

УДК 539.3:534.1

© 1990 г.

В. В. ВАСИЛЬЕВ, А. В. СИБИРЯКОВ

ИМПУЛЬСНОЕ ЛОКАЛЬНОЕ НАГРУЖЕНИЕ СЛОИСТОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ

Пластины из слоистых композитов являются в настоящее время распространенными элементами конструкций различного назначения. Как известно, высокая удельная прочность и жесткость слоев, армированных углеродными, органическими или борными волокнами, сочетается в композитных пластинах с низкой прочностью связи между слоями, которая обеспечивается полимерной матрицей. В связи с этим импульсное воздействие нормального давления часто приводит к откольной форме разрушения, сопровождающейся расслоением структуры. Особенно опасным в этом отношении является локальное динамическое воздействие, возникающее, например, при соударении композитных панелей обшивки самолета с твердыми частицами. В настоящей работе предлагается прикладной метод анализа напряженного состояния слоистой ортотропной пластины при воздействии локального импульса давления, основанный на разделении этого состояния на основное — соответствующее классической теории изгиба пластин, и связанное с ним дополнительное — соответствующее задаче динамики слоистого стержня.

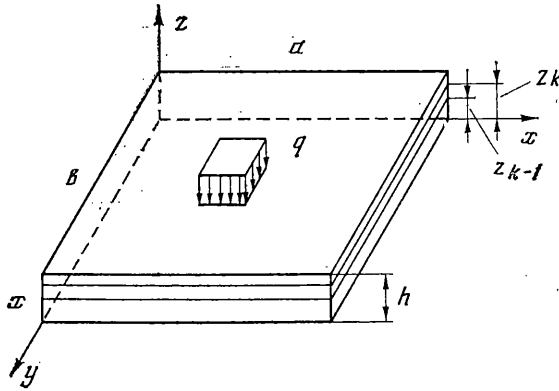
1. Рассмотрим слоистую пластину, нагруженную нормальным давлением $q(x, y, t)$ (фиг. 1). Считая пластину тонкой, воспользуемся гипотезами Кирхгоффа. При этом, полагая в соответствии с этими гипотезами трансверсальные деформации сдвига e_{xz} и e_{yz} равными нулю, сохраним нормальную трансверсальную деформацию $e_z = e$, вызывающую расслоение пластины при импульсном воздействии давления q . Тогда, интегрируя соотношения Коши для трансверсальных деформаций, получим u_0 , v_0 , w_0 — перемещения точки начальной поверхности $z=0$ (фиг. 1) по осям x , y , z :

$$\begin{aligned} w &= w_0(x, y, t) + \eta \\ u &= u_0(x, y, t) - z \partial w_0 / \partial x - \partial \theta / \partial x \\ v &= v_0(x, y, t) - z \partial w_0 / \partial y - \partial \theta / \partial y \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\eta = \int_0^z e \, dz, \quad \theta = \int_0^z \eta \, dz \quad (1.2)$$

Выделим в перемещениях (1.1) основные составляющие u_0 , v_0 , w_0 , связанные с общим изгибом пластины, и дополнительные — связанные с поперечной деформацией e . Предположим, что напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} , действующие в слоях, не зависят от дополнительных перемещений, т. е. соответствуют классической теории изгиба пластин. Используя обобщенный закон Гука для ортотропного материала, соответствующие геометрические соотношения и равенства (1.1), в которых принимается $e=0$, получим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= A_{11} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + A_{12} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= A_{21} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + A_{22} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\ \tau_{xy} &= A_{44} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$



Фиг. 1

Коэффициенты жесткости для слоистого пакета определяются следующим образом

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^K A_{ij}^k (H_{k-1} - H_k) \quad (1.4)$$

Здесь K — число слоев; A_{ij}^k — коэффициенты жесткости k -го слоя; $H_k = H(z - z_k)$ — функция Хевисайда (при этом $H_0 = 1$ и $H_k = 0$; z_k — координата верхней границы k -го слоя (при этом $z_0 = 0$, фиг. 1).

Трансверсальные напряжения, определяющие взаимодействие слоев, найдем из уравнений равновесия. Интегрируя эти уравнения по z и учитывая, что $\tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0$ при $z = 0$ (фиг. 1), найдем (интегрирование ведется от нуля до z):

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \int_0^z \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dz - \int_0^z \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dz - \int_0^z \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dz \\ \tau_{yz} &= \int_0^z \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dz - \int_0^z \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dz - \int_0^z \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dz. \\ \sigma_z &= \int_0^z \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dz - \int_0^z \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dz - \int_0^z \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dz \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь аналогично равенству (1.4):

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k (H_{k-1} - H_k)$$

где ρ_k — плотность материала k -го слоя.

Получим уравнения, определяющие основные перемещения u_0 , v_0 , w_0 . Для этого воспользуемся граничными условиями на поверхности $z = h$ ($\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, $\sigma_z = q$) и соотношениями (1.5). Подставляя напряжения (1.3) и перемещения (1.1) в уравнения (1.5), запишем уравнения движения элемента рассматриваемой пластины

$$\begin{aligned} B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + B_{44} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (B_{12} + B_{44}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - C_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - (C_{12} + 2C_{44}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} = \\ = B_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + C_0 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& B_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + B_{44} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{44}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - C_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} - (C_{12} + 2C_{44}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} = \\
& = B_p \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + C_p \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} \\
& D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{44}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - K_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - \\
& - (K_{12} + 2K_{44}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} - K_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - (K_{12} + 2K_{44}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} - K_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - \\
& - (K_{12} + 2K_{44}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} = B_p \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + D_p \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial t^2} \right) - K_p \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) - \\
& - q(x, y, t) - \int_0^h \rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} dz - \int_0^h \int_0^z \left[\rho \left(\frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 \theta}{\partial y^2 \partial t^2} - A_{11} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} - A_{22} \frac{\partial^4 \theta}{\partial y^4} - \right. \right. \\
& \left. \left. - 2(A_{12} + 2A_{44}) \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} \right] dz dz \quad (1.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{ij} &= \int_0^h A_{ij} dz, & C_{ij} &= \int_0^h A_{ijz} dz, & K_{ij} &= \int_0^h dz \int_0^z A_{ij} dz \\
D_{ij} &= \int_0^h dz \int_0^z A_{ijz} dz, & B_p &= \int_0^h \rho dz, & C_p &= \int_0^h \rho z dz \\
K_p &= \int_0^h dz \int_0^z \rho dz, & D_p &= \int_0^h dz \int_0^z \rho z dz
\end{aligned}$$

Заметим, что при выводе уравнений (1.6) были введены дополнительные упрощения, в частности, не были учтены инерционные члены, соответствующие трансверсальной деформации e .

2. Получим теперь уравнение, определяющее дополнительное состояние, т. е. функцию e . С этой целью запишем обобщенный закон Гука для трансверсальных нормальных напряжений

$$\sigma_z = A_{13} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) + A_{23} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) + A_{33} e \quad (2.1)$$

Отметим, что равенство (2.1) в отличие от (1.3) учитывает эффект Пуассона по толщине, т. е. влияние напряжений основного состояния на трансверсальную нормальную деформацию e . Как известно, композитная пластина, сжатая в своей плоскости, может расслоиться при достижении деформацией e , вызванной эффектом Пуассона, некоторого предельного и достаточно малого значения. В связи с этим эффект Пуассона, несущественный для основных напряжений (1.3), следует учесть, при определении трансверсальной деформации. Подставляя напряжение (2.1) в третье уравнение (1.5) и учитывая равенства (1.1), (1.3), а также первые два уравнения (1.5), окончательно получим

$$\begin{aligned}
& \int_0^z dz \int_0^z \left[A_{11} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} + 2(A_{12} + 2A_{44}) \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{22} \frac{\partial^4 \theta}{\partial y^4} \right] dz - A_{13} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - A_{23} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \\
& + A_{33} e - \int_0^z dz \int_0^z \rho \left(\frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 \theta}{\partial y^2 \partial t^2} \right) dz - \int_0^z \rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} dz = \int_0^z dz \int_0^z \left[A_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (A_{12} + 2A_{44}) \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} \right) + A_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - \rho \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) \Big] dz - \\
& - A_{13} \frac{\partial u_0}{\partial x} - A_{23} \frac{\partial v_0}{\partial y} - \int_0^z dz \int_0^z \left[A_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(A_{12} + 2A_{44}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - \right. \\
& \left. - \rho \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial t^2} \right) \right] dz + \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \int_0^z \rho dz + \left(A_{13} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + A_{23} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) z
\end{aligned} \quad (2.2)$$

Итак, рассматриваемая задача сводится к системе интегро-дифференциальных уравнений (1.6), (1.7), (2.2), включающих в качестве неизвестных функций $u_0(x, y, t)$, $v_0(x, y, t)$, $w_0(x, y, t)$ и $e(x, y, z, t)$. Для построения решения прежде всего проводится преобразование Лапласа — Карсона по времени. Далее изображения искомого функций представляются рядами по координатам x, y . При этом для выбора координатных функций в рядах для перемещений используется решение системы (1.6), в которой принято $e=0$, т. е. решение, соответствующее классической теории тонких пластин. Затем с помощью уравнений (1.6) можно исключить тангенциальные перемещения и свести задачу к уравнениям (1.7) и (2.2) относительно прогиба и трансверсальной деформации. Последнюю можно также представить рядом, удовлетворяющим условию закрепления пластины, или, учитывая ее локальный характер, аппроксимировать функциями, быстро убывающими от места приложения нагрузки. В результате применения метода Бубнова — Галеркина уравнение (1.7) сводится к системе линейных алгебраических уравнений, с помощью которых можно исключить прогиб. Из уравнения (2.2) при этом следует система интегральных уравнений, которая решается с помощью преобразования Лапласа — Карсона по переменной z .

3. Рассмотрим свободно опертую по контуру пластину, для которой может быть получено точное решение уравнений (1.6), (1.7), (2.2). Представим изображения искомого функций $U(x, y, p)$, $V(x, y, p)$, $W(x, y, p)$, $E(x, y, z, p)$ (p — параметр преобразования Лапласа — Карсона по времени в виде следующих разложений

$$\begin{aligned}
U &= C_1 + C_2 x + C_3 y + \sum_m \sum_n U_{mn}(p) \cos \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b} \\
V &= C_4 + C_5 x + C_6 y + \sum_m \sum_n V_{mn}(p) \sin \frac{\pi m x}{a} \cos \frac{\pi n y}{b} \\
W &= \sum_m \sum_n W_{mn}(p) \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b}, \quad E = A + \sum_m \sum_n E_{mn}(p) \sin \frac{\pi m x}{a} \times \\
& \times \sin \frac{\pi n y}{b}
\end{aligned} \quad (3.1)$$

Постоянные C_i определяются из граничных условий и позволяют учесть усилия, распределенные по контуру пластины. Постоянная A учитывает эффект Пуассона, соответствующий этим усилиям. Из уравнения (2.2) найдем $A = -(A_{13} C_2 + A_{23} C_6) / A_{33}$.

Как уже отмечалось, уравнения (1.6) позволяют выразить U_{mn} и V_{mn} через W_{mn} ($\alpha = \pi m/a$, $\beta = \pi n/b$):

$$\begin{aligned}
U_{mn} &= \{ [C_{11} \alpha^3 + (C_{12} + 2C_{44}) \alpha \beta^2 - C_p \alpha p^2] (B_{22} \beta^2 + B_{44} \alpha^2 + B_p p^2) - \\
& - [C_{22} \beta^3 + (C_{12} + 2C_{44}) \alpha^3 \beta - C_p \beta p^2] (B_{12} + B_{44}) \alpha \beta \} [(B_{11} \alpha^2 + B_{44} \beta^2 + \\
& + B_p p^2) (B_{22} \beta^2 + B_{44} \alpha^2 + B_p p^2) - (B_{12} + B_{44})^2 \alpha^2 \beta^2]^{-1} W_{mn} \\
V_{mn} &= \{ [C_{22} \beta^3 + (C_{12} + 2C_{44}) \alpha^3 \beta - C_p \beta p^2] (B_{11} \alpha^2 + B_{44} \beta^2 + B_p p^2) - \\
& - [C_{11} \alpha^3 + (C_{12} + 2C_{44}) \alpha \beta^2 - C_p \alpha p^2] (B_{12} + B_{44}) \alpha \beta \} [(B_{11} \alpha^2 + B_{44} \beta^2 + \\
& + B_p p^2) (B_{22} \beta^2 + B_{44} \alpha^2 + B_p p^2) - (B_{12} + B_{44})^2 \alpha^2 \beta^2]^{-1} W_{mn}
\end{aligned} \quad (3.2)$$

Подставляя ряды (3.1) в уравнение (2.2), можно получить интегральное уравнение, связывающее E_{mn} и U_{mn} , V_{mn} , W_{mn} . Для построения решения этого уравнения проведем преобразование Лапласа — Карсона по переменной z (s — переменная в интегральном преобразовании). В результате получим весьма громоздкое уравнение, содержащее систему линейно независимых функций e^{-sz} , которая разбивает уравнение на совокупность последовательно обрабатываемых по равенств

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\infty} E_{mn} e^{-sz} dz \left\{ -\frac{\Gamma_1}{s^4} + \frac{\rho_1 p^2 - f_1}{s^2} - A_{33}^{-1} \right\} + W_{mn} \left\{ -\Gamma_1 \frac{1}{s^3} + \frac{\rho p^2 - f_1}{s} \right\} + \\
 & \quad + U_{mn} \left\{ \frac{\delta_1^1}{s^2} + A_{13}^{-1} \alpha \right\} + V_{mn} \left\{ \frac{\delta_2^1}{s^2} + A_{23}^{-1} \beta \right\} = 0 \\
 & \quad s \int_{z_{k+1}}^{\infty} E_{mn} e^{-sz} dz \left\{ \frac{\Gamma_{k+1}}{s^4} - \frac{\rho_{k+1} p^2 - f_{k+1}}{s^2} + A_{33}^{k+1} \right\} = \\
 & = \left\{ \int_0^{z_k} \int_0^z E_{mn} dz dz \left\{ \frac{\Gamma_k - \Gamma_{k+1}}{s^2} - (f_{k+1} - f_k) \right\} + \int_0^{z_k} E_{mn} dz \left\{ \frac{\Gamma_k - \Gamma_{k+1}}{s^3} - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{(\rho_k - \rho_{k+1}) p^2}{s} + \frac{f_k - f_{k+1}}{s} \right\} + s \int_{z_k}^{\infty} E_{mn} e^{-sz} dz \left\{ \frac{\Gamma_k}{s^4} - \frac{\rho_k p^2 - f_k}{s^2} + A_{33}^k \right\} + \right. \\
 & \quad \left. + W_{mn} \left\{ \frac{(\rho_{k+1} - \rho_k) p^2}{s} - (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \left(\frac{z_k}{s^2} + \frac{1}{s^3} \right) - (f_{k+1} - f_k) \left(z_k + \frac{1}{s} \right) \right\} + \right. \\
 & \quad \left. + U_{mn} \left\{ \frac{\delta_1^{k+1} - \delta_1^k}{s^2} + (A_{13}^{k+1} - A_{13}^k) \alpha \right\} + V_{mn} \left\{ \frac{\delta_2^{k+1} - \delta_2^k}{s^2} + (A_{23}^{k+1} - A_{23}^k) \beta \right\} \right\} e^{-sz_k} \\
 & \quad \delta_1 = \rho p^2 \alpha + A_{11} \alpha^3 + (A_{12} + 2A_{44}) \alpha \beta^2 \\
 & \quad \delta_2 = \rho p^2 \beta + A_{22} \beta^3 + (A_{12} + 2A_{44}) \alpha^2 \beta \\
 & \quad \Gamma = \alpha \delta_1 + \beta \delta_2, \quad f = A_{12} \alpha^2 + A_{23} \beta^2
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Равенства (3.3) позволяют последовательно определить E_{mn} во всех слоях. Например, для первого слоя имеем (верхний индекс определяет номер слоя; λ_{12} — положительные корни уравнения $A_{33} \lambda^4 - (\rho p^2 - f) \lambda^2 + \Gamma = 0$):

$$\begin{aligned}
 E_{mn}^1 &= \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^2 \sum_{\eta_1} [k_{i_1}^{-1} \eta_1 W_{mn} + m_{i_1}^{-1} U_{mn} + n_{i_1}^{-1} V_{mn}] e^{\eta_1 \lambda_{i_1} z} \\
 k_{i_1}^{-1} &= (-1)^{i_1-1} \frac{(\lambda_{i_1}^{-1})^3}{(\lambda_1^{-1})^2 - (\lambda_2^{-1})^2} \\
 m_{i_1}^{-1} &= (-1)^{i_1-1} \frac{1}{A_{33}^{-1}} \frac{1}{(\lambda_1^{-1})^2 - (\lambda_2^{-1})^2} [\delta_1^{-1} + A_{13}^{-1} \alpha (\lambda_{i_1}^{-1})^2] \\
 n_{i_1}^{-1} &= (-1)^{i_1-1} \frac{1}{A_{33}^{-1}} \frac{1}{(\lambda_1^{-1})^2 - (\lambda_2^{-1})^2} [\delta_2^{-1} + A_{23}^{-1} \beta (\lambda_{i_1}^{-1})^2]
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Методом математической индукции можно получить в общем случае, что

$$\begin{aligned}
 E_{mn}^{k+1} &= \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{i_1=1, i_2=1, \dots, i_{k+1}=1}^2 \sum_{\eta_1, \dots, \eta_{k+1}} (\eta_1 k_{i_1}^{-1} W_{mn} + m_{i_1}^{-1} U_{mn} + \\
 & + n_{i_1}^{-1} V_{mn}) \prod_{j=1}^k (m_{i_{j+1}}^{j+1} i_j + \eta_{j+1} \eta_j k_{i_{j+1}}^{j+1} i_j) \exp \left[\sum_{j=1}^k \eta_j \lambda_{i_j}^j (z_j - z_{j-1}) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \eta_{k+1} \lambda_{i_{k+1}}^{k+1} (z - z_k) + \sum_{r=2}^{k+1} \frac{1}{2^{k-r+2}} \sum_{i_r=1, \dots, i_{k+1}=1}^2 \sum_{\eta_r, \dots, \eta_{k+1}} (\varphi_{i_r}^r U_{mn} + \\
& + \Psi_{i_r}^r V_{mn}) \prod_{j=r}^k (m_{i_{j+1}i_j}^{j+1} + \eta_{j+1} \eta_j k_{i_{j+1}i_j}^{j+1}) \exp \left[\sum_{j=r}^k \eta_j \lambda_{i_j}^j (z_j - z_{j-1}) + \right. \\
& \left. + \eta_{k+1} \lambda_{i_{k+1}}^{k+1} (z - z_k) \right] \quad (k=0, \dots, K-1) \quad (3.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{i_{j+1}i_j}^{j+1} = & (-1)_{i_{j+1}}^{i_j-1} \frac{1}{A_{33}^{j+1} (\lambda_1^{j+1})^2 - (\lambda_2^{j+1})^2} \left[A_{33}^j \lambda_{i_j}^j \lambda_{i_{j+1}}^{j+1} + \right. \\
& \left. + A_{33}^j \frac{(\lambda_{i_{j+1}}^{j+1})^3}{\lambda_{i_j}^j} - (\rho_j p^2 - f_j) \frac{(\lambda_{i_{j+1}}^{j+1})^2}{\lambda_{i_j}^j} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{i_j}^j = & (-1)_{i_j-1} \frac{1}{A_{33}^j} \frac{1}{(\lambda_1^j)^2 - (\lambda_2^j)^2} \left\{ \frac{\delta_1^j \delta_2^{j-1} - \delta_2^j \delta_1^{j-1}}{\Gamma_{j-1}} \beta + \right. \\
& \left. + \left[\frac{\delta_2^{j-1}}{\Gamma_{j-1}} \alpha \beta (A_{13}^j - A_{13}^{j-1}) - \frac{\delta_1^{j-1}}{\Gamma_{j-1}} \alpha \beta (A_{23}^j - A_{23}^{j-1}) \right] (\lambda_{i_j}^j)^2 \right\} \\
\Psi_{i_j}^j = & - \frac{\beta}{\alpha} \varphi_{i_j}^j
\end{aligned}$$

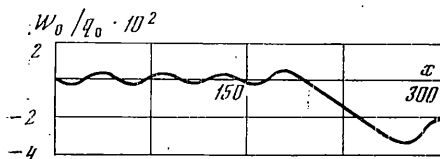
В равенствах (3.4), (3.5) используется формальная операция суммирования по переменным η_j , которые принимают значения ± 1 . Кроме того,

считается, что $\prod_{j=1}^0 (\dots) = 1$.

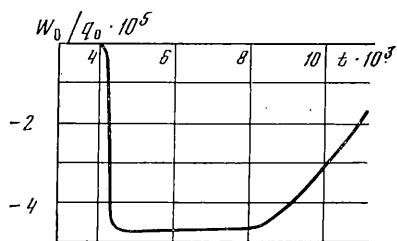
Для получения последнего уравнения воспользуемся уравнением (1.7). Подставляя в него ряды (3.4) и исключая трансверсальную деформацию с помощью равенств (3.5), получим (Q — изображение нагрузки q):

$$\begin{aligned}
& W_{mn} \frac{1}{2^K} \sum_{i_1 \dots i_{K-1}}^2 \sum_{\eta_1 \dots \eta_K} \eta_1 k_{i_1}^1 \prod_{j=1}^{K-1} (m_{i_{j+1}i_j}^{j+1} + \eta_{j+1} \eta_j k_{i_{j+1}i_j}^{j+1}) \times \\
& \times \left(A_{33}^K + A_{13}^K \frac{\alpha^2}{(\lambda_{i_K}^K)^2} + A_{23}^K \frac{\beta^2}{(\lambda_{i_K}^K)^2} \right) \exp \sum_{j=1}^K \eta_j \lambda_{i_j}^j h_j = \\
= & -Q - \frac{1}{2^K} \sum_{i_1 \dots i_{K-1}}^2 \sum_{\eta_1 \dots \eta_K} (m_{i_1}^1 U_{mn} + n_{i_1}^1 V_{mn}) \prod_{j=1}^{K-1} (m_{i_{j+1}i_j}^{j+1} + \eta_{j+1} \eta_j k_{i_{j+1}i_j}^{j+1}) \times \\
& \left(A_{33}^K + A_{13}^K \frac{\alpha^2}{(\lambda_{i_K}^K)^2} + A_{23}^K \frac{\beta^2}{(\lambda_{i_K}^K)^2} \right) \exp \sum_{j=1}^K \eta_j \lambda_{i_j}^j h_j - \\
- & \sum_{r=2}^K \frac{1}{2^{K-r+1}} \sum_{i_r \dots i_{K-1}}^2 \sum_{\eta_r \dots \eta_K} (\varphi_{i_r}^r U_{mn} + \Psi_{i_r}^r V_{mn}) \prod_{j=r}^{K-1} (m_{i_{j+1}i_j}^{j+1} + \eta_{j+1} \eta_j k_{i_{j+1}i_j}^{j+1}) \times \\
& \times \left(A_{33}^K + A_{13}^K \frac{\alpha^2}{(\lambda_{i_K}^K)^2} + A_{23}^K \frac{\beta^2}{(\lambda_{i_K}^K)^2} \right) \exp \sum_{j=r}^K \eta_j \lambda_{i_j}^j h_j + \\
& + A_{13}^K \left(\frac{\delta_2^K \alpha \beta}{\Gamma_K} U_{mn} - \frac{\delta_2^K \alpha^2}{\Gamma_K} V_{mn} - C_{23}^K \left(\frac{\delta_1^K \beta^2}{\Gamma_K} U_{mn} - \frac{\delta_1^K \beta}{\Gamma_K} V_{mn} \right) \right)
\end{aligned}$$

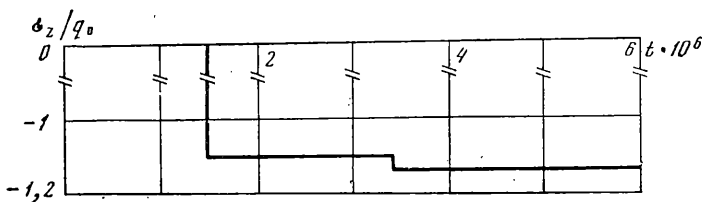
Три уравнения (3.2) и (3.6) позволяют найти U_{mn} , V_{mn} , W_{mn} , а уравнения (3.5) — определить E_{mn} в каждом слое. В результате разложения (3.1) определяют изображения искомых функций. Для обращения преобразования Лапласа — Карсона, т. е. для получения функций времени, можно воспользоваться методом разделения на элементарные волны, описанным в [1]. Соотношения (1.3) и (2.1) позволяют найти напряжения.



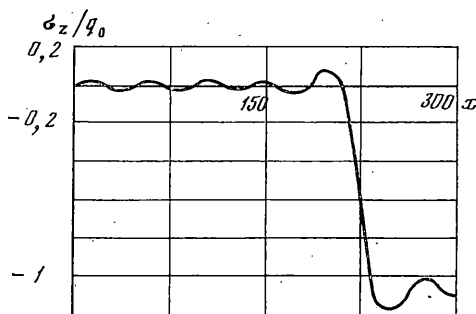
Фиг. 2



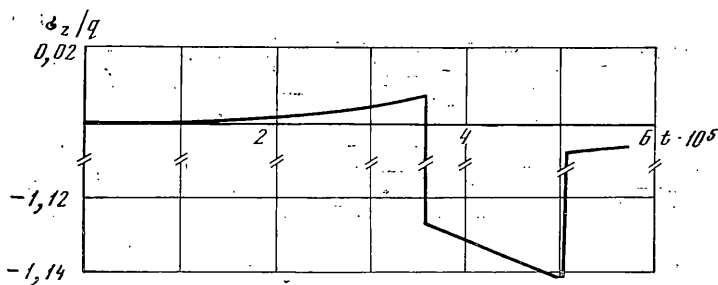
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

4. В качестве примера рассмотрим двухслойную квадратную пластину со сторонами $a=b=0,6$ м. и толщинами слоев $h_1=h_2=5 \cdot 10^{-3}$ м. Пластина выполнена из материала с характеристиками $A_{11}^1=150$ ГПа, $A_{11}^2=65$ ГПа, $A_{12}^1=3,36$ ГПа, $A_{12}^2=2,21$ ГПа, $A_{22}^1=12$ ГПа, $A_{22}^2=8,5$ ГПа, $A_{33}^1=12$ ГПа, $A_{33}^2=8,5$ ГПа, $\rho_1=1600$ кг/м³, $\rho_2=2000$ кг/м³. Внешний импульс принят в виде $q=q_0[M(x^{-3}/8a)-N(x^{-5}/8a)][N(y^{-3}/8b)-N(y^{-5}/8b)][N(t-0)-N(t-\tau)]$. Расчеты проводились для ступенчатого импульса $\tau \rightarrow \infty$, причем учитывались двадцать первых элементарных волн. На фиг. 2 показано распределение прогиба $w_0(x, y=b/2)$ при $t=8,6 \cdot 10^{-6}$ с, а на фиг. 3 – зависимость прогиба w_0 в центре пластины от времени. На фиг. 4–6 показаны трансверсальные напряжения, отнесенные к амплитуде внешнего импульса. Фиг. 4, 5 соответствуют верхнему слою ($z=7 \cdot 10^{-3}$ м, см. фиг. 1), а фиг. 6 – нижнему слою ($z=-2 \cdot 10^{-3}$ м). На фиг. 4 и 6 представлено изменение напряжения в центре пластины по времени, а на фиг. 5 – по координате x при $y=b/2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. В. Васильев, А. В. Сибирияков. Распространение упругих волн в слоистой полосе // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 1. С. 104–109.

Москва

Поступила в редакцию
22.I.1990