МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1990

УДК 539.3

Л. А. БУЛЫЧЕВ

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ЗАМКНУТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Известно, что соотношения общей теории оболочек сводятся к дифференциальному уравнению восьмого порядка с частными производными. Для круговой замкнутой цилиндрической оболочки метод разделения переменных упрощает задачу до обыкновенного дифференциального уравнения восьмого порядка с постоянными коэффициентами.

Общее решение его сопряжено с математическими трудностями написания формул для корней характеристического уравнения, содержащего три параметра: μ – коэффициент Пуассона; h/R – отношение толщины оболочки к радиусу срединной поверхности; и k – номер гармоники в тригонометрическом разложении функции.

В статье предлагается вывод формул для корней алгебраического уравнения четвертого порядка в виде рядов быстро сходящихся многочленов относительно рациональной дроби из упомянутых параметров. В них по условиям сходимости степенного ряда для тонких оболочек номера допустим гармоник могут находиться в пределах от $k=2$ до $k=7\div11$. Последующие непростые выкладки, применяющие формулы для корней характеристического уравнения к соотношениям общей теории цилиндрических оболочек, приводят к выражениям для амплитудных функций соответствующих обобщенных усилий и перемещений относительно переменной α (вдоль образующей).

В качестве примера, для случая нагружения оболочки на торце системой распределенных самоуравновешенных осевых усилий по закону $T(\beta)=T_0\cos k\beta$ получены формулы для амплитудных функций осевого усилия, изгибающих моментов и перемещений срединной поверхности. Показаны графики этих функций для частного случая нагружения.

1. Для цилиндрической оболочки, нагруженной на торцах распределенными усилиями и моментами шесть уравнений равновесия после введения касательного усилия $S=S_{12}-H/R=S_{21}$ и крутящего момента $H=(H_{12}+H_{21})/2$ приводятся к трем дифференциальным соотношениям относительно шести обобщенных усилий

$$\frac{\partial T_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial S}{\partial\beta}=0,\quad \frac{\partial S}{\partial\alpha}+\frac{\partial T_2}{\partial\beta}+\frac{2}{R}\frac{\partial H}{\partial\alpha}+\frac{1}{R}\frac{\partial M_2}{\partial\beta}=0$$
$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial\alpha^2}+2\frac{\partial^2 H}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial^2 M_2}{\partial\beta^2}-T_2R=0 \qquad (1.1)$$

Уравнения совместности при выражениях компонент деформации через перемещения

$$\varepsilon_1=\frac{\partial u}{R\,\partial\alpha},\quad \varepsilon_2=\frac{\partial v}{R\,\partial\beta}+\frac{w}{R},\quad \gamma=\frac{\partial v}{R\,\partial\alpha}+\frac{\partial u}{R\,\partial\beta}$$
$$\varkappa_1=-\frac{\partial^2 w}{R^2\partial^2\alpha},\quad \varkappa_2=\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial v}{\partial\beta}-\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\right),\quad \chi=\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial v}{\partial\alpha}-\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}\right) \qquad (1.2)$$

и соотношениях упругости

$$T_1=B(\varepsilon_1+\mu\varepsilon_2),\quad M_1=D(\varkappa_1+\mu\varkappa_2)$$
$$T_2=B(\varepsilon_2+\mu\varepsilon_1),\quad M_2=D(\varkappa_2+\mu\varkappa_1)$$
$$S=B(1-\mu)\gamma/2;\quad H=D(1-\mu)\chi \qquad (1.3)$$
$$B=Eh/(1-\mu^2),\quad D=Eh^3/12(1-\mu^2)$$

в обобщенных усилиях имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(M_2-\mu M_1)-(1+\mu)\frac{\partial H}{\partial\beta}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}(M_1-\mu M_2)-(1+\mu)\frac{\partial H}{\partial\alpha}+2(1+\mu)a^2R\frac{\partial S}{\partial\alpha}-a^2R\left(\frac{\partial T_1}{\partial\beta}-\mu\frac{\partial T_2}{\partial\beta}\right)=0 \tag{1.4}$$

$$M_1-\mu M_2+a^2R\left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial\beta^2}-\mu\frac{\partial^2 T_2}{\partial\beta^2}\right)+$$

$$+a^2R\left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial\alpha^2}-\mu\frac{\partial^2 T_1}{\partial\alpha^2}\right)-2(1+\mu)a^2R\frac{\partial^2 S}{\partial\alpha\partial\beta}=0$$

$$a=h/2\sqrt{3}R$$

Разделение переменных типа

$$F(\alpha,\beta)=\sum_{k=2}(F_{(k)}(\alpha)\cos k\beta+F^{(k)}(\alpha)\sin k\beta) \tag{1.5}$$

приводит три уравнения равновесия (1.1) и три уравнения совместности (1.4) к системе шести обыкновенных дифференциальных уравнений относительно амплитудных функций $T_{1k}(\alpha)$, $T_{2k}(\alpha)$, $S_k(\alpha)$, $M_{1k}(\alpha)$, $M_{2k}(\alpha)$, $H_k(\alpha)$, соответствующих k-ой гармонике напряженного состояния вида $\cos k\beta\,(\sin k\beta)$.

Эта система сводится к разрешающему дифференциальному уравнению восьмого порядка относительно амплитудной функции продольного изгибающего момента

$$a^2M_1^{(\mathrm{VIII})}-(1-3a^2)4a^2k^2M_1^{(\mathrm{VI})}+[1-\mu^2+8(4-\mu^2)a^4k^2-2(4-\mu)^2a^2k^2-$$

$$-(23+\mu^2)a^4k^4-4(1-\mu^2)a^6k^4+6a^2k^4]M_1^{(\mathrm{IV})}- \tag{1.6}$$

$$-(1-4a^2)\cdot 4(k^2-1)^2a^2k^2M_1^{(II)}+(1-4a^2)(k^2-1)^2a^2k^4M_1=0$$

Для тонких оболочек ($h/R<1/50$) приемлемо допущение $1\pm4a^2\simeq1$. Тогда характеристическое уравнение относительно неизвестной λ после замены $\lambda^2=y$ преобразуется в алгебраическое уравнение четвертого порядка

$$y^4-4k^2y^3+[(1-\mu^2)/a^2+6k^4-2k^2(4-\mu^2)]y^2-$$

$$-4k^2(k^2-1)y+k^4(k^2-1)^2=0 \tag{1.7}$$

Ставится задача получить формулы в виде многочленов относительно параметров a, k, μ с достаточным количеством убывающих слагаемых, обеспечивающих потребную точность в определении действительных и мнимых частей корней характеристического уравнения для дифференциального уравнения (1.6).

2. Предварительно решается уравнение

$$x^4-4k^2x^3+((1-\mu^2)/a^2+6k^4-8k^2+2\mu^2k^2)x^2-$$

$$-4k^3(k^2-1)^{3/2}x+k^2(k^2-1)^3=0 \tag{2.1}$$

в котором последний и предпоследний коэффициенты мало отличаются от соответствующих в уравнении (1.7). Точнее решение этого уравнения (подстановка $x+k(k^2-1)^{3/2}/x=t$) имеет вид

$$x_{1,2,3,4}=k^2\pm i/2\sqrt{1+\delta}\pm{}^1/_2\sqrt{N}\left(-1+16\frac{k^2}{N}+\delta+i\frac{4k^2}{\sqrt{N}}\sqrt{1+\delta}\right)^{1/2}$$

$$N=(1-\mu^2)/a^2,\qquad \delta=\frac{2k^4}{N}\left[1-\frac{4}{k^2}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)^{1/2}\right]$$

При ограничении $4ak^2<1$ корни уравнения (2.1) раскладываются в ряды

$$x_{1,3}=2k^2R_1^\circ\pm i\sqrt{N}R_2^\circ,\qquad x_{2,4}=2k^2(1-R_1^\circ)\pm i\sqrt{N}\left(1-\frac{5}{2}\frac{k^2}{N}-R_2^\circ\right)$$

$$R_1^\circ=1-\frac{k^4}{N}-\frac{7}{8}\frac{k^8}{N^2}-5\frac{k^6}{N^2}-81\frac{3}{4}\frac{k'^2}{N^3}+70\frac{k^{10}}{N^3}-$$
$$-25\frac{k^8}{N^3}+731\frac{47}{64}\frac{k^{16}}{N^4}-1068\frac{3}{4}\frac{k^{14}}{N^4}+525\frac{k'^2}{N^4}+\ldots \tag{2.2}$$
$$R_2^\circ=1+\frac{k^4}{N}-\frac{5}{2}\frac{k^2}{N}-5\frac{k^8}{N^2}+\frac{5}{2}\frac{k^6}{N^2}-\frac{25}{8}\frac{k^4}{N^2}+10\frac{1}{2}\frac{k'^2}{N^3}-$$
$$-37\frac{1}{2}\frac{k^{10}}{N^3}-366\frac{k^{16}}{N^4}+446\frac{1}{4}\frac{k^{14}}{N^4}-186\frac{7}{8}\frac{k'^2}{N^4}+\ldots$$

Выражения (2.2) будут исходными для корней уравнения (1.7). Так как относительная разница в соответствующих коэффициентах уравнений (1.7) и (2.1) меньше единицы или вообще отсутствует, то можно допустить, что и корни этих уравнений мало отличаются, т. е.

$$y=(1+\xi)a+i(1+\eta)b \quad (a=\mathrm{Re}\,x,\ b=\mathrm{Im}\,x) \tag{2.3}$$

а подлежащие определению неизвестные ξ и η лежат в пределах $-1<\xi$, $\eta<1$.

Ограничиваясь линейными частями приращений в степенях

$$y^m=x^m+\Delta y_m \quad (m=1, 2, 3, 4) \tag{2.4}$$

добавки Δy_m будут определяться равенствами

$$\Delta y=a\xi+ib\eta,\ \Delta y_2=2(a^2\xi-b^2\eta)+i2ab(\xi+\eta)$$
$$\Delta y_3=3a(a^2-b^2)\xi-6ab^2\eta+i3b\,[2a^2\xi+(a^2-b^2)\eta] \tag{2.5}$$
$$\Delta y_4=4a^2(a^2-3b^2)\xi+4b^2(b^2-3a^2)\eta+i4ab[(3a^2-b^2)\xi+(a^2-3b^2)\eta]$$

Разность уравнений (1.7) и (2.1) с учетом соотношения (2.4) дает тождество

$$\Delta y_4-4k^2\Delta y_3+(N+6k^4-8k^2+2\mu^2k^2)\Delta y_2-4k^2(k^2-1)^2\Delta y_1+$$
$$+[4k^3(k^2-1)^{3/2}-4k^2(k^2-1)^2]x_j+k^2(k^4+k^2+1)=0$$

Для каждого корня x_j и соответствующих приращений (2.5) это тождество равносильно линейной системе двух уравнений с двумя неизвестными ξ_j и η_j $(j=1, 2, 3, 4)$.

Решения систем для каждого из четырех корней (2.2) уравнения (2.1) с учетом принятого соотношения (2.3) приводят к первому приближению к корням исходного уравнения (1.7).

Далее по полученным корням (2.3) согласно теореме Виета вычисляются коэффициенты соответствующего уравнения. Процедура повторяется. В результате, после трехкратной итерации (2.3) получится достаточно точное решение уравнения (1.7):

$$y_{1,3}=2k^2R_1\pm i\sqrt{N}R_2$$
$$y_{2,4}=2k^2(1-R_1)\pm i\sqrt{N}\,(1-3k^2/N-R_2) \tag{2.6}$$
$$R_1=1\frac{k^4}{N}+2\frac{k^2}{N}-\frac{1}{N}+7\frac{k^8}{N^2}-22\frac{k^6}{N^2}-66\frac{k'^2}{N^3}+280\frac{k^{10}}{N^3}+715\frac{k^{16}}{N^4}-$$
$$-3830\frac{k^{14}}{N^4}-8400\frac{k^{20}}{N^5}+54\,000\frac{k^{18}}{N^5}+105\,000\frac{k^{24}}{N^6}-790\,000\frac{k^{22}}{N^6}$$

$$R_2=1+\frac{k^4}{N}-4\frac{k^2}{N}-5\frac{k^8}{N^2}+13\frac{k^6}{N^2}+42\frac{k'^2}{N^3}-155\frac{k^{10}}{N^3}-429\frac{k^{16}}{N^4}+2080\frac{k^{14}}{N^4}+$$
$$+4860\frac{k^{20}}{N^5}-29\,000\frac{k^{18}}{N^5}-48\,000\frac{k^{24}}{N^6}+330\,000\frac{k^{22}}{N^6}+6\cdot 10^5\frac{k^{28}}{N^7}-13\cdot 10^6\frac{k^{26}}{N^7}$$

Решения уравнений $\lambda^2=y_j$ являются приближенными корнями характеристического уравнения. Для значений y_1, y_3 корни с большими модулями

$$\begin{gathered}\lambda_{1,3,5,7}=(1-0{,}25\mu^2)(2a)^{-1/2}\left[\pm(1+\gamma_1+\gamma_3)\pm i(1-\gamma_1+\gamma_3)\right]\\ \gamma_1=(1+0{,}5\mu^2)ak^2-2(1+1{,}5\mu^2)(k^2-2)a^3k^4+\\ +(1+2{,}5\mu^2)(14k^2-39{,}5)a^5k^8-(1+3{,}5\mu^2)(72k^2-507)a^7k^{12}\\ \gamma_3=(1+\mu^2)(k^2-2)a^2k^2-5(1+2\mu^2)(k^2-2{,}5)a^4k^6+\\ +(1+3\mu^2)(42k^2-150)a^6k^{10}\end{gathered}\qquad(2.7)$$

Величины y_2, y_4 дают корни с малыми модулями

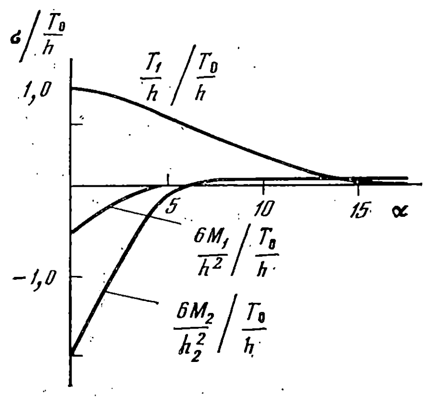
$$\begin{gathered}\lambda_{2,4,6,8}=(1+0{,}25\mu^2)k^2\sqrt{a/2}\left[\pm(1-\gamma_2+\gamma_4)\pm i(1-\gamma_2-\gamma_4)\right]\\ \gamma_2={}^1/_2k^2+{}^1/_8k^4+2(1+\mu^2)(k^2-2)a^2k^2-\\ -(1+2\mu^2)(14k^2-42{,}5)a^4k^6+(1+3\mu^2)(132k^2-559)a^6k^{10}\\ \gamma_4=(1+0{,}5\mu^2)(k^2-1{,}5)a-5(1+1{,}5\mu^2)(k^2-2{,}5)a^2k^4+\\ +(1+2{,}5\mu^2)(42k^2-152)a^5k^8-(1+3{,}5\mu^2)(429k^2-1580)a^7k^{12}\end{gathered}\qquad(2.8)$$

Таблица 1

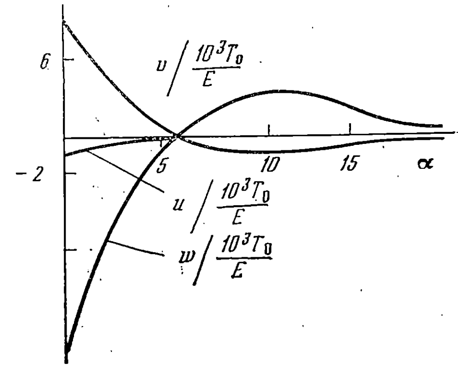
F_k	$\frac{T_{1k}}{T_{0k}}$	$\frac{M_{1k}}{aRT_{0k}}$	$\frac{M_{2k}}{aR\,T_{0k}}$	$\frac{u}{T_{0k}}$	$\frac{V}{T_{0k}}$	$\frac{W}{T_{0k}}$
j	1	5	9	13	17	21

Таблица 2

t	1	$1/k^2$	ak^2	a	a^2a^4	a^2k^2	a^3k^6	a^3k^4
t_1	0	0	$-\mu$	0	$1+4\mu-3\mu^2$	-2μ	$-8+6\mu$	$12-19\mu$
t_2	0	0	$-\mu$	0	$5-\mu^2$	$-2+3\mu$	$-6+26\mu$	—
t_3	1	0	μ	0	$-1-4\mu+3\mu^2$	2μ	$8-6\mu$	$-12+21\mu$
t_4	1	0	$-2+3\mu+6\mu^2$	-12μ	$1-16\mu+11\mu^2$	$6+3\mu$	$18+10\mu$	—
t_5	μ	0	$-1-2\mu+2\mu^2$	0	$-2-20\mu^2$	$2+7\mu$	$10+16\mu$	—
t_6	μ	0	$-5-2\mu+2\mu^2$	$2-\mu$	$8-18\mu$	—	—	—
t_7	$-\mu$	0	$1+2\mu-2\mu^2$	0	$2+20\mu^2$	$-2-7\mu$	$-10-16\mu$	—
t_9	μ	0	$1+2\mu^2$	0	$-4+2\mu-4\mu^2$	—	—	—
t_9	μ^2	0	$-2\mu-2\mu^2$	0	$5-2\mu-\mu^2$	$-2+5\mu$	$-6+36\mu$	—
t_{10}	μ^2	0	$-4\mu-2\mu^2$	2μ	$-1+4\mu-15\mu^2$	—	$8+14\mu$	—
t_{11}	$-1-\mu^2$	0	$2-2\mu-3\mu^2$	0	$-1+18\mu$	—	—	—
t_{12}	1	0	$2\mu+3\mu^2$	-2μ	$-1-8\mu$	—	—	—
t_{13}	0	0	0	0	$6\mu-2\mu^2$	-2μ	$-6-8\mu$	$(18-64\mu)a^4k^8$
t_{14}	0	0	$2\mu^2$	0	$-6\mu-4\mu^2$	2μ	$-4+16\mu$	—
t_{15}	-2	-1	$2-4\mu-6\mu^2$	$1+10\mu$	$-4+18\mu+9\mu^2$	$-4-8\mu$	$-21-16\mu$	—
t_{16}	0	0	$-4\mu-7\mu^2$	$2+10\mu$	$10\mu-29\mu^2$	$-8+20\mu$	$-4+8\mu$	—
t_{17}	0	0	0	0	$-2\mu-\mu^2$	0	$2+10\mu$	-4μ
t_{18}	0	0	0	0	$-2\mu-\mu^2$	0	$10+4\mu$	$-4+4\mu$
t_{19}	$-1+0{,}5\mu^2$	-1	$2-2\mu-6\mu^2$	$2+8\mu$	$-2+16\mu+10\mu^2$	$-8+7\mu$	$-14-14\mu$	—
t_{20}	$1-0{,}5\mu^2$	1	$2\mu+\mu^2$	0	$-6\mu+3{,}5\mu^2$	6μ	$10-4\mu$	—
t_{21}	0	0	$-\mu$	0	$5-\mu^2$	$-2+\mu$	$-6+26\mu$	—
t_{22}	0	0	μ	0	$-1-4\mu+3\mu^2$	0	$8-6\mu$	—
t_{23}	-1	-1	$2-3\mu-6\mu^2$	$2+8\mu$	$-1+16\mu+10\mu^2$	$-8+7\mu^2$	$-18+10\mu$	—
t_{24}	1	1	$\mu+6\mu^2$	0	$-1-4\mu-6\mu^2$	6μ	$8-6\mu$	—



Фиг. 1



Фиг. 2

3. Для длинной оболочки общее решение разрешающего уравнения (1.6) можно представить в виде

$$M_{1k}(\alpha)=e^{a_1\alpha}(A_k\cos b_1\alpha+B_k\sin b_1\alpha)+ce^{a_2\alpha}(C_k\cos b_2\alpha+ak^2D_k\sin b_2\alpha)$$

$$a_1=-\mathrm{Re}\,\lambda_{1,3},\quad b_1=\mathrm{Im}\,\lambda_{1,3},\quad a_2=-\mathrm{Re}\,\lambda_{2,4},\quad b_2=\mathrm{Im}\,\lambda_{2,4}$$

$$c=\mu^2(1+\mu)+2\mu(2-5\mu)a^2k^2+(1-\mu)^3(1-a^2k^2)^2a^2k^4$$

где A_k, B_k, C_k, D_k — постоянные интегрирования.

Соотношения (1.1)—(1.3) общей теории цилиндрических оболочек [1] с учетом принятого метода разделения переменных (1.5) приводят к амплитудным функциям обобщенных усилий и перемещений относительно функции $M_{1k}(\alpha)$ и ее производных.

Используя значения корней (2.7), (2.8) характеристического уравнения, можно получить формулы для амплитудных функций в виде

$$F_k(\alpha)=e^{a_1\alpha}(t_j\cos b_1\alpha+t_{j+1}\sin b_1\alpha)+e^{a_2\alpha}(t_{j+2}\cos b_2\alpha+t_{j+3}\sin b_2\alpha) \qquad (3.1)$$

Здесь сомножители t_j, t_{j+1}, t_{j+2}, t_{j+3} являются убывающими многочленами относительно произведения ak^2. Например, для случая торцевого нагружения оболочки самоуравновешенными основными усилиями

$$T_0(\beta)=\sum_{k=2}(T_{0k}\cos k\beta+T_k^\circ\sin k\beta) \qquad (3.2)$$

результаты таких выкладок приведены в таблицах 1 и 2.

Табл. 1 содержит наименования амплитудных функций и значение индекса j в формуле (3.1). В этой таблице $U=E2\sqrt{6}\,a\sqrt{a}\,k^2u_k(\alpha)$, $V=-E2\sqrt{3}a^2k^3v_k(\alpha)$, $W=E2\sqrt{3}a^2k^2w_k(\alpha)$. В таблице 2 сведены коэффициенты при 1, $1/k^2$, ak^2, a, a^2k^4, a^2k^2, a^3k^6 и т. д. для убывающих многочленов t_j.

На фиг. 1 и фиг. 2 для нагрузки $T_0(\beta)=T_0\cos 2\beta$ показаны эпюры максимальных нормальных напряжений от осевого усилия T_1, изгибающих моментов M_1, M_2 и графики перемещений u, v, w.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругости тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.

Москва

Поступила в редакцию 10.III.1989