

УДК 539.3

© 1990 г.

Э. И. ГРИГОЛЮК, П. Я. НОСАТЕНКО, Ю. Ю. ШИРШОВ

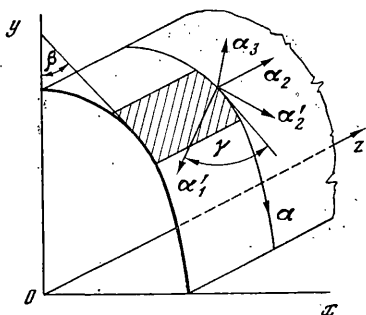
ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ОБОБЩЕННОЙ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ СЛОИСТЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

Протяженные слоистые цилиндрические оболочки и панели (в том числе и некруговой формы), выполненные из композитных материалов, являются типичными элементами силовых конструкций в современном машиностроении [1]. В связи с общей тенденцией использования при проектировании малослойных систем на основе композитов с высокой удельной прочностью и жесткостью, возрастает важность уточненных расчетов напряженно-деформированного состояния с учетом «неклассических» эффектов, обусловленных анизотропией физико-механических свойств слоев, неоднородностью внутреннего строения и повышенной деформируемостью. Сложный характер изменения напряжений и деформаций по толщине слоистых анизотропных оболочек не всегда позволяет с достаточной степенью точности выполнить необходимые расчеты на основе уравнений теории оболочек, включая их наиболее совершенные варианты (современное состояние подхода, основанного на сведениях задачи теории упругости к задачам теории оболочек, учитывающим неклассические эффекты, достаточно подробно обсуждается в обзоре [2]). Здесь перспективным представляется подход, связанный с численным решением уравнений теории упругости, наиболее разработанный применительно к осесимметричным геометрически нелинейным задачам упругости и термоупругости слоистых анизотропных оболочек вращения [3, 4]. Для упругих неоднородных тел, обладающих прямолинейной анизотропией, разработан ряд методик [5, 6, 7], позволяющих в рамках линейной теории упругости учесть анизотропию и пространственный характер напряженно-деформированного состояния.

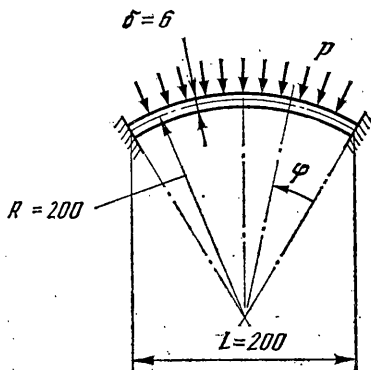
В [7] методом конечных элементов решена задача термоупругой обобщенной плоской деформации полосы, выполненной из самоуравновешенного композитного материала. В [5] конечноэлементное решение задачи об обобщенной плоской деформации слоистой анизотропной полосы используется для исследований эффектов на свободном и подкрепленном краях. Метод конечных элементов (МКЭ) использован в [6] для пространственного расчета прямоугольной пластины конечных размеров при нагреве. Имеется опыт решения трехмерных задач линейного деформирования ортотропных цилиндров некругового поперечного сечения [8] с ограниченным классом граничных условий на торцах, допускающим разложение искомого решения в ряды Фурье по меридиональной координате. Вместе с тем, к настоящему времени остается нерешенным обширный класс двухмерных геометрически нелинейных задач обобщенной плоской термоупругой деформации слоистых анизотропных (неортотропных) цилиндрических оболочек. В случае произвольной формы направляющей, переменности толщины слоев и достаточно общего характера упругих свойств, решение подобных задач возможно лишь на основе численных методов.

В данной работе разработана конечноэлементная методика расчета напряженно-деформированного состояния указанных упругих систем на основе подхода, предложенного в [9].

1. В декартовой системе координат рассматривается малая упругая квадратично нелинейная деформация слоистой анизотропной оболочки. Оболочка собрана из ортотропных в некоторой исходной системе координат α'_i ($i=1, 2, 3$), связанной с плоскостями упругой симметрии, слоев переменной толщины (фиг. 1). Угол между направлением армирования (одной из осей ортотропии) и направляющей оболочки назовем углом армирования γ . В декартовой системе координат первоначально ортотропный слой проявляет общие свойства прямолинейной анизотропии. Оболочка нагружена действующими в плоскостях поперечных сечений, т. е. нормально к образующей, и не меняющимися по оси z поверхностными усилиями $p_s = [p_x, p_y]$, заданными на участках поверхности S_p , сосредоточенными силами $P_k = [P_k^x, P_k^y]$, приложенными в точках $(x_k, y_k) \in S_p$, а также



Фиг. 1



Фиг. 2

объемными инерционными силами P_V от ускорений a_x, a_y . На частях поверхности возможны неоднородные кинематические условия $U=U_0$. Оболочка может быть подвергнута постоянной по объему малой нормальной деформации в направлении бесконечной протяженности ϵ_{zz}^0 . Полагая приращение температуры по отношению к исходному состоянию T_0 известным и постоянным во времени, процесс деформирования оболочки будем рассматривать как изотермический.

Следуя подходу, предложенному В. В. Новожиловым [10], для случая, когда по сравнению с единицей малы как удлинения ϵ_{it} , сдвиги ϵ_{is} ($t \neq s$), так и углы поворота, но последние превосходят ϵ_{it} и ϵ_{is} , квадратично нелинейные кинематические соотношения при обобщенной плоской деформации ($\partial(\dots)/\partial z = 0$) примем в частично линеаризованной форме

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= u_{x,x} + 1/2(u_{y,x}^2 + u_{z,x}^2), & \epsilon_{yy} &= u_{y,y} + 1/2(u_{x,y}^2 + u_{z,y}^2) \\ \epsilon_{zz} &= \epsilon_{zz}^0, & \epsilon_{yz} &= u_{z,y}, & \epsilon_{xz} &= u_{z,x} \\ \epsilon_{xy} &= u_{x,y} + u_{y,x} + u_{z,x} \cdot u_{z,y} \end{aligned} \quad (1.1)$$

где пренебрежено квадратами удлинений и их произведениями с другими величинами; $U_z = u_z(x, y) + z \cdot \epsilon_{zz}^0$.

Материал оболочки отвечает физическим соотношениям Дюгамеля — Неймана для анизотропного тела [11]:

$$\sigma = \epsilon B - T\beta, \quad \beta = B\alpha, \quad (1.2)$$

представленным в матричной форме. Здесь $\sigma = [\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy}]^T$, $\epsilon = [\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \dots, \epsilon_{xy}]^T$ — векторы напряжений и деформаций, соответственно; T — приращение температуры относительно начального состояния T_0 (скалярное поле); B — матрица жесткости обобщенного закона Гука; β и α — вектор температурных напряжений при стесненных деформациях и вектор температурных удлинений и сдвигов. Заметим, что компоненты матрицы B и вектора α являются функциями угла β (см. фиг. 1), который в свою очередь определяется значениями координат x и y .

Разрешающие уравнения — конечноэлементный эквивалент уравнений равновесия, получены на основе вариационного принципа минимума полной энергии

$$\delta\Pi = \delta(F - A) = 0 \quad (1.3)$$

$$F = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \epsilon^T B \epsilon - T \alpha^T B \epsilon - c_s T^2 / 2T_0 \right] dx dy \quad (1.4)$$

свободная энергия оболочки (здесь c_s — теплоемкость при постоянной деформации),

$$A = \int_{\Gamma} p_s^T U d\gamma + \int_{\Omega} P_V^T U ds + \sum_k P_k^T U(x_k, y_k) \quad (1.5)$$

работа внешних сил на виртуальных перемещениях $U=[U_x, U_y, U_z]^T$. В выражениях (1.4) и (1.5) осуществлен переход от интегрирования по объему V к интегрированию по поверхности Ω , образованной пересечением оболочки плоскостью, коллинейарной координатной (xy) , и от интегрирования по поверхности S к интегрированию по граничному контуру $\Gamma \leftrightarrow S \cap \Omega$.

2. Дискретизация области искомого решения производится с использованием материальных треугольных конечных элементов с линейной аппроксимацией поля перемещений

$$u^e = \alpha_{3i-2}^e + \alpha_{3i-1}^e \cdot x + \alpha_{3i}^e \cdot y, \quad t=x, y, z \rightarrow i=1, 2, 3 \quad (2.1)$$

Конечный элемент Ω_e (общее число которых N_e) может принадлежать лишь области одного слоя. Константы α_m^e связаны линейным преобразованием с неизвестными узловыми перемещениями, образующими девятимерный вектор

$$u^e = \{u_x^i, u_y^i, u_z^i, u_x^j, u_y^j, u_z^j, u_x^k, u_y^k, u_z^k\}^T, \quad i, j, k \in e$$

Подставляя (2.1) в выражения (1.1) и представляя свободную энергию оболочки (1.4) как сумму свободных энергий конечных элементов, а работу внешних сил (1.5) как работу приведенных нагрузок на узловых перемещениях, получаем, что полная энергия Π является скалярной функцией векторного аргумента размерности $3N_p$: $U = \{u_x^1, u_y^1, u_z^1, \dots, u_x^i, u_y^i, u_z^i, \dots, u_x^{N_p}, u_y^{N_p}, u_z^{N_p}\}^T$, где N_p — общее число узлов дискретной модели.

Для выполнения условия непрерывности поля температур $T(x, y)$: $x, y \in \Omega$, в выражении (1.4) используется аппроксимация $T^e(x, y)$: $x, y \in \Omega_e$ по зависимостям типа (2.1).

Переходя в (1.3) от варьирования к дифференцированию и предварительно представляя вектор деформаций (1.4) в виде суммы $\varepsilon = \varepsilon_L + \varepsilon_N$ линейных деформаций ε_L и нелинейных слагаемых ε_N , получаем нелинейную алгебраическую систему разрешающих уравнений

$$f(U) = [K_L + K_\varepsilon(\varepsilon_{zz}^0) - K_T(T)]U + k_N(U) - Q_p - Q_T - Q_\varepsilon = 0 \quad (2.2)$$

В соотношениях (2.2):

$$[K_{L_{ij}}] = \left[\frac{\partial^2}{\partial U_i \partial U_j} \sum_{e=1}^{N_e} \frac{1}{2} \iint_{\Omega_e} (\varepsilon_L^e)^T B^e \varepsilon_L^e dx dy \right],$$

$$[K_{\varepsilon_{ij}}] = \varepsilon_{zz}^0 \left[\frac{\partial^2}{\partial U_i \partial U_j} \sum_{e=1}^{N_e} \frac{1}{2} \iint_{\Omega_e} B^e \varepsilon_N^e dx dy \right]$$

$$[K_{T_{ij}}] = \left[\frac{\partial^2}{\partial U_i \partial U_j} \sum_{e=1}^{N_e} \iint_{\Omega_e} T^e(x, y) \beta_e^T \varepsilon_N^e dx dy \right]$$

$$\{k_{N_i}(U)\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial U_i} \sum_{e=1}^{N_e} \iint_{\Omega_e} \left[(\varepsilon_L^e)^T B^e \varepsilon_N^e + \frac{1}{2} (\varepsilon_N^e)^T B^e \varepsilon_N^e \right] dx dy \right\}$$

$$\{Q_{p_i}\} = \left\{ \frac{\partial A}{\partial U_i} \right\}, \quad \{Q_{T_i}\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial U_i} \sum_{e=1}^{N_e} \iint_{\Omega_e} T^e(x, y) \beta_e^T \varepsilon_L^e dx dy \right\}$$

$$\{Q_{\varepsilon_i}\} = \varepsilon_{zz}^0 \left\{ \frac{\partial}{\partial U_i} \sum_{e=1}^{N_e} \frac{1}{2} \iint_{\Omega_e} B^e \varepsilon_L^e dx dy \right\}$$

есть симметричная квадратная положительно определенная линейная матрица жесткости; симметричная квадратная матрица, отвечающая случаю одноосной заданной деформации ($\varepsilon_{zz}^0 = \text{const}$); симметричная квадратная «температурная матрица жесткости»; вектор нелинейных частей; векторы обобщенных силовых и температурных нагрузок, и вектор нагру-

зок при действии осевой деформации, соответственно. Наличие матриц K_e , K_T и вектора k_N в уравнениях (2.2) обусловлено учетом геометрической нелинейности.

Для решения (2.2) используется метод Ньютона в форме предложенной в [4, 9], и обобщающей [12] на случай учета температурного поля и заданной деформации:

$$[K_L + \mu_n (K_e - K_T + D(U^{[n]}))] U^{[n+1]} = Q_T + Q_p + Q_e - k_N(U^{[n]}) + D(U^{[n]}) U^{[n]} \quad (2.3)$$

$$U^{[0]} = 0, \quad \mu_0 = 0, \quad \mu_i = 1 (i=1, 2, \dots), \quad [D_{ij}] = [\partial k_{N_i} / \partial U_j]$$

$$n = 0, \dots, N; \|U^{[n]} - U^{[n-1]}\| < \delta$$

В соотношениях (2.3) матрица $D(U)$ есть частичная матрица Якоби [12]; δ — заданная точность решения U .

При нулевом начальном приближении первая итерация дает решение линейной задачи термоупругости, что позволяет проводить расчет массивных тел в линейной постановке и оболочек — в нелинейной на основе единого алгоритма.

На каждой итерации (2.3) однородные и неоднородные кинематические граничные условия удовлетворяются на основе правила Пейна — Айронса [13].

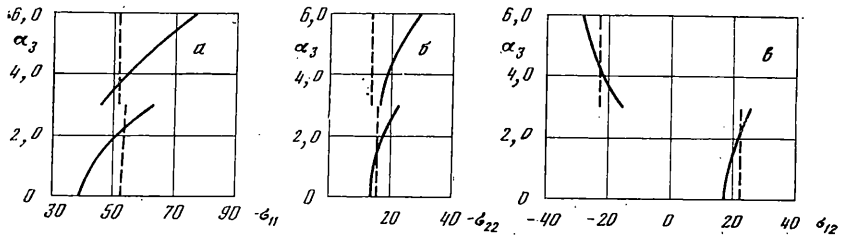
3. Вводя параметры нагружения λ_e , λ_V , λ_T , λ_S и λ_U для ε_0 , P_V , T , p_S и U_0 соответственно [14], и рассматривая полную вариацию операторного уравнения (2.2), возможно установить [12], что условие разрешимости (2.2) следует из разрешимости уравнения

$$[K_L + K_e - K_T + D(U)] \delta U = \left[\frac{\partial Q}{\partial \lambda_e} - \frac{\partial K_e}{\partial \lambda_e} U \right] \delta \lambda_e + \left[\frac{\partial Q}{\partial \lambda_T} + \frac{\partial K_T}{\partial \lambda_T} U \right] \delta \lambda_T + \\ + \frac{\partial Q}{\partial \lambda_U} \delta \lambda_U + \frac{\partial Q}{\partial \lambda_S} \delta \lambda_S + \frac{\partial Q}{\partial \lambda_V} \delta \lambda_V \quad (3.1)$$

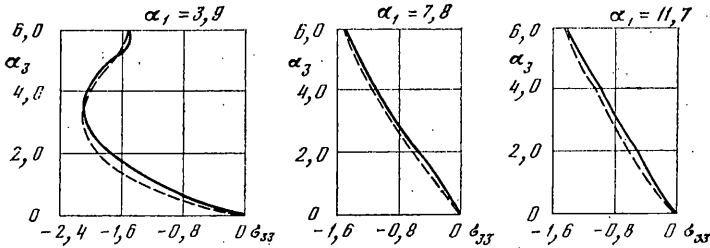
относительно приращения решения δU (в выражении (3.1) $Q = Q(\varepsilon_0, P_V, T, p_S, U_0)$ — вектор приведенных нагрузок). При этом, необходимым и достаточным условием существования и единственности конечноэлементного решения геометрически нелинейной задачи термоупругости при уровне нагружения λ_e^* , λ_V^* , λ_T^* , λ_S^* , λ_U^* является положительность матрицы Якоби $[J_{ij}] = [\partial f_i / \partial U_j]$ разрешающей системы (2.2) в многомерной области изменения параметров нагружения: $\exists (0 \leq \lambda_e \leq \lambda_e^*; 0 \leq \lambda_U \leq \lambda_U^*; 0 \leq \lambda_T \leq \lambda_T^*; 0 \leq \lambda_S \leq \lambda_S^*; 0 \leq \lambda_V \leq \lambda_V^*) \det J > 0$. Как следует из (3.1), при монотонной зависимости решения от параметра нагружения (когда, например, из $\|dU/d\lambda_T\| > 0 \Rightarrow \|d\lambda_T/dU\| > 0 \Rightarrow \|J\| = \|\partial Q/\partial \lambda_T + \partial K_T U/\partial \lambda_T\| [d\lambda_T/dU] \neq 0$) возможно исследование закритического (в пространстве, включающем результирующие напряженного состояния) поведения на основе метода Ньютона без применения методов продолжения по параметру.

Изложенная методика конечноэлементного решения геометрически нелинейной задачи термоупругости протяженных некруговых цилиндров при обобщенной плоской деформации реализована в виде комплекса программ *NAMS* на языке Фортран-4. Соотношения для компонент векторов Q_e , Q_T , Q_p и $k_N(U)$, матриц K_L , K_T , K_e и $D(U)$ получены в аналитической форме, что обеспечивает в рамках принятой постановки и аппроксимации (2.1) наибольшую точность. Случай плоской деформации ($u_z(x, y) = 0$) следует из предложенной постановки как частный.

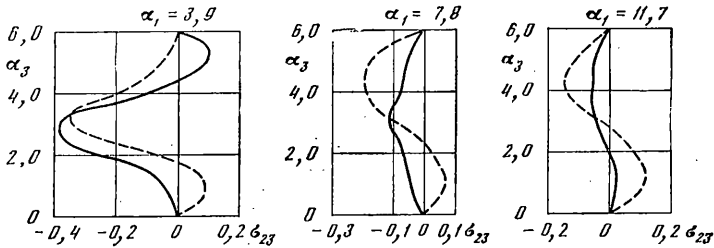
4. Исследование эффектов анизотропии и геометрической нелинейности проведем на примере тонкостенной цилиндрической панели, состоящей из двух жестко соединенных однонаправленно армированных слоев одинаковой толщины $\delta/2$ (фиг. 2), расположенных таким образом, что направления армирования составляют углы $\gamma^{(+)} = 30^\circ$ и $\gamma^{(-)} = -30^\circ$ (здесь и ниже верхний индекс означает принадлежность k -му слою) с круговой направляющей. Каждый слой панели выполнен из стеклопластика со следующими механическими характеристиками структурных составляющих: $E_f = 9,8 \cdot 10^4$ МПа; $\nu_f = 0,2$; $E_m = 3,43 \cdot 10^3$ МПа; $\nu_m = 0,39$; объемный коэффициент



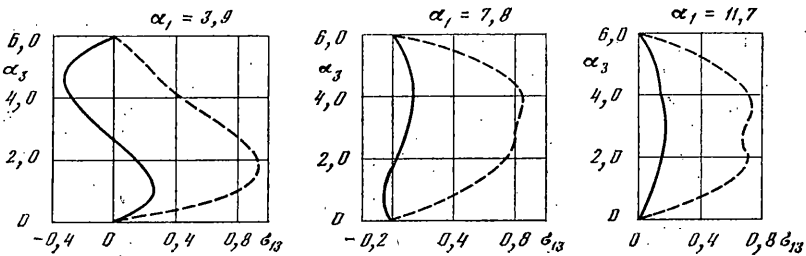
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



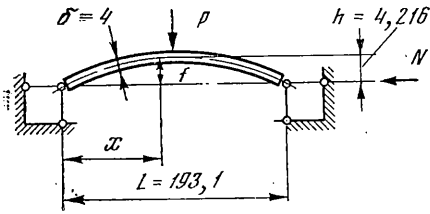
Фиг. 6

армирования $\Psi=0,5$. Эффективные упругие характеристики слоев определены по зависимостям работы [15] для макроскопически моноотропного тела.

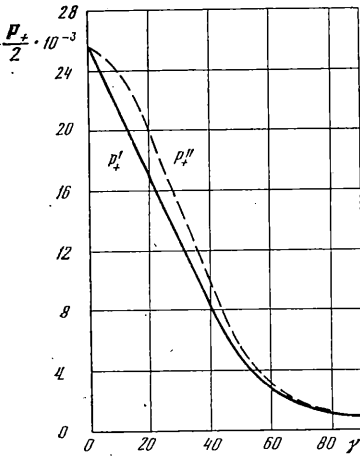
Расчет произведен для случая жесткого защемления панелей по прямолинейным кромкам и нагружения внешним давлением $p=1,5$ МПа в геометрически нелинейной постановке. Триангуляцию проводили с использованием $N_e=1600$ конечных элементов, общее число степеней свободы $N=2673$. На фигурах отражающих результаты расчета, размерность линейных размеров — мм, размерность напряжений — МПа.

Напряженно-деформированное состояние было вычислено в криволинейной ортогональной системе координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (см. фиг. 1), что при рассмотрении подобных конструкций более удобно для анализа (в глобальной декартовой системе координат в произвольной точке на границе слоев все компоненты напряжений и деформаций были бы разрывными функциями толщины). На фиг. 3 представлены распределения напряжений в заделке (сплошная линия) и на расстоянии $\varphi=15^\circ$ от заделки (штриховая линия). Кривые на фиг. 3, а соответствуют распределению напряжений σ_{11} по толщине панели. Характерным является наличие разрывов тангенциальных напряжений на границе слоев и существенная нелинейность в зоне заделки закона изменения напряжений в пределах каждого слоя. Это в полной мере относится и к напряжениям σ_{22} (фиг. 3, б) и σ_{12} (фиг. 3, в). Для последних, обусловленных анизотропией, распределение по толщине близко к самоуравновешенному как в заделке, так и вдали от нее при абсолютных значениях того же порядка, что и σ_{11}, σ_{12} .

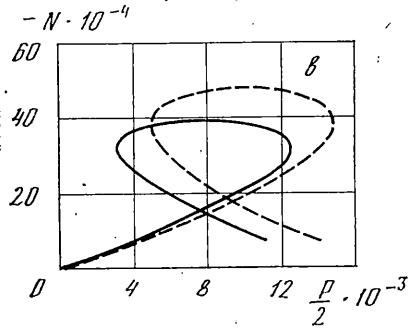
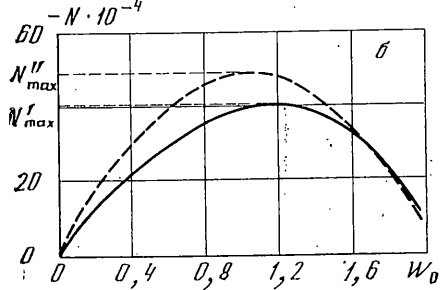
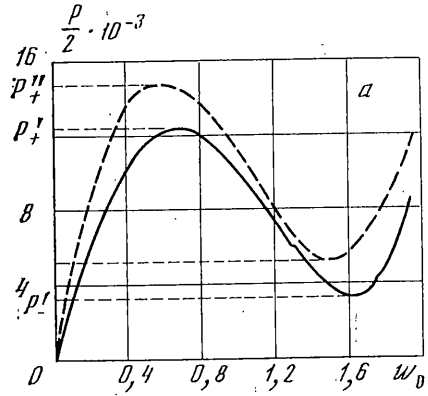
Представленные на фиг. 4–6 изменения поперечных напряжений, позволяют оценить степень влияния учета геометрической нелинейности на напряженно-деформи-



Фиг. 7



Фиг. 8



Фиг. 9

рованное состояние (сплошная линия на графиках соответствует геометрически нелинейному решению, штриховая — линейному).

На фиг. 4 показано распределение нормальных поперечных напряжений σ_{33} по толщине пакета. В зоне заделки, где напряженное состояние существенно моментно, напряжения σ_{33} внутри пакета превышают значение на внешней поверхности, равное приложенному внешнему давлению. В зоне, удаленной от заделки, этот эффект не проявляется.

Распределение напряжений поперечного сдвига по толщине панели в различных сечениях вблизи заделки представлено на фиг. 5, 6. Их изменение существенно отличается от закона квадратной параболы, часто принимаемого при расчете оболочек на основе двумерных теорий, учитывающих поперечный сдвиг [2]. Напряжения σ_{23} , обусловленные только наличием анизотропии, по абсолютной величине близки напряжениям σ_{13} , свойственным и ортотропным оболочкам. Таким образом, при расчете малослойных перекрестно армированных оболочек, пренебрежение эффектами, связанными с анизотропией (принятие расчетной схемы панели или оболочки как макроскопически ортотропной), приводит к погрешности одного порядка, что и при пренебрежении поперечными сдвигами вообще.

Отметим, что распределение поперечных напряжений по толщине пакета существенно меняется вдоль координаты α_1 в зоне, прилегающей к заделке и имеет характер краевого эффекта. Результаты расчетов, выполненных по линейной теории, имеют различия от соответствующих, выполненных с учетом геометрической нелинейности до 100% и более.

Таким образом, из рассмотрения полученных результатов следует, что предложенный подход позволяет получать уточненные данные по напряженно-деформированному состоянию слоистых анизотропных конструкций.

5. Ниже приведены результаты исследования закритического поведения перекрестно армированной двухслойной борознооксидной цилиндрической панели бесконечной протяженности с синусоидальной направляющей, нагруженной линейно распределенной поперечной силой в центре пролета (фиг. 7, $f = h \cdot \sin \pi x/L$). Геометриче-

ские размеры поперечного сечения панели приняты такими же, как в работе [16], где получены аналитические решения аналогичных задач для синусоидального стержня (решения [16] были использованы нами для тестовых расчетов, которые показали хорошее качественное и количественное соответствие аналитических и численных результатов). Физико-механические характеристики слоев принимались как в работе [3] ($E_f=4,2 \cdot 10^5$ МПа; $\nu_f=0,21$; $E_m=3,5 \cdot 10^3$ МПа; $\nu_m=0,33$; $\Psi=0,5$). Панель армирована под углами $\gamma^{(1)}=-\gamma$ и $\gamma^{(2)}=\gamma$. Конечнэлементный расчет проводился на регулярной сетке с числом конечных элементов $N_e=1600$ ($N=2673$) (при построении сетки учитывались рекомендации работы [17]). На фиг. 7–9 размерность линейных размеров – мм, линейно распределенных сил N и P – Н/м. Численное решение построено таким образом, что параметр нагрузки есть величина, вычисляемая по значениям напряжений в зависимости от прогиба под нагрузкой w (что обеспечивает разрешимость (2.2)). Для определения влияния учета анизотропии на расчетные значения критической нагрузки потери устойчивости перекрестно армированная панель рассматривалась как анизотропная на основе общих соотношений (1.2) и как ортотропная, для чего компоненты матрицы жесткости B_{i4} , B_{i5} , B_{i6} ($i=1, 2, 3$), B_{45} , B_{46} , B_{56} принимались равными нулю. На фиг. 8 представлены результаты параметрического анализа зависимости P_+ от угла армирования γ . Существенно, что во всем диапазоне изменения $0^\circ < \gamma < 90^\circ$ критическая нагрузка, вычисленная с учетом анизотропии свойств слоев (сплошная линия) значительно ниже определенной без учета анизотропии (штриховая линия), при этом наибольшие различия в расчетных значениях P_+ наблюдаются на интервале $10^\circ < \gamma < 40^\circ$ и составляют от 10% до 25%. Отметим, что для углов $0^\circ \leq \gamma \leq 45^\circ$ зависимость $P_+(\gamma)$, определенная с учетом анизотропии, имеет практически линейный характер. На фиг. 9 приведены результаты расчетов закритического поведения панели, выполненных с учетом анизотропии (сплошная линия) и без такового (штриховая линия) для углов армирования $\gamma^{(1)}=-30^\circ$, $\gamma^{(2)}=30^\circ$, где как показано выше, имеются значительные различия по критическим нагрузкам. Учет анизотропии вносит существенные уточнения в зависимости $P=P(w)$ (фиг. 9, а) и в расчетные значения усилий распора N на всей траектории нелинейного деформирования (фиг. 9, б). Характерным является тот факт, что уточненное рассмотрение приводит к снижению жесткости конструкции как в окрестности верхней критической нагрузки $(1-P_+/P_+'' \cdot 100\% = 17,5\%$, так и в окрестности нижней $(1-P_-'/P_-'' \cdot 100\% = 18,3\%$. Отметим, что два подхода дают максимальные значения усилий распора при существенно различных значениях P : по анизотропной теории $|N_{\max}| = 3,959 \cdot 10^5$ Н/м при $P = 1,46 \cdot 10^4$ Н/м (фиг. 9, в), в то время как по ортотропной – $|N_{\max}| = 4,84 \cdot 10^5$ Н/м при $P = 2,16 \cdot 10^4$ Н/м.

В заключение отметим, что разработанная программа, основанная на пространственном подходе решения геометрически нелинейных задач анизотропной термоупругости, может быть успешно использована для практического расчета прочности и устойчивости некруговых композитных цилиндров неоднородной структуры при произвольных краевых условиях и нагрузках в рамках принятой постановки, ввиду высокой эффективности реализованных в ней алгоритмов (время решения нелинейной задачи с размерностью $N \sim 2500$ при числе итераций в методе Ньютона порядка 10 составляет 20 мин. на ЭВМ ЕС-1045).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Композиционные материалы. Т. 3. Применение композиционных материалов в технике. М.: Машиностроение, 1978. 510 с.
2. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Развитие общего направления в теории многослойных оболочек // Механика композит. материалов. 1988. № 2. С. 287–298.
3. Григолюк Э. И., Носатенко П. Я. К эффекту анизотропии в перекрестно армированных оболочках // Проблемы механики деформируемого твердого тела. Калинин: Калинин. ун-т, 1986. С. 120–129.
4. Григолюк Э. И., Носатенко П. Я. Пространственная геометрически нелинейная задача термоупругости слоистых анизотропных оболочек вращения // Механика композит. материалов. 1988. № 4. С. 684–690.
5. Heyliger P. R., Reddy I. N. Reduction of free-edge stress concentration // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1985. V. 52. No. 4. P. 801–805.
6. Chamis C. C., Aiello R. A., Murthy P. L. N. Composite sandwich thermostructural behaviour: Computational simulation // 27th Structures, Structural Dynamics and Materials Conf. Collect. techn. pap. San Antonio, Texas, 1986. Pt 1. P. 370–381.
7. Григолюк Э. И., Носатенко П. Я., Ширшов Ю. Ю. Напряженно-деформированное состояние перекрестно армированного композита при свободном нагреве // Механика композит. материалов. 1989. № 3. С. 549–551.
8. Григоренко Я. М., Влайков Г. Г., Шевченко С. Н. Напряженное состояние толстостенных цилиндрических оболочек некругового поперечного сечения. Прикл. механика. 1986. Т. 22. № 4. С. 37–43.
9. Носатенко П. Я., Ширшов Ю. Ю. Численное исследование пространственного геометрически нелинейного напряженно-деформированного состояния слоистых анизотропных оболочек // Тез. докл. 22-го Всесоюз. науч. совещания по проблемам прочности двигателей. М.: Изд-е ЦИАМ, 1988. С. 139–141.
10. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. II; М.: Гостехиздат, 1948. 211 с.
11. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

12. Григолюк Э. И., Носатенко П. Я. О численном обосновании существования и единственности решения геометрически нелинейной задачи теории упругости // Докл. АН СССР, 1988. Т. 289. № 4. С. 821–824.
13. Зенкевич О. К. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
14. Носатенко П. Я., Омельченко М. Н., Ширшов Ю. Ю. Нелинейное деформирование и устойчивость оболочек из композитных материалов // Механика и технология изделий из металлических и малокерамических композиционных материалов: Тез. докл. Всесоюз. конф., Волгоград, 1989. С. 57–59.
15. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тегерс Г. А. Сопротивление жестких полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1972. 498 с.
16. Григолюк Э. И., Андрианов Н. Н. Нелинейное статическое поведение пологих стержней // Некоторые прикладные задачи теории пластин и оболочек. М.: Изд-во МГУ, 1981. С. 3–83.
17. Григолюк Э. И., Носатенко П. Я., Омельченко М. Н. Об устойчивости конечноэлементного решения задач механики композитных конструкций // Изв. вузов. Машиностроение. 1989. № 8. С. 3–6.

Москва

Поступила в редакцию
2.1.1990