МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1990

УДК 539.3:534.1

С. А. АМБАРЦУМЯН, М. В. БЕЛУБЕКЯН

КОЛЕБАНИЯ ТОКОНЕСУЩЕЙ ПЛАСТИНКИ С УЧЕТОМ ДЕФОРМАЦИЙ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

Рассматриваются колебания упругой пластинки, служащей для транспортировки электрического тока. Выявлены новые параметры характеризующие взаимовлияние тока и деформаций поперечного сдвига. Показан характер изменения скорости распространения волн поперечных и продольных колебаний в зависимости от поперечных сдвиговых характеристик пластинки. Без учета деформаций поперечных сдвигов задача исследовалась в [1].

1. Рассмотрим тонкую трансверсально-изотропную пластинку толщиной $2h$, по которой по направлению ox_1 протекает ток с постоянной интенсивностью J_0.

Пластинка расположена в декартовой системе координат x_i так, что срединная плоскость пластинки совпадает с координатной плоскостью x_1ox_2, которая является также плоскостью изотропии.

Собственное электромагнитное поле пластинки, вызванное сторонним током постоянной интенсивности J_0, определяется из уравнений электростатики [2], следующим образом:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}_0=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_0,\qquad \operatorname{div}\mathbf{H}_0=0$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}_0=0,\ \operatorname{div}\mathbf{E}_0=0,\ \mathbf{J}_0=\sigma\mathbf{E}_0 \tag{1.1}$$

где $\mathbf{H}_0$ — вектор напряженности магнитного поля, $\mathbf{E}_0$ — вектор напряженности электрического поля, σ — коэффициент электропроводности материала пластинки, c — электродинамическая постоянная, которая численно равна скорости света в пустоте ($c=3\cdot10^{10}$ см с$^{-1}$).

Для окружающей пластинку среды, которая отождествляется с вакуумом имеем

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}_0^{(e)}=0,\ \operatorname{div}\mathbf{H}_0^{(e)}=0,\ \operatorname{rot}\mathbf{E}_0^{(e)}=0,\ \operatorname{div}\mathbf{E}_0^{(e)}=0 \tag{1.2}$$

Граничные условия между внешней и внутренней (собственно в пластинке) областями, запишутся следующим образом

$$\begin{gathered}[\mathbf{H}_0^{(e)}-\mathbf{H}_0]\times\mathbf{n}_0=0,\ [\mathbf{H}_0^{(e)}-\mu\mathbf{H}_0]\cdot\mathbf{n}_0=0\\ [\mathbf{E}^{(e)}-\mathbf{E}_0]\times\mathbf{n}_0=0,\ [\mathbf{E}_0^{(e)}-\varepsilon\mathbf{E}_0]\cdot\mathbf{n}_0=4\pi\rho_{0s}\end{gathered} \tag{1.3}$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности раздела, ρ_e — плотность поверхностного заряда, μ — магнитная проницаемость, ε — диэлектрическая проницаемость.

Для пондермоторной силы будем иметь

$$\mathbf{R}_0=\frac{\mu}{c}(\mathbf{J}_0\times\mathbf{H}_0) \tag{1.4}$$

Пусть сторонний ток и соответствующее электромагнитное поле претерпевают малые возмущения, определяемые векторами $\mathbf{h}$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{j}$, тогда пренебрегая токами смещения, приходим к следующим уравнениям:

$$\operatorname{rot}\mathbf{h}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j},\qquad \operatorname{div}\mathbf{h}=0,\qquad \mathbf{j}=\sigma\left[\mathbf{e}+\frac{\mu}{c}\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\times\mathbf{H}_0\right)\right] \tag{1.5}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{e} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{e} = \frac{4\pi}{\varepsilon}\rho_e$$

которые, вследствие малости возмущений и перемещений линеаризованы [3, 4].

Исходя из приведенных выше представлений для собственного электромагнитного поля пластинки и окружающей среды, а также для пондермоторной силы, получим

$$\begin{aligned} &H_{02}^{(1)} = -\frac{4\pi}{c}J_0 h, \qquad H_{01}^{(1)} = H_{03}^{(1)} = 0 \quad \text{при} \quad x_3 \geqslant h \\ &H_{02} = -\frac{4\pi}{c}J_0 x_3, \qquad H_{01} = H_{03} = 0 \quad \text{при} \quad |x_3| \leqslant h \\ &H_{02}^{(2)} = \frac{4\pi}{c}J_0 h, \qquad H_{01}^{(2)} = H_{03}^{(2)} = 0 \quad \text{при} \quad x_3 \leqslant -h \end{aligned} \tag{1.6}$$

далее

$$E_{01} = J_0/\sigma, \; E_{02} = E_{03} = 0 \text{ при } |x_3| \leqslant h \tag{1.7}$$

Для пондермоторной силы запишем следующее представление

$$\mathbf{R}_0 = \frac{\mu}{c}(\mathbf{J}_0 \times \mathbf{H}_0), \qquad R_{01} = R_{02} = 0, \qquad R_{03} = -\frac{4\pi\mu}{c^2}J_0^2 x_3 \tag{1.8}$$

Принимается один из вариантов уточненной теории пластин [5] согласно которой для перемещений какой-либо точки пластинки имеем

$$\begin{aligned} &u_1 = u - x_3\frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{I_0}{G'}\varphi_1, \qquad f_i(x_3) = 1 - \frac{x_3^2}{h^2} \\ &u_2 = v - x_3\frac{\partial w}{\partial x_2} + \frac{I_0}{G'}\varphi_2 \\ &u_3 = w, \qquad I_0 = x_3\left(1 - \frac{x_3^2}{3h^2}\right) \end{aligned} \tag{1.9}$$

Теперь, окончательно, из (1.5) согласно (1.6)—(1.8) и (1.9) для компонент возмущенного тока и пондермоторной силы, получим

$$\begin{aligned} &j_1 = \sigma\left(e_1 + x_3\frac{4\pi\mu}{c^2}J_0\frac{\partial w}{\partial t}\right), \qquad j_2 = \sigma e_2 \\ &j_3 = \sigma\left[e_3 - x_3\frac{4\pi\mu}{c^2}J_0\left(\frac{\partial u}{\partial t} - x_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial t} + \frac{I_0}{G'}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\right)\right] \end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned} &R_1' = \frac{4\pi\mu}{c^2}\sigma J_0 e_3 x_3 - \frac{16\pi^2\mu^2}{c^4}\sigma J_0^2 x_3^2\left(\frac{\partial u}{\partial t} - x_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial t} + \frac{I_0}{G'}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\right) + \rho_e\frac{J_0}{\sigma}, \\ &R_2' = -\frac{\mu}{c}J_0 h_3 \\ &R_3' = \frac{\mu}{c}J_0 h_2 - \frac{4\pi\mu}{c^2}\sigma J_0 e_1 x_3 - \frac{16\pi^2\mu^2}{c^4}\sigma J_0^2 x_3^2\frac{\partial w}{\partial t} \end{aligned} \tag{1.11}$$

Далее, как обычно, для деформаций, напряжений, внутренних сил и моментов имеем

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{11} = e_{11} = \frac{\partial u}{\partial x_1} - x_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{I_0}{G'}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \\ &\varepsilon_{22} = e_{22} = \frac{\partial v}{\partial x_2} - x_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{I_0}{G'}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \\ &\varepsilon_{12} = \frac{e_{12}}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} - 2x_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{I_0}{G'}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\right)\right] \end{aligned} \tag{1.12}$$

а также

$$\sigma_{11}=\frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x_1}+\nu\frac{\partial v}{\partial x_2}-x_3\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1{}^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2{}^2}\right)+\frac{I_0}{G'}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}+\nu\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\right)\right]$$

$$\sigma_{22}=\frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial v}{\partial x_2}+\nu\frac{\partial u}{\partial x_1}-x_3\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2{}^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1{}^2}\right)+\frac{I_0}{G'}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}+\nu\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\right)\right] \qquad (1.13)$$

$$\sigma_{12}=\frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{\partial v}{\partial x_1}-2x_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{I_0}{G'}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\right)\right]$$

Наконец, для внутренних сил и моментов имеем

$$T_1=\frac{2hE}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}+\nu\frac{\partial v}{\partial x_2}\right),\qquad T_2=\frac{2hE}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}+\nu\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)$$

$$S=\frac{hE}{1+\nu}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{\partial v}{\partial x_1}\right),\qquad N_1=\frac{2h}{3}\varphi_1,\qquad N_2=\frac{4h}{3}\varphi_2$$

$$M_1=-\frac{2h^3E}{3(1-\nu^2)}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1{}^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2{}^2}-\frac{4}{5G'}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}+\nu\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\right)\right] \qquad (1.14)$$

$$M_2=-\frac{2h^3E}{3(1-\nu^2)}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_2{}^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1{}^2}-\frac{4}{5G'}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}+\nu\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\right)\right]$$

$$H=-\frac{2h^3E}{3(1+\nu)}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{2}{G'}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\right)\right]$$

Поступая обычным образом легко получить следующую систему осредненных по толщине уравнений движения пластинки

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_1}+\frac{\partial S}{\partial x_2}+\Gamma_1=\rho\int_{-h}^{h}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}dx_3$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_1}+\frac{\partial T_2}{\partial x_2}+\Gamma_2=\rho\int_{-h}^{h}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}dx_3,\qquad \frac{\partial N_1}{\partial x_1}+\frac{\partial N_2}{\partial x_2}+\Gamma_3=\rho\int_{-h}^{h}\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}dx_3$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1}+\frac{\partial H}{\partial x_2}-N_1+m_1=\rho\int_{-h}^{h}x_3\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}dx_3 \qquad (1.15)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_1}+\frac{\partial M_2}{\partial x_2}-N_2+m_2=\rho\int_{-h}^{h}x_3\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}dx_3$$

$$\Gamma_i=\int_{-h}^{h}R_i'\,dx_3,\qquad m_i=\int_{-h}^{h}x_3R_i'\,dx_3 \qquad (1.16)$$

Подставляя значения T_i, S, N_i, M_i, H, Γ_i, m_i, u_i в уравнения (1.17) окончательно получим

$$C\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1{}^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2{}^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial x_2}\right]=2\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{32\pi^2\mu^2h^3}{3c^4}\sigma J_0{}^2\frac{\partial u}{\partial t}-$$

$$-\frac{4\pi\mu}{c^2}\sigma J_0\int_{-h}^{h}e_3x_3\,dx_3-\frac{J_0}{\sigma}\int_{-h}^{h}\rho_e\,dx_3$$

$$C\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x_2{}^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1{}^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right]=2\rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\frac{\mu}{c}J_0\int_{-h}^{h}h_3\,dx_3$$

$$\frac{4h}{3}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\right)=2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{32\pi^2\mu^2h^3}{3c^4}\sigma J_0^2\frac{\partial w}{\partial t}-$$

$$-\frac{\mu}{c}J_0\int_{-h}^{h}h_2\,dx_3+\frac{4\pi\mu}{c^2}\sigma J_0\int_{-h}^{h}e_1x_3\,dx_3$$

$$D\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta w-\frac{4D}{5G'}\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_2^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_1\partial x_2}\right)+\frac{4h}{3}\varphi_1=$$

$$=\rho\frac{2h^3}{3}\frac{\partial^3 w}{\partial x_1\partial t^2}-\rho\frac{8h^3}{15G'}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}+\frac{32\pi^2\mu^2h^5}{5c^4}\sigma J_0^2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial t}-$$

$$-\frac{412\pi^2\mu^2h^5}{105c^4G'}\sigma J_0^2\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+\frac{4\pi\mu}{c^2}\sigma J_0\int_{-h}^{h}e_3x_3^2\,dx_3+\frac{J_0}{\sigma}\int_{-h}^{h}\rho_e x_3\,dx_3 \tag{1.17}$$

$$D\frac{\partial}{\partial x_2}\Delta w-\frac{4D}{5G'}\left(\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_2^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_1^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1\partial x_2}\right)+$$

$$+\frac{4h}{3}\varphi_2=\rho\frac{2h^3}{3}\frac{\partial^3 w}{\partial x_2\partial t^2}-\rho\frac{8h^3}{15G'}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2}-\frac{\mu}{c}J_0\int_{-h}^{h}h_3\,dx_3$$

где для жесткостей C и D имеем

$$C=\frac{2Eh}{1-\nu^2},\qquad D=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \tag{1.18}$$

Таким образом, рассматриваемая задача сводится к совместному решению пяти уравнений движения пластинки (1.17), уравнений электродинамики (1.5) в области пластинки $|x_3|<h$, где компоненты плотности электрического тока определяются согласно формул (1.12) и уравнений электродинамики во внешней области $|x_3|>h$:

$$\operatorname{rot}\mathbf{h}^{(e)}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{e}^{(e)}}{\partial t},\qquad \operatorname{div}\mathbf{h}^{(e)}=0$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{e}^{(e)}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{h}^{(e)}}{\partial t},\qquad \operatorname{div}\mathbf{e}^{(e)}=0 \tag{1.19}$$

При этом должны быть удовлетворены следующие условия на плоскостях $x_3=\pm h$:

$$\mu h_3=h_3^{(e)},\qquad h_2=h_2^{(e)}+\frac{4\pi}{c}J_0w,\qquad h_1=h_1^{(e)},\qquad e_1=e_1^{(e)},\qquad e_2=e_2^{(e)} \tag{1.20}$$

2. Рассмотрим «одномерную» задачу колебания токонесущей пластинки в форме волн, распространяющихся по направлению электрического тока, т. е. по направлению ox_1. Предполагается, что колебания не зависят от координаты x_2, а также считается, что v и φ_2 равны нулю [5].

В такой постановке уравнения движения (1.17) примут вид

$$\frac{2Eh}{1-\nu^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}=2\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{32\pi^2\mu^2h^3}{3c^4}\sigma J_0^2\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{4\pi\mu}{c^2}\sigma J_0\int_{-h}^{h}e_3x_3\,dx_3-\frac{J_0}{\sigma}\int_{-h}^{h}\rho_e\,dx_3$$

$$\frac{4h}{3}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}=2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{32\pi^2\mu^2h^3}{3c^4}\sigma J_0^2\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{\mu}{c}J_0\int_{-h}^{h}h_2\,dx_3+\frac{4\pi\mu}{c^2}\sigma J_0\int_{-h}^{h}e_1x_3\,dx_3$$

$$\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3}-\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\frac{4}{5G'}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1^2}+\frac{4h}{5}\varphi_1=\rho\frac{2h^3}{3}\frac{\partial^3 w}{\partial x_1\partial t^2}- \tag{2.1}$$

$$-\rho\frac{8h^3}{15G'}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}+\frac{32\pi^2\mu^2h^5}{5c^4}\sigma J_0^2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial t}+\frac{412\pi^2\mu^2h^5}{105c^4G'}\sigma J_0^2\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+$$

$$+\frac{4\pi\mu}{c^2}\sigma J_0\int_{-h}^{h} e_3 x_3^2\,dx_3+\frac{J_0}{\sigma}\int_{-h}^{h}\rho_e x_3\,dx_3$$

а также, условие реализации одномерности задачи

$$\frac{\mu}{c}J_0\int_{-h}^{h} h_3\,dx_3=0 \tag{2.2}$$

согласно которому следует полагать $h_3=0$.

Уравнения электродинамики (1.5) согласно (1.6)—(1.11), в области $|x_3|<h$ запишутся следующим образом:

$$\frac{\partial h_2}{\partial x_3}=-\frac{4\pi\sigma}{c}\left(e_1+\frac{4\pi\mu}{c^2}J_0x_3\frac{\partial w}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial x_1}=\frac{4\pi\sigma}{c}\left[e_3-x_3\frac{4\pi\mu}{c^2}J_0\left(\frac{\partial u}{\partial t}-x_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial t}+\frac{I_0}{G'}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\right]$$

$$\frac{\partial e_1}{\partial x_3}-\frac{\partial e_3}{\partial x_1}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial h_2}{\partial t},\qquad \frac{\partial e_1}{\partial x_1}+\frac{\partial e_3}{\partial x_3}=\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho_e \tag{2.3}$$

а также

$$\frac{\partial h_1}{\partial x_3}-\frac{\partial h_3}{\partial x_1}=\frac{4\pi\sigma}{c}e_2,\qquad \frac{\partial h_1}{\partial x_1}+\frac{\partial h_3}{\partial x_3}=0$$

$$\frac{\partial e_2}{\partial x_3}=\frac{\mu}{c}\frac{\partial h_1}{\partial t},\qquad \frac{\partial e_2}{\partial x_1}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial h_3}{\partial t} \tag{2.4}$$

Уравнения электродинамики в области $|x_3|>h$ имеют вид

$$\frac{\partial h_2^{(e)}}{\partial x_3}=-\frac{1}{c}\frac{\partial e_1^{(e)}}{\partial t},\qquad \frac{\partial h_2^{(e)}}{\partial x_1}=\frac{1}{c}\frac{\partial e_3^{(e)}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial e_1^{(e)}}{\partial x_3}-\frac{\partial e_3^{(e)}}{\partial x_1}=-\frac{1}{c}\frac{\partial h_2^{(e)}}{\partial t},\qquad \frac{\partial e_1^{(e)}}{\partial x_1}+\frac{\partial e_3^{(e)}}{\partial x_3}=0 \tag{2.5}$$

а также

$$\frac{\partial h_1^{(e)}}{\partial x_3}-\frac{\partial h_3^{(e)}}{\partial x_1}=\frac{1}{c}\frac{\partial e_2^{(e)}}{\partial t},\qquad \frac{\partial h_1^{(e)}}{\partial x_1}+\frac{\partial h_3^{(e)}}{\partial x_3}=0$$

$$\frac{\partial e_2^{(e)}}{\partial x_3}=\frac{1}{c}\frac{\partial h_1^{(e)}}{\partial t},\qquad \frac{\partial e_2^{(e)}}{\partial x_1}=-\frac{1}{c}\frac{\partial h_3^{(e)}}{\partial t} \tag{2.6}$$

Рассматривая приведенные уравнения, а также граничные условия (1.20), приходим к окончательному выводу, что основная задача, т. е. определение искомых функций w, u, φ_1, h_2, e_1, e_3, ρ_e, $h_2^{(e)}$, $e_1^{(e)}$, $e_2^{(e)}$, ρ_s отделяется от задачи определения функций h_1, h_2, e_2, $h_1^{(e)}$, $h_3^{(e)}$, $e_2^{(e)}$.

Полная постановка задачи не является одномерной. Искомые величины u, w, φ_1 являются функциями лишь x_1 (а также времени t), а компоненты электромагнитного поля также — x_3.

Основную задачу, т. е. систему уравнений (2.1), (2.3), (2.5) решим при упрощенных граничных условиях.

$$h_2=\frac{4\pi}{c}J_0w,\qquad e_1=e_1^{(e)},\qquad \varepsilon e_3=e_3^{(e)}-4\pi\rho_s \ \text{при}\ x_3=\pm h \tag{2.7}$$

После серии преобразований приходим к следующим исходным уравнениям:

уравнения движения

$$\frac{2Eh}{1-\nu^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=2\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\frac{\mu}{c}J_0\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{-h}^{h} h_2x_3\,dx_3-\frac{8\pi\varepsilon\mu h}{\sigma c^2}J_0^2\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{4h}{3}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}=2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{8\pi\mu h}{c^2}J_0^2 w$$

$$\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3}-\frac{4}{5G'}\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1^2}+\frac{4h}{3}\varphi_1=\frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^3 w}{\partial x_1\partial t^2}-$$

$$-\frac{8\pi\varepsilon\mu h^3}{\sigma c^2}J_0^2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial t}-\frac{8\rho h^3}{15G'}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}+\frac{16\pi\varepsilon\mu h^3}{5\sigma c^2 G'}J_0^2\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+\frac{\mu}{c}J_0\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{-h}^{h}h_2x_3^2\,dx_3 \tag{2.8}$$

уравнение электродинамики

$$\frac{\partial^2 h_2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 h_2}{\partial x_3^2}=\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial h_2}{\partial t}-\frac{16\pi^2\mu\sigma}{c^3}J_0\left[\frac{\partial w}{\partial t}+\right.$$

$$\left.+x_3\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial t}-x_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial t}+\frac{I_0}{G'}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right)\right] \tag{2.9}$$

условия на плоскостях $x_3=\pm h$

$$h_2=(4\pi/c)J_0 w \tag{2.10}$$

Из системы уравнений (2.8), исключая функцию φ_1, последнее уравнение перепишем следующим образом:

$$\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4}-\frac{2\rho h^3}{3}\left(1+\frac{6E}{5G'(1-\nu^2)}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2\,\partial t^2}+\frac{4\rho^2h^2}{5G'}\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}+$$

$$+\frac{8\pi\varepsilon\mu h^3}{\sigma c^2}J_0^2\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2\,\partial t}-\frac{24\pi\varepsilon\mu\rho h^3}{5\sigma c^2 G'}J_0^2\frac{\partial^3 w}{\partial t^3}+\frac{24\pi\mu}{5G'c^2}\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}J_0^2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}- \tag{2.11}$$

$$-\frac{\mu}{c}J_0\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\int_{-h}^{h}h_2x_3^2\,dx_3-2\rho h\left(\frac{8\pi\mu h^2}{5G'c^2}-1\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+$$

$$+\frac{96\varepsilon\pi^2\mu^2h^3}{5G'\sigma c^4}J_0^4\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{8\pi\mu h}{c^2}J_0^2 w$$

Далее, если приближенно принять для всех $|x_3|\leqslant h$, $h_2\approx 4\pi J_0 w/c$, что согласуется с граничными условиями (2.10), то задача поперечных колебаний пластинки становится автономной. Тогда, рассматриваемая задача сводится к решению первого уравнения (2.8) и уравнения (2.11), с учетом равенств

$$\int_{-h}^{h}h_2x_3^2\,dx_3\approx\frac{8\pi h^3}{3c}J_0 w,\qquad \int_{-h}^{h}h_2x_3\,dx_3=0$$

Наконец укажем, что в рассматриваемой задаче члены характеризующие явления связанные с учетом деформаций поперечных сдвигов и взаимовлияния сдвиговых деформаций и стороннего тока содержатся лишь в уравнении (2.11). Полагая

$$u=u_0\exp i(\omega t-k_1x_1),\quad w=w_0\exp i(\omega t-k_1x_1) \tag{2.12}$$

из (2.8) получим следующее характеристическое уравнение, для определения частоты продольных колебаний ω или скорости распространения продольных волн $V_e=\omega/k_1$:

$$\omega^2+i\frac{4\pi\varepsilon\mu}{\sigma\rho c^2}J_0^2\omega-\frac{Ek_1^2}{\rho(1-\nu^2)}=0 \tag{2.13}$$

откуда для частоты продольных колебаний получим

$$\omega=-i\frac{2\pi\varepsilon\mu}{\sigma\rho c^2}J_0^2\pm\left(\frac{Ek_1^2}{\rho(1-\nu)}-\frac{4\pi^2\mu^2\varepsilon^2}{\sigma^2\rho^2c^4}J_0^4\right)^{1/2} \tag{2.14}$$

Перепишем уравнение (2.11) следующим образом

$$\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4}-\frac{2\rho h^3}{3}(1+\beta)\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2\,\partial t^2}+\frac{4\rho^2h^3}{5G'}\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}+2\rho h\Big(1-$$

$$-\frac{8\pi\mu h^2}{5G'c^2}J_0^2\Big)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{8\pi\mu h^3}{3c^2}J_0^2(1-\beta)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}=\frac{8\pi\mu h}{c^2}J_0^2 w \qquad (2.15)$$

$$\beta=6E/(5G'(1-\nu^2)).$$

Подставляя значение w из (2.12) в (2.15) получим следующее характеристическое уравнение для частоты поперечных колебаний

$$\left(\frac{\omega}{k_1}\right)^4-\frac{5E}{4(1+\nu)\rho}\left[\frac{1+\beta}{3}+\frac{1}{k_1^2h^2}\left(1-\frac{\beta k_1^4h^4}{9}\frac{J_0^2}{J_*^2}\right)\right]\left(\frac{\omega}{k_1}\right)^2+$$

$$+\frac{5E^2}{12\rho^2(1+\nu)(1-\nu^2)}\left\{1-\left[1-(1-\beta)\frac{k_1^2h^2}{3}\right]\frac{J_0^2}{J_*^2}\right\}=0 \qquad (2.16)$$

где для критической плотности тока при потере устойчивости пластинки имеем

$$J_{*1}^2=c^2Ek_1^4h^2/(12\pi\mu(1-\nu^2)) \qquad (2.17)$$

Из характеристического уравнения (2.16) легко получить частоты колебаний или скорости распространения поперечной волны $V_{ti}=\omega_i/k_1$:

$$V_{t1}^2\approx\frac{5E}{4\rho(1+\nu)}\left[\frac{1+\beta}{3}+\frac{1}{k_1^2h^2}\left(1-\beta\frac{k_1^4h^4}{9}\frac{J_0^2}{J_{*1}^2}\right)\right] \qquad (2.18)$$

$$V_{t2}^2\approx\frac{Ek_1^2h^2}{3\rho(1-\nu^2)}\left\{1-\left[1-\frac{k_1^2h^2}{3}(1-\beta)\right]\frac{J_0^2}{J_{*1}^2}\right\}\times$$

$$\times\left[\frac{1+\beta}{3}+\frac{1}{k_1^2h^2}\left(1-\beta\frac{k_1^4h^4}{9}\frac{J_0^2}{J_{*1}^2}\right)\right]^{-1} \qquad (2.19)$$

Очевидно, при $k_1^2h^2\ll 1$, V_{t2} значительно меньше V_{t1}.

Учет поперечных сдвигов приводит к появлению, точнее к выявлению, новой частоты поперечных колебаний ω_1 (или скорости V_{t1}) и дает существенную поправку к частоте поперечных колебаний (или скорости распределения поперечных волн). Учет поперечных сдвигов, как и следовало ожидать приводит к уменьшению частоты колебаний или соответствующей скорости распространения поперечной волны в пластинке.

3. При рассмотрении «одномерной» задачи колебания токонесущей пластинки в форме волн, распространяющихся по направлению перпендикулярному к направлению действия электрического тока, т. е. по направлению ox_2, предполагается, что колебания не зависят от координаты x_1, при этом считается, что u и φ_1 равны нулю [5].

В этом случае задача существенным образом отличается от предыдущей задачи. Ход решения задачи несколько иной. Ввиду ограниченности объема статьи мы здесь приводим лишь окончательный результат: значения скоростей распространения поперечных волн

$$V_{t1}^2\approx\frac{5E}{4(1+\nu)\rho}\left[\frac{1+\beta}{3}+\frac{1}{k_2^2h^2}\left(1-\frac{k_2^4h^4}{9}\beta\right)\frac{J_0^2}{J_{*2}^2}\right] \qquad (3.1)$$

$$V_{t2}^2\approx\frac{Ek_2^2h^2}{3(1-\nu^2)\rho}\left[1-\left(1+\beta\frac{k_2^2h^2}{3}\right)\frac{J_0^2}{J_{*2}^2}\right]\left[\frac{1+\beta}{3}+\frac{1}{k_2^2h^2}\left(1-\frac{k_2^4h^4}{9}\beta\right)\frac{J_0^2}{J_{*2}^2}\right]^{-1} \qquad (3.2)$$

которые безусловно отличны от соответствующих формул (2.18), (2.19) предыдущей задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белубекян М. В.* К задаче колебания и устойчивости пластины с постоянным электрическим током // Механика. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1983. Вып. 3.
2. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. М.: Наука, 1976. 616 с.
3. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272 с.
4. *Белубекян М. В.* О статической устойчивости токонесущей пластинки // Докл. АН АрмССР. 1982. Т. 74. № 5. С. 208–212.
5. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин: Прочность, устойчивость и колебания. М.: Наука, 1987. 360 с.

Ереван

Поступила в редакцию
13.II.1990