

волны линии тока энергии, осредненной за период колебаний, строго горизонтальны, вблизи поток энергии, излучаемый штампом вниз, отражаясь от нижней грани слоя, образует замкнутый вихрь энергии. В случае, когда  $\theta=0$ , вертикальный размер данного вихря, очевидно, становится равным толщине слоя и отток энергии на бесконечность, обуславливающий наличие демпфирующей составляющей его реакции, прекращается. Как и в диапазоне  $\omega < \omega^*$  реакция слоя становится такой же, как и у тела конечных размеров.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабешко В. А., Ворович И. И., Образцов И. Ф. Явление высокочастотного резонанса в полуограниченных телах с неоднородностями // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 3. С.
2. Образцов И. Ф., Ворович И. И., Бабешко В. А. Явление высокочастотного резонанса в полуограниченных телах с неоднородностями // Динамические задачи механики сплошной среды: Тез. докл. Региональной конф. Краснодар: Кубан. ун-т, 1988. Ч. 2. С. 26.
3. Babeshko V. A., Obratsov I. Ph., Vorovich I. I. The peculiarity of vibration process localization in Semi-restricted regions. Материалы симпозиума по распространению упругих волн и ультразвуковым неразрушающим методам контроля. Боулдер, США, 1989.
4. Образцов И. Ф., Бабешко В. А. О некоторых особенностях колебания полуограниченных областей // Докл. АН СССР. 1989. Т. 305. С. 306–309.
5. Бабешко В. А. Высокочастотный резонанс массивного штампа // Докл. АН СССР. 1989. Т. 306. № 6. С. 1328–1332.
6. Бабешко В. А. К проблеме динамического разрушения трещиноватых слоистых тел // Докл. АН СССР. 1989. Т. 307. № 2. С. 324–328.

Краснодар

Поступила в редакцию  
20.II.1990

УДК 539.3

© 1990 г.

И. В. АНДРОНОВ, Б. П. БЕЛИНСКИЙ

#### О ПОТОКАХ ЭНЕРГИИ В ОКРЕСТНОСТИ КОНЦА ТРЕЩИНЫ В ИЗГИБНО КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ПЛАСТИНЕ

Установлено отсутствие поглощения и излучения энергии концом трещины в упругой изгибно колеблющейся пластине при наличии особенности перерезывающих сил. Исследовано сложное перераспределение потоков энергии у конца трещины. Приведены рассчитанные в старшем приближении линии токов.

При исследовании статических и динамических задач теории тонких пластин отмечено, что поперечные силы у концов трещин или тонких включений имеют, вооб-

ще говоря, неинтегрируемые особенности. Указанные наблюдения и методы решения соответствующих интегральных уравнений приведены в работах [1-4]. В [2] установлено, что неинтегрируемая составляющая решения интегрального уравнения имеет равнодействующую, равную нулю. Ниже более подробно исследуется механизм компенсации перерезывающих сил, приводящий к отсутствию излучения или поглощения энергии концом тонкого дефекта.

Постановка задачи о колебаниях пластины с трещинами включает в себя требование конечности энергии, запасенной любой ограниченной областью пластины. Фактически это требование означает некоторое ограничение на поведение поля смещений в окрестности конца трещины и представляет собой аналог известного в теории дифракции акустических и электромагнитных волн условия Майкснера [5].

Существенным отличием поведения поля в случае пластины является тот факт, что перерезывающая сила, входящая в выражение потока энергии, может иметь особенность вида  $r^{-1/2}$ , где  $r$  — расстояние до конца трещины [1-4]. Вследствие этого поток энергии через дугу окружности радиуса  $r$  с центром в вершине трещины в любом заданном угле при  $r \rightarrow 0$  стремится к бесконечности. Однако поток энергии через всю окружность ведет себя как  $r^{1/2}$  и стремится к нулю. Таким образом, у конца трещины наблюдается сложное перераспределение потоков энергии.

В окрестности вершины трещины ( $x=0, y>0$ ) рассмотрим уравнение изгибных колебаний пластины

$$(\Delta^2 - k_0^4)\xi = 0 \quad (1)$$

при граничных условиях

$$\xi_{xx} + \nu \xi_{yy} = \xi_{xxx} + (2-\nu)\xi_{xyy} = 0 \quad (x = \pm 0, y > 0) \quad (2)$$

Здесь  $\Delta$  — оператор Лапласа для плоской задачи,  $k_0$  — волновое число изгибных колебаний пластины,  $\nu$  — коэффициент Пуассона. Известно [6], что старшие члены асимптотики смещения в окрестности конца трещины ( $r \rightarrow 0$ ) определяются главной частью оператора (1), т. е. оператором  $\Delta^2$ . Поправка  $k_0^4$  отличается от главной части оператора на четыре порядка по  $r$  и так как разложение ведется по степеням величины  $r^{1/2}$ , сказывается на членах разложения, начиная с восьмого. Стандартный процесс разделения переменных с учетом четырех граничных условий (2) и требования ограниченности поля смещений дает асимптотику

$$\xi = \sum_{n=0}^7 \xi^{(n)} + O(r^4) \quad (3)$$

$$\xi^{(n)} = r^{n/2} \{a_n \sin^{1/2} n\varphi + b_n \cos^{1/2} n\varphi + c_n \sin^{1/2} (n-2)\varphi + d_n \cos^{1/2} (n-2)\varphi\}$$

При этом постоянные  $c_n$  и  $d_n$  выражаются через  $a_n$  и  $b_n$  соответственно. В частности, для  $n=3$  имеем:  $c_3 = -3a_3(1-\nu)/(7+\nu)$ ,  $d_3 = 3b_3(1-\nu)/(5+3\nu)$ .

Условие конечности энергии  $E_\Omega$ , запасенной любой ограниченной областью пластины, имеет вид

$$E_\Omega = \frac{D}{2} \int_{\Omega} \{ |\Delta \xi|^2 + 2(1-\nu) [ |\xi_{xy}|^2 - \text{Re}(\xi_{xx} \bar{\xi}_{yy}) ] + k_0^4 |\xi|^2 \} d\Omega < \infty \quad (4)$$

Здесь  $D$  — цилиндрическая жесткость пластины, черта сверху — знак комплексного сопряжения. Условие (4) ограничивает возможную особенность вторых производных решения величинами, компенсируемыми элементом площади  $d\Omega$ ,  $\xi_{xx} = O(r^{-1/2})$ ,  $\xi_{xy} = O(r^{-1/2})$ ,  $\xi_{yy} = O(r^{-1/2})$ , что приводит к требованию обращения в ноль члена  $\xi^{(1)}$  в разложении (3). Таким образом, индекс  $n$  в разложении (3) может принимать следующие значения: 0, 2, 3, ..., 7.

Коэффициенты разложения  $\xi^{(0)}$ ,  $a_n$  и  $b_n$  однозначно определяются источником и асимптотиками поля на бесконечности или условиями на границах пластины, которые включаются в полную постановку задачи. Так в задачах, рассмотренных в [2, 4], присутствуют члены  $\xi^{(0)}$  и  $\xi^{(3)}$ , играющие важную роль в дальнейшем изложении.

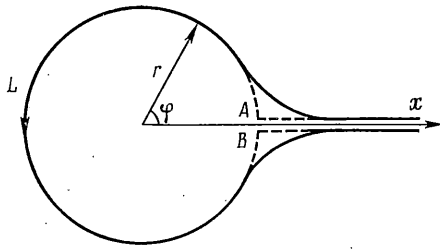
Рассмотрим поток энергии [7] через контур  $L$ , охватывающий трещину (фиг. 1) ( $\omega$  — частота):

$$\Pi = -\frac{\omega D}{2} \text{Im} \int_L \left\{ f(\xi) \bar{\xi} + M(\xi) \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial n} \right\} ds \quad (5)$$

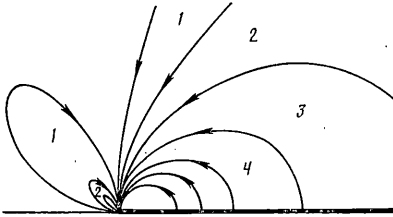
Перерезывающая сила  $f(\xi)$  и изгибающий момент  $M(\xi)$  в связанных с контуром координатах ( $n$  — нормаль,  $s$  — касательная) даются формулами ( $\rho(s)$  — радиус кривизны контура):

$$f(\xi) = \frac{\partial}{\partial n} \Delta \xi + (1-\nu) \left( -\frac{\partial^2}{\partial s^2} \frac{\partial \xi}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \xi}{\partial s} \right) \quad (6)$$

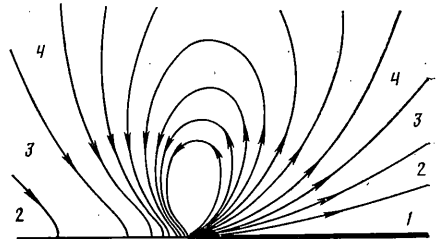
$$M(\xi) = \Delta \xi - (1-\nu) \left( -\frac{\partial^2}{\partial s^2} \xi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \xi}{\partial n} \right) \quad (7)$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Ввиду условий (2) ( $f=0, M=0$ ) потоки энергии через полубесконечные ветви контура, проходящие по берегам трещины, отсутствуют. Деформируем контур  $L$  как показано на фиг. 1 пунктиром. При этом выделяются внеинтегральные (уголковые по терминологии [7]) члены  $\Pi_{2,3}$ :

$$\Pi = \Pi_1(r, 2\pi) + \Pi_2(r) + \Pi_3(r) \quad (8)$$

$$\Pi_1(r, \vartheta) = -\frac{\omega D}{2} r \operatorname{Im} \int_0^{\vartheta} (f(\zeta) \bar{\zeta} + M(\zeta) \bar{\zeta}_r) d\varphi$$

$$\Pi_{2,3}(r) = \mp \frac{\omega D}{2} \frac{1-\nu}{r} \operatorname{Im} \left\{ \left( \zeta_{r\varphi} - \frac{1}{r} \zeta_{\varphi} \right) \bar{\zeta} \Big|_{A,B} \right\}$$

Рассмотрим потоки энергии  $\Pi_{2,3}(r)$ , порожденные уголковыми силами, и поток энергии  $\Pi_1(r, \vartheta)$ , распространяющийся в угле ( $0 < \varphi < \vartheta$ ), по отдельности. Подставляя (6), (7) в (8) и учитывая асимптотику (3), выделим в этих потоках сингулярные члены

$$\begin{aligned} \Pi_1(r, \vartheta) = & -\frac{\omega D}{2} r \operatorname{Im} \left\{ \bar{\zeta}^{(0)} \int_0^{\vartheta} f(\zeta^{(3)}) d\varphi \right\} + O(r^{1/2}) = \frac{3}{8} \omega D r^{-1/2} (1-\nu) \times \\ & \times \{ \operatorname{Im}(a_3 \bar{\zeta}^{(0)}) [1 - \cos(3\vartheta/2) + (9-\nu)(7+\nu)^{-1} (1 - \cos(\vartheta/2))] + \operatorname{Im}(b_3 \bar{\zeta}^{(0)}) \times \\ & \times [\sin(3\vartheta/2) + (9-\nu)(5+3\nu)^{-1} \sin(\vartheta/2)] \} + O(r^{1/2}) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{2,3}(r) = & \pm \frac{1}{2} \omega D r^{-1} (1-\nu) \operatorname{Im} \{ \bar{\zeta}^{(0)} (\zeta_{r\varphi}^{(3)} - r^{-1} \zeta_{\varphi}^{(3)}) \Big|_{A,B} \} + O(r^{1/2}) = \\ & = -6 \omega D r^{-1/2} (1-\nu)(7+\nu)^{-1} \operatorname{Im}(a_3 \bar{\zeta}^{(0)}) + O(r^{1/2}) \end{aligned} \quad (10)$$

Из формул (8)–(10) следует, что  $\Pi = O(r^{1/2})$  при  $r \rightarrow 0$ . Таким образом трещина не излучает и не поглощает энергии своим концом.

Линии токов у конца трещины, рассчитанные по формулам (9), (10), приведены на фиг. 2, 3 (принято  $\nu=0,33$ ). Фиг. 2 соответствует четной по  $x$  части  $\zeta^{(3)}$  ( $b_3=0$ ), фиг. 3 – нечетной ( $a_3=0$ ). Ввиду симметрии линий токов изображены только при  $x > 0$ . Полные картины токов получаются отражением относительно оси  $y$ , для нечетной части при этом надо сменить стрелки, указывающие направление потоков энергии, на противоположные. Линии токов, изображенные на фигурах, выделяют области 1, 2, 3, ..., в каждой из которых распространяется равная энергия.

Отметим следующее кажущееся противоречие фиг. 2: линии токов выходят из трещины под прямым углом, однако берега трещины не излучают энергии ввиду условий (2). Объясняется это тем, что вдоль берегов трещины распространяется энергия (10), переносимая уголковыми силами, которая по мере удаления от вершины трещины излучается в пластину. Таким образом, линии токов выходят из верши-

ны трещины, проходят по ее берегу, а затем срываются под прямым углом и возвращаются в вершину. Для антисимметричной части  $\zeta^{(3)}$  потоков  $\Pi_{2,3}$  вдоль берегов трещины нет (нет уголкового члена).

Выявленный характер распространения потоков энергии у конца трещины, по видимому, является общим для всех тонких дефектов, у концов которых наблюдается особенность перерезывающей силы вида  $r^{-1/2}$  [2, 4], т. е. в разложении (3) присутствует член  $\zeta^{(3)}$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попов Г. Я., Толкачев В. М. Проблема контакта жестких тел с тонкостенными элементами. // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 4. С. 192–206.
2. Онищук О. В., Попов Г. Я. О некоторых задачах изгиба пластин с трещинами и тонкими включениями. // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 4. С. 141–150.
3. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. // М.: Наука, 1982. 342 с.
4. Климюк Ю. С., Онищук О. В., Попов Г. Я. Задачи о колебаниях и устойчивости прямоугольной пластинки с тонким включением. // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 6. С. 137–143.
5. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. // М.: Мир, 1964. 428 с.
6. Кондратьев В. А., Олейник О. А. Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях. // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38. Вып. 2. С. 3–76.
7. Белинский Б. П., Коузов Д. П. О формулах типа формул Грина для изгибно колеблющейся пластины. // Акуст. ж. 1981. Т. 27. Вып. 5. С. 710–718.

Ленинград

Поступила в редакцию  
30.XII.1988

УДК 539.3:534.1

© 1990 г.

А. П. ЧУГАЙНОВА

### О ВЫХОДЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН НА АВТОМОДЕЛЬНЫЙ РЕЖИМ В ЗАДАЧЕ О ДЕЙСТВИИ ВНЕЗАПНОГО ИЗМЕНЕНИЯ НАГРУЗКИ НА ГРАНИЦЕ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Изучаются движения в виде плоских нелинейных квазипоперечных волн в слабоанизотропной упругой среде.

В [1, 2] при построении решения автомодельной задачи о действии внезапного изменения нагрузки на границе упругого полупространства была обнаружена неединственность решения для некоторых областей параметров задачи. Вопрос выбора решения рассматривался для определенного класса упругих сред в [3]. В данной работе численно найдены автомодельные асимптотики ряда неавтомодельных задач для вязкоупругих сред, не рассмотренных в [3].

Аналогично [3] используются приближенные уравнения, описывающие слабо-нелинейные квазипоперечные волны в вязкоупругой среде с малой анизотропией, распространяющиеся только в одну сторону

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial R}{\partial u_\alpha} - \frac{\tau_{\alpha 3}}{2(\mu \rho_0)^{1/2}} \right) = 0 \quad (\alpha=1, 2) \quad (1)$$

$$R(u_1, u_2) = 1/2(f-g)u_1^2 + 1/2(f+g)u_2^2 - 1/8\kappa_1(u_1^2 + u_2^2)^2$$

$$u_\alpha = \partial w_\alpha / \partial x, \quad \tau_{\alpha 3} = \rho_0 v \partial u_\alpha / \partial t \approx v(\mu \rho_0)^{1/2} \partial u_\alpha / \partial x$$

Здесь  $w_\alpha$  — перемещения частиц, рассматриваемые как функции лагранжевых координат  $x_1, x_2, x_3 = x$ ,  $\tau_{\alpha 3}$  — компоненты тензора вязких напряжений,  $\rho_0$  — плотность в ненапряженном состоянии,  $\mu$  — упругий коэффициент Ламе,  $v$  — кинематический коэффициент вязкости,  $g$  — параметр анизотропии ( $g \ll f$ ),  $f$  — характеристическая скорость при отсутствии анизотропии и нелинейности,  $f, g$  — постоянные,  $\kappa_1$  — постоянная с размерностью скорости, характеризующая нелинейные эффекты.

В результате построения решения автомодельной задачи о внезапном изменении нагрузки на границе упругого полупространства [1, 2] отмечено, что одним и тем же начальным условиям  $u_1 = U_1, u_2 = U_2$  при  $t=0, x>0$  и граничным условиям  $u_1 = u_1^*, u_2 = u_2^*$  при  $x=0, t>0$  в некоторой области задаваемых параметров могут соответствовать два различных решения, состоящих из последовательности простых и ударных волн, если значение выражения  $2g / [(U_1^2 + U_2^2) \kappa_1]^{-1}$  достаточно мало.

Поведение ударных и простых волн существенно зависит от знака упругой константы  $\kappa_1$ . В [4] исследовано решение в области неединственности для упругих сред с  $\kappa_1 > 0$ . Ниже приводятся результаты аналогичного исследования решения для упругих сред с  $\kappa_1 < 0$ . На фиг. 1 изображена ударная адиабата  $AMHALD$  (множество