граничное условие ($t>0$, $x=l$) взяты в виде $u_1=1$, $u_2=1$ (точка A на фиг. 1). На левой границе ($t>0$, $x=0$) принято $u_1^*=-1{,}4$, $u_2^*=-2{,}2$ (точка B_1 на фиг. 1 из области неединственности решения).

Результаты расчетов для некоторого момента времени приведены на фиг. 2. На этом графике выделена последовательность двух ударных волн: скачок $A\to A_1$, затем скачок $A_1\to B_1$. Точкам A, A_1, B_1 на фиг. 1 соответствуют участки постоянных значений u_1, u_2 на фиг. 2, которые выделены штрихпунктирными линиями. Эти постоянные значения представляют состояния за и перед ударными волнами $A\to A_1$, $A_1\to B_1$ и удовлетворяют уравнениям соответствующих ударных адиабат с принятой степенью точности. Результаты, приведенные на фиг. 2, полностью совпадают с решением первого типа, рассмотренного теоретически.

Интересно отметить изменение величин u_1, u_2 в структуре ударной волны $A_1\to B_1$ (см. фиг. 2). Сначала величина u_1 достигает локального максимума, затем величина u_2 достигает локального минимума. Это полностью согласуется с проведенным качественным исследованием решений, представляющих структуру соответствующих ударных волн. Качественное исследование проводилось аналогично [3].

Аналогичные расчеты проводились для других значений u_1^*, u_2^* на левой границе области x, t соответствующих точкам $B_2(-2; -2{,}6)$, $B_3(-2{,}2; -2{,}8)$ из области неединственности. В этих случаях имело место решение первого типа.

Для сред с $\varkappa_1<0$ исследована задача о взаимодействии двух ударных волн, одна из которых догоняет другую. Решение этой задачи представляет интерес, когда соответствующее автомодельное решение неединственно. С этой целью была сформирована структура медленной ударной волны, соответствующей эволюционному скачку $A\to B$ (фиг. 1), затем структура догоняющей ее быстрой ударной волны, соответствующей эволюционному скачку $B\to C$ (фиг. 1). Точка C принадлежит ударной адиабате, проведенной из точки как начальной, и принадлежит области неединственности решения автомодельной задачи, соответствующей точке A как начальной. В результате проведенного численного расчета обнаружено, что при взаимодействии этих ударных волн образуется две другие ударные волны: впереди идет быстрая, за ней медленная. Таким образом, решение выходит на автомодельную асимптотику, соответствующую решению первого типа автомодельной задачи.

Также численно была исследована задача о взаимодействии медленной ударной волны, соответствующей скачку из точки A в точку эволюционного участка LD и малого возмущения, сформированного перед ударной волной. В результате образуется одна ударная волна.

Таким образом, для сред с $\varkappa_1<0$ решение первого типа (последовательность быстрой простой или ударной волны и медленной ударной волны) реализуется наиболее часто. Аналогичный вывод был сделан в [4], при численном исследовании решения в области неединственности для упругих сред с $\varkappa_1>0$.

Автор благодарит Куликовского А. Г. и Свешникову Е. И. за внимание к работе и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Куликовский А. Г., Свешникова Е. И.* Автомодельная задача о действии внезапной нагрузки на границу упругого полупространства // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 284–291.
2. *Куликовский А. Г., Свешникова Е. И.* Нелинейные волны, возникающие при изменении напряжений на границе упругого полупространства // Вопросы нелинейной механики сплошной среды. Таллин: Валгус, 1985. С. 133–145.
3. *Куликовский А. Г., Свешникова Е. И.* О структуре квазипоперечных упругих ударных волн // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 6. С. 926–932.
4. *Чугайнова А. П.* О формировании автомодельного решения в задаче о нелинейных волнах в упругом полупространстве // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 692–697.

Москва

Поступила в редакцию 8.XII.1988

УДК 539.3

Ю. И. ВОЛОГЖАНИНОВ

ОПТИМАЛЬНЫЙ ПО ОБЪЕМУ ВАРИАНТ ПОЛЯРИЗАЦИОННО-ОПТИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ ДЛЯ РАЗДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЛОСКОСТЯХ СИММЕТРИИ

Вопросы минимизации объема экспериментальных измерений, необходимых для полного определения напряжений, рассматривались в [1–4].

Исследование пространственных задач поляризационно-оптическим методом связано с большим объемом измерений. Известные методики разделения напряжений в некоторой плоскости, в том числе и в плоскости симметрии, предполагают наличие результатов нормального и наклонного просвечивания как минимум в двух параллельных срезах или данных нормального просвечивания в перпендикулярных семействах срезов. В публикуемой работе показано, что объем необходимых для разделения напряжений измерений может быть существенно уменьшен. Установлено, что при разделении напряжений в плоскостях симметрии на основе метода разности касательных напряжений (МРКН), минимальный объем измерений соответствует использованию срезов или оптически-чувствительных слоев, наклоненных к плоскости симметрии под углом 45°.

Необходимые данные для численного интегрирования вдоль оси x уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+X=0 \tag{1}$$

могут быть получены на основе результатов нормального и наклонного просвечивания двух параллельных срезов, срединные плоскости которых $y=0$, $y=\Delta y$ или на основе нормального просвечивания двух перпендикулярных срезов, срединные плоскости которых $y=0$, $z=0$. Это обычный путь разделения напряжений на основе МРКН [5].

Рассмотрим возможности, появляющиеся при использовании срезов в плоскостях xy_1 и xz_1, повернутых относительно плоскостей xy и xz на угол α. Уравнение (1) в осях x, y_1, z_1 имеет вид

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy_1}}{\partial y_1}+\frac{\partial\tau_{xz_1}}{\partial z_1}+X=0 \tag{2}$$