

УДК 539.3

© 1990 г.

А. А. КАСУМОВ, Д. Н. СОБОЛЕВ

НАДЕЖНОСТЬ ПЛИТЫ НА УПРУГИХ ОПОРАХ,  
СВЯЗАННЫХ СО СТОХАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫМ  
МНОГОСЛОЙНЫМ ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ

Задача о распределении напряжений в статистически неоднородной упругой полуплоскости впервые рассматривалась в [1]. В данной статье с помощью дискретизации систем стержень — многослойное полупространство и плита — полупространство изучается влияние стохастических неоднородностей основания на надежность исследуемых систем. В работе приводится методика построения плотности вероятности элементов стохастической матрицы жесткости упругого стержня в точке контакта с плитой с учетом конечной продольной силы. Принимается, что стержень находится в стохастически неоднородном многослойном полупространстве, каждый слой которого предполагается изотропным и описывается двухпараметрической моделью. При этом в пределах каждого слоя жесткостные характеристики стержня и среды, а также продольная сила вдоль оси стержня принимаются случайными величинами с известными функциями распределения. Приводится методика решения задачи изгиба прямоугольной изотропной плиты, имеющей как по контуру, так и внутри него сосредоточенные опоры с заданными стохастическими матрицами жесткости. Ввиду нелинейной зависимости между элементами матрицы жесткости  $[R]$  и параметрами полупространства, стержня, продольных сил [2], стохастическая краевая задача решается методом статистических испытаний в сочетании с операционным и вариационным методами.

1. Построение плотности вероятности распределения элементов матрицы жесткости в головной точке стержня, погруженного в стохастически неоднородное многослойное полупространство. Систему стержень — многослойное полупространство разделяем на  $J$  участков; на протяжении каждого участка (слоя) продольная сила  $P_j$ , жесткость стержня  $D_j = E_j I_j$ , жесткостные характеристики среды  $k_{1j}$ ,  $k_{2j}$  считаем случайными величинами с заданными функциями распределения  $f_{1j}$ ,  $f_{2j}$ ,  $f_{3j}$ ,  $f_{4j}$  соответственно. При решении конкретной задачи жесткостные характеристики  $J$ -го слоя предполагаются равными нулю, а его высота принимается из проектных данных (фиг. 1).

Допуская угловые  $\varphi_j$  и линейные  $y_j$  деформации  $J$ -го сечения стержня, получим уравнение равновесия для  $j$ -го слоя

$$D_j y^{*''}(x) = - \left\{ P_j [y^*(x) - y_{j-1}] + M_{j-1} - H_{j-1} x + \int_0^x k_{1j} y^*(\eta) (x - \eta) d\eta - \int_0^x k_{2j} y^{*'}(\eta) d\eta \right\}. \quad (1.1)$$

Возьмем случайное число  $c$ , равномерно распределенное в  $[0; 1]$ , и в качестве значений случайных величин для одной реализации  $c$  соответственно берем

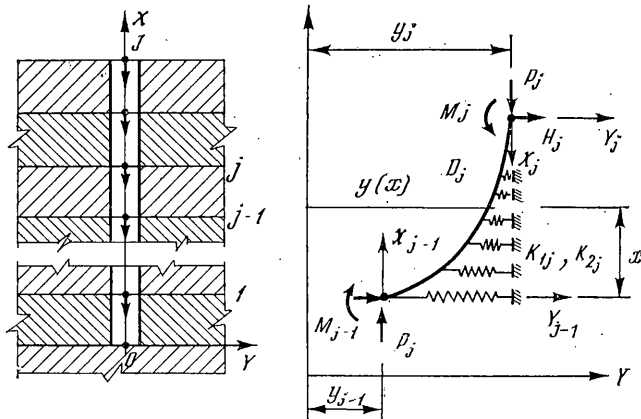
$$P_j = f_{1j}^{-1}(c), \quad D_j = f_{2j}^{-1}(c), \quad k_{1j} = f_{3j}^{-1}(c), \quad k_{2j} = f_{4j}^{-1}(c) \quad (1.2)$$

где  $f^{-1}$  — функция, обратная по отношению к  $f$ .

Подставляя (1.2) в (1.1), с помощью преобразования Лапласа получим изображение (1.1) в виде

$$\overline{y(p)} = B^{-1}(p) (p^2 + a_j^2) p y_{j-1} + B^{-1}(p) p^2 \varphi_{j-1} - B^{-1}(p) p b_j M_{j-1} + B^{-1}(p) b_j H_{j-1} \quad (1.3)$$

где  $y_{j-1}$ ,  $\varphi_{j-1}$ ,  $M_{j-1}$ ,  $H_{j-1}$  — соответственно прогиб, угол поворота, изгибаю-



Фиг. 1

щий момент, поперечная сила в  $(j-1)$ -й точке  $j$ -го участка:  $a_j = [(P_j - k_{2j}) / D_j]^{1/2}$ ,  $b_j = 1/D_j$ ,  $B(p) = p^4 + p^2 a_j^2 + b_j k_{1j}$ ;  $y(p)$  — изображение функции  $y(x)$ ;  $p$  — комплексное переменное.

Обратным преобразованием (1.3) получим оригинал  $y(x)$  изображения  $y(p)$  в виде

$$y(x) = \Phi_{1j}(x)y_{j-1} + \Phi_{2j}\Phi_{j-1} + \Phi_{3j}M_{j-1} + \Phi_{4j}(x)H_{j-1}$$

$$\Phi_{1j}(x) = [a_{1j}^2 \cos a_{1j}x - b_{1j}^2 \cos b_{1j}x + a^2(\cos b_{1j}x - \cos a_{1j}x)] / (a_{1j}^2 - b_{1j}^2)$$

$$\Phi_{2j}(x) = (a_{1j} \sin a_{1j}x - b_{1j} \sin b_{1j}x) / (a_{1j}^2 - b_{1j}^2)$$

$$\Phi_{3j}(x) = -b_j(\cos b_{1j}x - \cos a_{1j}x) / (a_{1j}^2 - b_{1j}^2)$$

$$\Phi_{4j}(x) = b_j(a_{1j} \sin b_{1j}x - b_{1j} \sin a_{1j}x) / a_{1j}b_{1j}(a_{1j}^2 - b_{1j}^2)$$

$$a_{1j} = [a_j^2/2 + (a_j^4/4 - b_j k_{1j})^{1/2}]^{1/2}, \quad b_{1j} = \{b_j k_{1j} / [a_j^2/2 + (a_j^4/4 - b_j k_{1j})^{1/2}]\}^{1/2}$$

в случае  $(P_j - k_{2j})^2 / 4D_j^2 < k_{1j}/D_j$  функции  $\Phi_{vj}$  ( $v=1, 4$ ) имеют вид

$$\Phi_{1j}(x) = (a_j^2/2\beta_j) \operatorname{sh} xu_j \sin xv_j + \operatorname{ch} xu_j \cos xv_j$$

$$\Phi_{2j}(x) = (u_j \operatorname{ch} xu_j \sin xv_j + v_j \operatorname{sh} xu_j \cos xv_j) / \beta_j$$

$$\Phi_{3j}(x) = (b_j/\beta_j) \operatorname{sh} xu_j \sin xv_j$$

$$\Phi_{4j}(x) = (\operatorname{ch} xu_j \sin xv_j - \operatorname{sh} xu_j \cos xv_j) b_j/\beta_j \sqrt{k_{1j}/D_j}$$

$$\beta_j = (k_{1j}/D_j - (P_j - k_{2j})^2/4D_j^2)^{1/2}$$

$$u_j = ([ (k_{1j}/D_j)^{1/2} - (P_j - k_{2j})/2D_j ]/2)^{1/2}$$

$$v_j = ([ (k_{1j}/D_j)^{1/2} + (P_j - k_{2j})/2D_j ]/2)^{1/2}$$

Используя известные соотношения сопряжения примыкающих участков и учитывая, что на свободном конце (в точке  $O$ ) стержня вектор усилий равен нулю ( $|M_0 H_0|^T = 0$ ), матрицу жесткости системы в точке  $J$ , выражающую вектор сил  $|M_J H_J|^T$  через вектор перемещений  $|y_J \Phi_J|^T$ , получим в виде [2]

$$[R] = -[T_{22}]^{-1}[T_{21}] = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix}$$

где  $[T_{22}]$ ,  $[T_{21}]$  — подматрицы матрицы  $[T]$ :

$$[T] = \left[ \prod_{j=1}^J [K_j] \right]^{-1} = \begin{vmatrix} [T_{11}] & [T_{12}] \\ [T_{21}] & [T_{22}] \end{vmatrix}$$

$$[K_j] = \begin{vmatrix} \Phi_{1j}(l_j) & \Phi_{2j}(l_j) & \Phi_{3j}(l_j) & \Phi_{4j}(l_j) \\ \Phi'_{1j}(l_j) & \Phi'_{2j}(l_j) & \Phi'_{3j}(l_j) & \Phi'_{4j}(l_j) \\ -D_j \Phi''_{1j}(l_j) & -D_j \Phi''_{2j}(l_j) & -D_j \Phi''_{3j}(l_j) & -D_j \Phi''_{4j}(l_j) \\ -D_j \Phi'''_{1j}(l_j) & -D_j \Phi'''_{2j}(l_j) & -D_j \Phi'''_{3j}(l_j) & -D_j \Phi'''_{4j}(l_j) \end{vmatrix}$$

Матрица  $[R]$  имеет размер  $2 \times 2$ . Если добавить члены, учитывающие сжатие ( $r_{33}$ ) и кручение ( $r_{44}$ ), она примет вид

$$[R] = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{44} \end{vmatrix} \quad (1.4)$$

Необходимое количество реализаций  $N_*$  случайной величины  $c$ , достаточное для того, чтобы с заданной вероятностью  $\beta$  ожидать, что среднее арифметическое значение каждого элемента ( $r^*$ ) матрицы  $[R]$  отклонится от его математического ожидания не больше чем на  $\varepsilon$ , находим по формуле

$$N_* = (\sigma_r / \varepsilon)^2 [\Phi^{-1}(\beta/2)]^2 \quad (1.5)$$

где  $\sigma_r$  — средний квадрат отклонений случайной величины  $r^*$ ;  $\Phi^{-1}$  — обратная функция Лапласа.

После получения необходимых  $N_*$  реализаций случайной величины  $c$  для каждого элемента ( $r$ ) матрицы  $[R]$  вычисляем асимметрию  $A_r$ , эксцесс  $E_r$ , второй центральный момент  $\mu_2$ , математическое ожидание  $\langle r \rangle$  и плотность вероятности распределения  $r^*$  выражаем в виде  $A$ -ряда Шарлье

$$P(r) = \mu_2^{-1/2} [\psi(\xi) + A_r \psi^{III}(\xi)/6 + E_r \psi^{IV}(\xi)/24] \quad (1.6)$$

$$\xi = (r - \langle r \rangle) \mu_2^{-1/2}, \quad \psi(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-\xi^2/2)$$

Вычисляем функцию распределения  $F_*$  случайной величины  $r^*$  и выражаем ее через  $P(r)$  по формуле

$$F_*(r) = \int_{-\infty}^x P(r) dr, \quad r^* = F_*^{-1}(c^*) \quad (1.7)$$

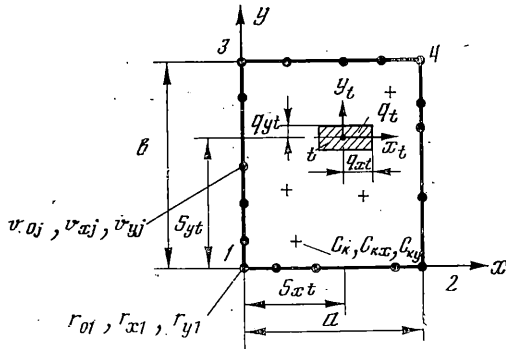
Здесь  $F_*^{-1}$  — обратная к функции распределения  $F_*$ .

Таким образом, каждый элемент стохастической матрицы жесткости  $[R]$  по формуле (1.7) удается выразить через случайное число  $c$ , что является подготовительным этапом для исследования системы плита — полупространство, стохастическое моделирование которой рассматривается в следующем параграфе.

**2. Надежность прямоугольной плиты на дискретных упругих опорах с заданными стохастическими матрицами.** Предполагаем, что заранее по изложенной методике разд. 1 для каждого  $k$ -го стержня, погруженного в стохастически неоднородное многослойное полупространство и поддерживающего плиту, вычислена стохастическая матрица жесткости в точке контакта с плитой. С целью упрощения решения, для каждого  $k$ -го стержня из матрицы (1.4) оставляем элементы  $r_{11}$ ,  $r_{33}$  и их обозначаем соответственно принятой индексацией опор  $c_{xk}$ ,  $c_{yk}$ ,  $c_k$ . В такой постановке задача сводится к интегрированию следующего стохастического дифференциального уравнения с сингулярными коэффициентами

$$D \Delta^2 W + \sum_{k=1}^K C_k^* \delta(x-x_k, y-y_k) W - \sum_{k=1}^K C_{xk}^* \frac{\partial}{\partial x} \left[ \delta(x-x_k, y-y_k) \frac{\partial W}{\partial x} \right] - \sum_{k=1}^K C_{yk}^* \frac{\partial}{\partial y} \left[ \delta(x-x_k, y-y_k) \frac{\partial W}{\partial y} \right] = Q(x, y) \quad (2.1)$$

Здесь  $D$  — цилиндрическая жесткость плиты;  $W(x, y)$  — перемещение срединной поверхности плиты;  $\delta$  — дельта-функция Дирака;  $\Delta$  — оператор Лапласа;  $x_k, y_k$  — координаты  $k$ -й опоры;  $Q(x, y)$  — интенсивность произ-



Фиг. 2

вольной внешней нагрузки.

$$Q(x, y) = \sum_{t=1}^T q_t \{ \theta [x - (S_{xt} - q_{xt})] - \theta [x - (S_{xt} + q_{xt})] \} \times \\ \times \{ \theta [y - (S_{yt} - q_{yt})] - \theta [y - (S_{yt} + q_{yt})] \}$$

Здесь  $\theta$  — единичная функция Хевисайда;  $q_t$  — постоянная интенсивность нагрузки, приложенной в окрестности точки  $t$  (фиг. 2).

Предположим, что плита по контуру опирается на балки с «обобщенной жесткостью», которые упруго сопротивляются перемещению и повороту не везде, а в отдельных точках по длине. Граничные условия приводимой задачи будут иметь вид:

для стороны  $x=0$ :

$$\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} - \frac{1}{D} \sum_{j=1}^J \left\{ (R_{0j} - v_{0j}^* W) \delta(y - y_j) - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial y} \left[ (M_{vj} - v_{vj}^* \frac{\partial W}{\partial y}) \delta(y - y_j) \right] \right\} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{1}{D} \sum_{j=1}^J \left( M_{xj} - v_{xj}^* \frac{\partial W}{\partial x} \right) \delta(y - y_j) = 0$$

для угла 1 ( $x=0, y=0$ ):

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + (r_{01}^* W - R_{01}) / 2D(1-\mu) = 0 \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - (M_{ax1} - r_{x1}^* \frac{\partial W}{\partial x}) / D = 0 \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - (M_{ay1} - r_{y1}^* \frac{\partial W}{\partial y}) / D = 0 \quad (2.3)$$

Где  $v_{0j}^*, v_{xj}^*, v_{yj}^*$ ;  $r_{01}^*, r_{x1}^*, r_{y1}^*$  — жесткостные характеристики соответственно  $j$ -й контурной и 1-й угловой опоры, которые вычисляются по формуле (1.7);  $R_j, M_{xj}, M_{yj}$ ;  $R_{01}, M_{ax1}, M_{ay1}$  — внешние силы, составляющие внешнего момента, расположенные соответственно на  $j$ -й контурной и 1-й угловой опорах. Аналогичные по отношению к (2.2) и (2.3) условия получаются для других краев и углов плиты.

Таким образом, решение поставленной задачи приводится к решению уравнения (2.1) с учетом граничных условий (2.2) и (2.3).

Упругое защемление краев плиты характеризуется возникновением распределенных изгибающих моментов, а также прогибов опорных сечений. Эти величины могут быть разложены в ряды Фурье для стороны  $x=0$ :

$$W(0, y) = \left(1 - \frac{y}{b}\right) \lambda_1^* + \lambda_3^* \frac{y}{b} + \sum_n E_n^* \sin \psi_n y \\ M_x(0, y) = \left(1 - \frac{y}{b}\right) M_{1x}^* + M_{3y}^* \frac{y}{b} + \sum_n N_n^* \sin \psi_n y \quad (2.4)$$

Аналогичные разложения производятся для сторон плиты  $x=a$ ;  $y=0$ ,  $b$ .  
Решения уравнения (2.1) принимаем в виде

$$W = W_c + W_* \quad (2.5)$$

$$W_0 = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N B_{mn} \sin \varphi_m x \sin \psi_n y \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} W_* = & \sum_{m=1}^M [a_{m1}(y)f_m^* + a_{m2}(y)f_{*m}^* - c_1(y)F_m^* + c_2(y)F_{*m}^*] \sin \varphi_m x + \\ & + \sum_{n=1}^N [b_{n1}(x)E_n^* + b_{n2}(x)E_{*n}^* - d_1(x)N_n^* + d_2(x)N_{*n}^*] \sin \psi_n y + \\ & + (1-x/a) [(1-y/b)\lambda_1^* + \lambda_3^* y/b] + [(1-y/b)\lambda_2^* + \lambda_4^* y/b] x/a - \\ & - c_1(y) [(1-x/a)M_{1y}^* + M_{2y}^* x/a] + c_2(y) [(1-x/a)M_{3y}^* + M_{4y}^* x/a] - \\ & - d_1(x) [(1-y/b)M_{1x}^* + M_{3x}^* y/b] + d_2(x) [(1-y/b)M_{2x}^* + M_{4x}^* y/b] \quad (2.7) \\ & a_{m1}(y) = (1-y/b) - (\mu b^2/6) (y^3/b^3 - 3y^2/b^2 + 2y/b) \varphi_m^2 \\ & a_{m2}(y) = y/b + (\mu b^2/6) (y^3/b^3 - y/b) \varphi_m^2; \quad \varphi_m = m\pi/a; \quad \psi_n = n\pi/b \\ & c_1(y) = (y^3/b^3 - 3y^2/b^2 + 2y/b) b^2/6D \\ & c_2(y) = (y^3/b^3 - y/b) b^2/6D \end{aligned}$$

$b_{n1}$ ,  $b_{n2}$ ,  $d_1$ ,  $d_2$  — получаются из предыдущих выражений заменой  $y \rightarrow x$ ,  $b \rightarrow a$ ,  $\varphi_m \rightarrow \psi_n$ .

Считая, что условия (2.4) на контуре заданы, подставляя (2.5) в (2.1), (2.2), (2.3) и применяя вариационный метод Бубнова — Галеркина в обобщенном виде [3] (т. е. считая искомыми не сами коэффициенты разложения (2.6), (2.7), а их вероятностные характеристики), получим

$$\begin{aligned} B_{\bar{m}\bar{n}} D \left( \frac{ab}{4} \right) \Delta_{\bar{m}\bar{n}}^2 + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N B_{mn} \sum_{k=1}^K [C_k^* \sin \varphi_m x_k \sin \psi_n y_k \sin \varphi_{\bar{m}} x_k \times \\ \times \sin \psi_{\bar{n}} y_k + C_{*k}^* \varphi_m \varphi_{\bar{m}} \cos \varphi_m x_k \sin \psi_n y_k \cos \varphi_{\bar{m}} x_k \sin \psi_{\bar{n}} y_k + \\ + C_{yk}^* \psi_n \psi_{\bar{n}} \sin \varphi_m x_k \cos \psi_n y_k \sin \varphi_{\bar{m}} x_k \cos \psi_{\bar{n}} y_k] = \\ = \frac{4}{\varphi_{\bar{m}} \psi_{\bar{n}}} \sum_{t=1}^T q_t \sin \varphi_{\bar{m}} S_{xt} \sin \varphi_{\bar{m}} q_{xt} \sin \psi_{\bar{n}} S_{yt} \sin \psi_{\bar{n}} q_{yt} - \\ - D \left\{ (f_{\bar{m}}^* + f_{* \bar{m}}^*) [1 - \mu (2 + \varphi_{\bar{m}}^2 / \psi_{\bar{n}}^2)] a \varphi_{\bar{m}}^4 / 2 \psi_{\bar{n}} - \right. \\ \left. - (F_{\bar{m}}^* + F_{* \bar{m}}^*) (2 + \varphi_{\bar{m}}^2 / \psi_{\bar{n}}^2) a \varphi_{\bar{m}}^2 / 2D \psi_{\bar{n}} + (E_{\bar{n}}^* + E_{* \bar{n}}^*) [1 - \mu (2 + \right. \\ \left. + \psi_{\bar{n}}^2 / \varphi_{\bar{m}}^2)] b \psi_{\bar{n}}^4 / 2 \varphi_{\bar{m}} - (N_{\bar{n}}^* + N_{* \bar{n}}^*) \left( 2 + \frac{\psi_{\bar{n}}^2}{\varphi_{\bar{m}}^2} \right) \frac{b \psi_{\bar{n}}^2}{2D \varphi_{\bar{m}}} \right\} - \\ - \sum_{k=1}^K [C_k^* W_*(x_k, y_k) \sin \varphi_{\bar{m}} x_k \sin \psi_{\bar{n}} y_k + C_{*k}^* \Phi_1(x_k, y_k) \times \\ \times \varphi_{\bar{m}} \cos \varphi_{\bar{m}} x_k \sin \psi_{\bar{n}} y_k + C_{yk}^* \Phi_2(x_k, y_k) \psi_{\bar{n}} \sin \varphi_{\bar{m}} x_k \cos \psi_{\bar{n}} y_k] \quad (2.8) \\ \Phi_1(x_k, y_k) = (\partial W_*/\partial x) \Big|_{\substack{x=x_k \\ y=y_k}}, \quad \Phi_2(x_k, y_k) = (\partial W_*/\partial y) \Big|_{\substack{x=x_k \\ y=y_k}} \end{aligned}$$

$$\Delta_{\bar{n}\bar{n}}^2 = (\varphi_{\bar{m}}^2 + \psi_{\bar{n}}^2)^2$$

для стороны  $x=0$ :

$$\begin{aligned} - \sum_{m=1}^M (f_m^* + f_{*m}^*) \left( 1 - \mu \frac{\varphi_m^2}{\psi_{\bar{n}}^2} - 2\mu + \mu^2 \right) \frac{\varphi_m^3}{\psi_{\bar{n}}} + \left( \frac{1}{D} \right) \sum_{m=1}^M (F_m^* + F_{*m}^*) \times \\ \times (\varphi_m^2 / \psi_{\bar{n}}^2 + 2 - \mu) \varphi_m / \psi_{\bar{n}} + E_{\bar{n}}^* [-\mu \psi_{\bar{n}}^2 / a + (1 + \mu a^2 \psi_{\bar{n}}^2 / 3)] (2 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\mu)\psi_{\bar{n}}^2/a]b/2+E_{*n}^*[\mu\psi_{\bar{n}}^2/a-(1-\mu a^2\psi_{\bar{n}}^2/6)(2-\mu)\psi_{\bar{n}}^2/a]b/2- \\
& -N_{\bar{n}}^*[1-(2-\mu)a^2\psi_{\bar{n}}^2/3]b/2Da+N_{*n}^*[1+(2-\mu)a^2\psi_{\bar{n}}^2/6]b/2Da+ \\
& +(M_{2x}^*-M_{1x}^*+M_{4x}^*-M_{3x}^*)\frac{1}{Da\psi_{\bar{n}}}+M_{1y}^*\left\{-\frac{2-\mu}{\psi_{\bar{n}}a}-\frac{b^2}{6D}\sum_{j=1}^Jv_{0j}^*\times\right. \\
& \quad \times\left(\frac{y_j^3}{b^3}-\frac{3y_j^2}{b^2}+\frac{2y_j}{b}\right)\sin\psi_{\bar{n}}y_j-\left(\frac{b^2}{6D}\sum_{j=1}^Jv_{vj}^*\left(\frac{3y_j^2}{b^3}-\right.\right. \\
& \quad \left.\left.-\frac{6y_j}{b^2}+\frac{2}{b}\right)\psi_{\bar{n}}\cos\psi_{\bar{n}}y_j\right\}\frac{1}{D}+M_{3y}^*\left\{-\frac{2-\mu}{\psi_{\bar{n}}a}+\frac{b^2}{6D}\sum_{j=1}^Jv_{0j}^*\times\right. \\
& \quad \times\left(\frac{y_j^3}{b^3}-\frac{y_j}{b}\right)\sin\psi_{\bar{n}}y_j+\frac{b^2}{6D}\sum_{j=1}^Jv_{vj}^*\left(\frac{3y_j^2}{b^3}-\frac{1}{b}\right)\psi_{\bar{n}}\cos\psi_{\bar{n}}y_j\left.\right\}\frac{1}{D}+ \\
& \quad + (M_{2y}^*+M_{4y}^*)\frac{2-\mu}{D\psi_{\bar{n}}a}+\frac{1}{D}\sum_{n=1}^N E_n^*\sum_{j=1}^J(v_{0j}^*\sin\psi_n y_j\sin\psi_{\bar{n}}y_j+ \\
& \quad +v_{vj}^*\psi_n\psi_{\bar{n}}\cos\psi_n y_j\cos\psi_{\bar{n}}y_j)+\lambda_1^*\frac{1}{D}\sum_{j=1}^J\left[v_{0j}^*\left(1-\frac{y_j}{b_j}\right)\sin\psi_{\bar{n}}y_j- \right. \\
& \quad \left.-v_{vj}^*\frac{\psi_{\bar{n}}}{b}\cos\psi_{\bar{n}}y_j\right]+\lambda_3^*\frac{1}{D}\sum_{j=1}^J\left[v_{0y}^*\frac{y_j}{b}\sin\psi_{\bar{n}}y_j+v_{vj}^*\frac{\psi_{\bar{n}}}{b}\cos\psi_{\bar{n}}y_j\right]= \\
& =\frac{b}{2}\sum_{m=1}^M B_{m\bar{n}}[\varphi_m^3+(2-\mu)\varphi_m\psi_{\bar{n}}^2]+\frac{1}{D}\sum_{j=1}^J(R_j\sin\psi_{\bar{n}}y_j+M_{vj}\psi_{\bar{n}}\cos\psi_{\bar{n}}y_j)
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
& N_{\bar{n}}^*\frac{b}{2D}+M_{1x}^*\left[\frac{1}{\psi_{\bar{n}}}-\frac{a}{3D}\sum_{j=1}^Jv_{xj}^*\sin\psi_{\bar{n}}y_j\left(1-\frac{y_j}{b}\right)\right]\frac{1}{D}+M_{3x}^*\left[\frac{1}{\psi_{\bar{n}}}-\right. \\
& -\frac{a}{3D}\sum_{j=1}^Jv_{xj}^*\sin\psi_{\bar{n}}y_j\frac{y_j}{b}\left.]\frac{1}{D}+M_{1y}^*\left[\frac{\mu}{\psi_{\bar{n}}}+\frac{1}{a}\sum_{j=1}^Jv_{xj}^*\sin\psi_{\bar{n}}y_jc_1(y_j)\right]\frac{1}{D}+ \\
& \quad +M_{3y}^*\left[\frac{\mu}{\psi_{\bar{n}}}-\frac{1}{a}\sum_{j=1}^Jv_{xj}^*\sin\psi_{\bar{n}}y_jc_2(y_j)\right]\frac{1}{D}+ \\
& \quad +\frac{1}{D}\sum_{j=1}^Jv_{xj}^*\sin\psi_{\bar{n}}y_j\sum_{m=1}^M\varphi_m[a_{m1}(y_j)f_m^*+a_{m2}(y_j)f_{*m}^*- \\
& \quad -c_1(y_j)F_m^*+c_2(y_j)F_{*m}^*]+\frac{1}{D}\sum_{j=1}^Jv_{xj}^*\sin\psi_{\bar{n}}y_j\sum_{n=1}^N[-E_n^*(1+ \\
& \quad +\mu a^2\psi_n^2/3)/a+E_{*n}^*(1-\mu a^2\psi_n^2/6)/a-N_n^*a/3D-N_{*n}^*a/6D]\times \\
& \quad \times\sin\psi_n y_j+\frac{1}{Da}\sum_{j=1}^Jv_{xj}^*\left(1-\frac{y_j}{b}\right)\sin\psi_{\bar{n}}y_j(\lambda_2^*-\lambda_1^*)+ \\
& \quad +\frac{1}{Da}\sum_{j=1}^Jv_{xj}^*\frac{y_j}{b}\sin\psi_{\bar{n}}y_j(\lambda_4^*-\lambda_3^*)-M_{2y}^*\frac{1}{Da}\sum_{j=1}^Jv_{xj}^*c_1(y_j)\times \\
& \quad \times\sin\psi_{\bar{n}}y_j+M_{4y}^*\frac{1}{Da}\sum_{j=1}^Jv_{xj}^*c_2(y_j)\sin\psi_{\bar{n}}y_j-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -M_{2x}^* \frac{a}{6D^2} \sum_{j=1}^J v_{xj}^* \left(1 - \frac{y_j}{b}\right) \sin \psi_n y_j - \\
& -M_{4x}^* \frac{a}{6D^2} \sum_{j=1}^J v_{xj}^* \frac{y_j}{b} \sin \psi_n y_j = \frac{1}{D} \sum_{j=1}^J v_{xj}^* \sin \psi_n y_j \times \\
& \times \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (B_{mn} \varphi_m \sin \psi_n y_j + M_{xj})
\end{aligned}$$

для угла 1 ( $x=0, y=0$ ):

$$\begin{aligned}
& a \sum_{m=1}^M \varphi_m \left[ \left(1 + \mu \frac{b^2 \varphi_m^2}{3}\right) f_m^* - \left(1 - \mu \frac{b^2 \varphi_m^2}{6}\right) f_{*m}^* + F_m^* \frac{b^2}{3D} + \right. \\
& \left. + F_{*m}^* \frac{b^2}{6D} \right] + b \sum_{n=1}^N \psi_n \left[ \left(1 + \mu \frac{a^2 \psi_n^2}{3}\right) E_n^* - \left(1 - \mu \frac{a^2 \psi_n^2}{6}\right) E_{*n}^* + \right. \\
& \left. + N_n^* \frac{a^2}{3D} + N_{*n}^* \frac{a^2}{6D} \right] + (M_{2y}^* - M_{1y}^*) b^2 / 3D + (M_{4y}^* - M_{3y}^*) b^2 / 6D + \\
& + (M_{3x}^* - M_{1x}^*) a^2 / 3D + (M_{4x}^* - M_{2x}^*) a^2 / 6D - \left[ 1 + \frac{r_{01}^* ab}{2D(1-\mu)} \right] \lambda_1^* + \\
& + \lambda_2^* + \lambda_3^* + \lambda_4^* = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N ab \varphi_m \psi_n B_{mn} - \frac{R_{a1} ab}{2D(1-\mu)} \\
& M_{1x}^* (1 - r_{x1}^* a / 3D) / D - M_{2x}^* a r_{x1}^* / 6D^2 + M_{1y}^* \mu / D + \\
& + (\lambda_2^* - \lambda_1^*) r_{x1}^* / Da + \frac{r_{x1}^*}{D} \sum_{m=1}^M \varphi_m f_m^* = M_{ax1} \frac{1}{D} \quad (2.10) \\
& M_{1y}^* (1 - r_{y1}^* b / 3D) / D - M_{3y}^* r_{y1}^* b / 6D^2 + M_{1x}^* \mu / D + \\
& + (\lambda_3^* - \lambda_1^*) r_{y1}^* / Db + \frac{r_{y1}^*}{D} \sum_{n=1}^N \psi_n E_n^* = M_{ay1} \frac{1}{D}
\end{aligned}$$

Аналогичные уравнения получаются для остальных краев ( $x=a, y=0, b$ ) и углов (1, 3, 4) плиты.

Число приближений  $M, N$  можно предварительно уточнить (при детерминированных параметрах системы) путем составления уравнения равновесия (замыкающим системы уравнений (2.8), (2.9), (2.10), ...):

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^K C_k W(x_k, y_k) + \sum_{j=1}^J v_{0j} W(0, y_j) + \sum_{i=1}^I u_{0i} W(a, y_i) + \\
& + \sum_{l=1}^L \rho_{0l} W(x_l, 0) + \sum_{v=1}^N \sigma_{0v} W(x_v, b) + \sum_{\alpha=1}^2 r_{0\alpha} W(x_\alpha, 0) + \\
& + \sum_{\alpha=3}^4 r_{0\alpha} W(x_\alpha, b) = 4 \sum_{t=1}^T q_t q_{xt} q_{yt} + \sum_{j=1}^J R_j + \sum_{i=1}^I R_i + \sum_{l=1}^L R_l + \sum_{v=1}^N R_v + \sum_{\alpha=1}^4 R_{\alpha\alpha}
\end{aligned}$$

где  $R$  — внешняя сосредоточенная сила, приложенная нормально к срединной поверхности плиты в контурных точках опирания;  $v, u, \rho, \sigma, r$  — жесткостные характеристики соответственно контурных и угловых опор.

Таким образом, в полученной системе уравнений случайные величины  $C_k^*, C_{kx}^*, C_{ky}^*; v_{0j}^*, v_{xj}^*, v_{yj}^*; r_{01}^*, r_{x1}^*, r_{y1}^*; \dots; \dots$  связаны со случайными

коэффициентами разложений (2.6), (2.7)  $f_m^*$ ,  $f_{*m}^*$ ,  $F_m^*$ ,  $F_{*m}^*$ ,  $N_n^*$ ,  $N_{*n}^*$ ;  $\lambda_i^*$ ,  $M_{ix}^*$ ,  $M_{iy}^*$  ( $i=1, 4$ ) — нелинейными зависимостями. Полученную систему уравнений решаем методом Монте-Карло. Далее по формулам типа (1.5), (1.6), (1.7) соответственно вычисляется количество реализаций случайной величины  $s$ , плотности вероятности распределения функции прогибов и изгибающих моментов. Затем по известным формулам вычисляется вероятность исчерпания несущей способности плиты по первому и второму предельному состояниям.

Очевидно, что из этой задачи, решенной в общей постановке, можно получить ряд частных случаев, представляющих каждый в отдельности практический интерес. Например, варьированием жесткостей и расположением опор можно получить следующие стохастически неоднородные условия контакта системы плита — полупространство (либо каждое в отдельности, либо их различные сочетания как по контуру, так и внутри него): жесткое защемление, упругоподатливое защемление; свободное опирание; свободноподатливое опирание; упругое защемление в отдельных точках; свободное упругое опирание в отдельных точках; свободный край и так далее.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Носовкин В. Д., Соболев Д. Н. О распределении напряжений в статистически неоднородной упругой полуплоскости // Проблемы надежности в строительной механике. Вильнюс: Вайздас, 1968. С. 148—150.
2. Соболев Д. Н., Касумов А. А. Методика определения матрицы жесткости для системы свая — грунт с учетом конечной продольной силы // Использование ЭВМ в задачах прочности, устойчивости и надежности строительных конструкций: Науч.-метод. сб. по сопротивлению материалов, строительной механике и теории упругости. М.: МИСИ, 1987. Вып. 7. С. 188—192.
3. Соболев Д. Н. К расчету конструкций, лежащих на статистически неоднородном основании // Строит. механика и расчет сооружений. 1965. № 1. С. 1—4.

Москва

Поступила в редакцию  
3.I.1990