

УДК 539.3

© 1990 г.

А. Г. ГОРШКОВ, И. Ю. КОЛЕСНИКОВ

ГРАНИЧНЫЙ ОПЕРАТОР ГРИНА И ФУНКЦИИ ФОРМЫ ДЛЯ КАНОНИЧЕСКОГО БЛОКА В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧЕ НЕСВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Под каноническим блоком [1] понимается параллелепипедный конечный элемент, наделенный определяющими свойствами. Он характеризуется интерполирующей функцией граничного влияния [2, 3], имеющей вид общего решения определяющего уравнения. Существующая связь [4] между уравнениями теории упругости и уравнениями математической физики предоставляет возможность при решении пространственных задач несвязанной термоупругости использовать канонические блоки для гармонического уравнения. Применение при формировании блока решения задачи Дирихле позволяет избежать проблемы [5], связанные с неопределенностью нормали в угловых точках и на ребрах. Неудобство реализации классических решений задачи Дирихле для прямоугольника и прямоугольного параллелепипеда [6] состоит в их обнулении в угловых точках и связанной с этим неравномерной сходимостью рядов в окрестностях углов.

В [7] для преодоления отмеченного недостатка вводилась вспомогательная гармоническая функция, значения которой совпадают в угловых точках прямоугольника с заданными (обобщение на полигармонический оператор произведено в [8-10]). Однако, как отмечалось [7, с. 406], в случае параллелепипеда, ввиду наличия ребер, задача значительно усложняется, чем, по-видимому, и объясняется отсутствие в литературе доведенного до формульного вида решения задачи Дирихле, прямое значение которого не обращается в нуль на ребрах и в вершинах прямоугольного параллелепипеда.

В [2, 3] предложен новый закон суперпозиции, дающий возможность достаточно просто строить наборы частных решений, связанных с любыми точками границы (в том числе и с точками на ребрах и в вершинах). Важным практическим достоинством такого подхода является возможность использования приближенных постановок (с применением дискретизаций методов прямых и сеток) и привлечения конечных (дискретных) рядов Фурье, обладающих хорошими интерполяционными и аппроксимирующими свойствами [11]. При этом, определяющие уравнения удовлетворяются приближенно (или точно), а граничные условия в выбранных точках выполняются точно при любом числе граничных узлов на поверхности параллелепипеда.

В публикуемой работе произведена композиция построенных ранее частных решений. Получен в явном виде граничный оператор Грина с учетом углов; в равномерно сходящихся рядах представлено точное решение задачи Дирихле в замкнутой области прямоугольного параллелепипеда. Важный практический результат состоит в построении функций формы [12] при произвольном числе граничных узлов на поверхности канонического блока. Причем, полученные функции формы, в отличие от известных [12], приближенно (или точно) удовлетворяют определяющему уравнению. В предельном же случае (при неограниченном увеличении числа узлов) они переходят в компоненты граничной функции Грина [3]. На примере решения двух тестовых задач показано, что постановка граничных условий в угловых точках может иметь не только теоретическое, но и практическое значение, приводя к быстрой сходимости и адекватному описанию искомого решения при реализации метода блоков.

Современное состояние методов решения задач несвязанной термоупругости для прямоугольного параллелепипеда отражено в [13].

1. В прямоугольной декартовой системе координат x_i ($i=1, 2, 3$) рассмотрим прямоугольный параллелепипед $\Omega = \{x_i : 0 \leq x_i \leq a_i; i=1, 3\}$, ограниченный поверхностью Г. Несвязанная статическая задача термоупругости для однородного параллелепипеда Ω заключается в интегрировании уравнений равновесия относительно перемещений u_i ($i=1, 2, 3$) и уравнения теплопроводности относительно температуры T [4]:

$$(\lambda + \mu) u_{k,hi} + \mu u_{i,hk} - (3\lambda + 2\mu) \alpha T_{,i} = 0 \quad (1.1)$$

$$\lambda^{(T)} \Delta T + q_v = 0 \quad (1.2)$$

при соответствующих граничных условиях

$$L_{ij}(Q)u_j(Q) = f_i(Q), \quad Q \in \Gamma \quad (1.3)$$

$$L^{(T)}(Q)T(Q) = f^{(T)}(Q), \quad Q \in \Gamma \quad (1.4)$$

где Δ — оператор Лапласа, L_{ij} и $L^{(T)}$ — операторы граничных условий, q_v , f_i , $f^{(T)}$ — заданные функции, остальные обозначения совпадают с [4] (нижние латинские индексы принимают значения 1, 2, 3 и по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 3).

Представим перемещения в виде суммы двух слагаемых [14]:

$$u_i = u_i^0 + \Phi_i \quad (1.5)$$

где функция Φ является частным решением уравнения

$$\Delta \Phi = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \alpha T \quad (1.6)$$

Для функций u_i^0 , удовлетворяющих уже однородным уравнениям Ламе, используем представление Папковича — Нейбера [4]:

$$u_i^0 = \varphi_i - 1/[4(1-\nu)](\varphi_k x_k + \varphi_0)_i \quad (1.7)$$

$$\Delta \varphi_i = 0, \quad \Delta \varphi_0 = 0 \quad (1.8)$$

В результате исходная задача для уравнений (1.1) и (1.2) свелась к краевой задаче для уравнений (1.6), (1.8) и (1.2) с соответственно измененными граничными условиями. Поскольку частные решения уравнений Пуассона (1.2) и (1.6) находятся методом Фурье [2, 3], перейдем к построению общего решения уравнения Лапласа в Ω .

2. Рассмотрим в параллелепипеде $\Omega = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$, ограниченном поверхностью Γ , уравнение Лапласа относительно определяющей функции w :

$$\Delta w(x, y, z) = 0, \quad \Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2 \quad (2.1)$$

Представим множество точек границы Γ в виде суммы (объединения) трех непересекающихся множеств: вершин A , ребер B и граней C

$$\Gamma = A + B + C, \quad A = \bigcup_{i=1}^2 \bigcup_{j=1}^4 A_{ij}, \quad B = \bigcup_{i=1}^3 \bigcup_{j=1}^4 B_{ij}(\xi) \quad (0 < \xi < 1) \quad (2.2)$$

$$C = \bigcup_{i=1}^3 \bigcup_{j=1}^2 C_{ij}(\xi, \eta) \quad (0 < \xi < 1, 0 < \eta < 1)$$

Введем n узлов с координатами $(\xi_k = k/(n+1))$ вдоль каждого ребра $B_{ij}(\xi)$ ($i=1,3; j=1,4$) и n^2 узлов C_{ijkl} с координатами $(\xi_k = k/(n+1), \eta_l = l/(n+1))$ вдоль каждой грани $C_{ij}(\xi, \eta)$ ($i=1,3; j=1,2$).

Производя в соответствии с представлением (2.2) суперпозицию частных решений, построенных в [2, 3, 15], получим приближенное выражение для общего решения уравнения (2.1):

$$w(x, y, z) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^4 f_{ij}^S(x, y, z) w(A_{ij}) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^n f_{ijk}^R(x, y, z) U_{ijk}^B + \quad (2.3)$$

$$+ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n f_{ijkl}^G(x, y, z) W_{ijkl}^C$$

$$f_{ij}^S(x, y, z) = \kappa_j(x, y) \lambda_i(z), \quad f_{ijk}^R(x, y, z) = 2 \sum_{m=i}^n [\kappa_j(x_1^i, x_2^i) + \nu_{jm}(x_1^i, x_2^i)] \times$$

$$\times \sin \frac{\pi m k}{n+1} \sin \pi m x_3^i, \quad f_{ijkl}^G(x, y, z) = 4 \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \Psi_{j, st}(x_1^i) \sin[\pi s k / (n+1)] \times$$

$$\times \sin[\pi t l / (n+1)] \sin \pi s x_2^i \sin \pi t x_3^i$$

$$\kappa_1(x, y) = (1-x)(1-y), \quad \kappa_2(x, y) = (1-x)y, \quad \kappa_3(x, y) = xy, \quad \kappa_4(x, y) = x(1-y)$$

$$\lambda_i(z) = 1-z \quad (i=1), \quad \lambda_i(z) = z \quad (i=2)$$

$$v_{jm}(x_1^i, x_2^i) = \sum_{k,n} V_{kn}^{jm} \sin \pi k x_1^i \sin \pi n x_2^i$$

$$V_{kn}^{1m} = -\frac{4}{\pi^2 kn [(k\pi)^2 + (n\pi)^2 + \alpha_m^2]}, \quad V_{kn}^{2m} = (-1)^{n+1} V_{kn}^{1m}$$

$$V_{kn}^{3m} = (-1)^{k+1} (-1)^{n+1} V_{kn}^{1m}, \quad V_{kn}^{4m} = (-1)^{k+1} V_{kn}^{1m}$$

$$\psi_{1,st}(x_1^i) = \exp[-\alpha_{st}(1-x_1^i)] c_{1,st} + \exp[-\alpha_{st} x_1^i] c_{2,st}$$

$$\psi_{2,st}(x_1^i) = \exp[-\alpha_{st}(1-x_1^i)] c_{2,st} + \exp[-\alpha_{st} x_1^i] c_{1,st}$$

$$c_{1,st} = -\exp(-\alpha_{st}) c_{2,st}, \quad c_{2,st} = [1 - \exp(-2\alpha_{st})]^{-1}$$

$$\alpha_{st} = (\alpha_s^2 + \alpha_t^2)^{1/2}, \quad (x_1^i, x_2^i, x_3^i) = (x, y, z) \quad (i=1)$$

$$(x_1^i, x_2^i, x_3^i) = (y, z, x) \quad (i=2), \quad (x_1^i, x_2^i, x_3^i) =$$

$$= (z, x, y) \quad (i=3) \quad (2.4)$$

Если характеристические числа α_s соответствуют методу прямых второго порядка аппроксимации, то [16]:

$$\alpha_s = 2(n+1) \sin[1/2 \pi s / (n+1)] \quad (2.5)$$

В случае использования метода прямых четвертого порядка аппроксимации следует [17] характеристические числа (2.5) умножить на $[6/(5 + \cos(\pi s/(n+1)))]^{1/2}$.

Фигурирующие в выражении (2.3) константы U_{ijk}^B и W_{ijkl}^C представляют собой весовые коэффициенты разложений комбинаций искомого (или заданных) функций на ребрах и гранях в конечные (дискретные) ряды Фурье [2, 3].

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_s = \pi s \quad (2.6)$$

и ряд (2.3), (2.4) будет удовлетворять уравнению (2.1) точно. Причем, полнота представления (2.3) обеспечивается [2, 3] полнотой представления (2.2). Отличие (2.3) от классического решения [6] состоит в наличии первых двух членов, связанных с учетом вершин и ребер.

В некоторых случаях (например, при контакте блоков не по всей граничной поверхности, когда условия сопряжения по самой функции могут быть удовлетворены автоматически) бывает целесообразна другая форма представления решения.

3. Производя обратное конечное (дискретное) преобразование Фурье в (2.3) и приводя подобные члены, относящиеся к одним и тем же точкам граничной поверхности, после несложных алгебраических преобразований получим второе представление общего решения, где в качестве произвольных констант выступают сами значения искомого (или заданного) решения

$$w(x, y, z) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^4 f_{ij}^A(x, y, z) w(A_{ij}) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n f_{ijk}^B(x, y, z) w(B_{ijk}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n f_{ijkl}^C(x, y, z) w(C_{ijkl}) \quad (3.1)$$

$$f_{ij}^A(x, y, z) = f_{ij}^S(x, y, z) - f_{ij}^{G,S,R}(x, y, z) - f_{ij}^{R,S}(x, y, z)$$

$$f_{ijk}^B(x, y, z) = f_{ijk}^R(x, y, z) - f_{ijk}^{G,R}(x, y, z), \quad f_{ijkl}^C(x, y, z) = f_{ijkl}^G(x, y, z)$$

$$\begin{aligned}
f_{ij}^{G,S,R}(x,y,z) &= \sum_{s=1}^3 \sum_{t=1}^2 \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n f_{stmk}^G(x,y,z) \left[f_{ij}^S(C_{stmk}) - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{p=1}^3 \sum_{r=1}^4 \frac{1}{n+1} \sum_{q=1}^n f_{prq}^R(C_{stmk}) f_{ij}^S(B_{prq}) \right] \\
f_{ij}^{R,S}(x,y,z) &= \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^4 \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n f_{lmk}^R(x,y,z) f_{ij}^S(B_{lmk}) \\
f_{ijk}^{G,R}(x,y,z) &= \sum_{s=1}^3 \sum_{t=1}^2 \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{m=1}^n \sum_{q=1}^n f_{stmq}^G(x,y,z) f_{ijk}^R(C_{stmq})
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Решение в форме (3.1), (3.2), (2.4) дает приближенное аналитическое представление граничного оператора Грина с учетом угловых точек на граничной поверхности прямоугольного параллелепипеда. При этом, функции, фигурирующие в правой части выражения (3.1), являются функциями формы для узлов: в вершинах — A_{ij} ($i=1,2; j=1,4$), на ребрах — $B_{ijk}=B_{ij}(\zeta_k)$ ($i=1,3; j=1,4; k=1,n$) и на гранях — $C_{ijkl}=C_{ij}(\xi_k, \eta_l)$ ($i=1,3; j=1,2; k=1,n; l=1,n$), $\zeta_k=k/(n+1)$, $\xi_k=k/(n+1)$, $\eta_l=l/(n+1)$.

В предельном случае ($n \rightarrow \infty$) представление (3.1) переходит в интегральное

$$\begin{aligned}
w(x,y,z) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^4 f_{ij}^A(x,y,z) w(A_{ij}) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 \int_0^1 f_{ij}^B(x,y,z;\zeta) w(B_{ij}(\zeta)) d\zeta + \\
&\quad + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \int_0^1 \int_0^1 f_{ij}^C(x,y,z;\xi,\eta) w(C_{ij}(\xi,\eta)) d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Выражения (3.2) перейдут в интегральные аналогичным образом.

Формулы (3.3), (3.2) и (2.4) при $n \rightarrow \infty$ дают точное представление граничного оператора Грина. Причем функции формы, фигурирующие в (3.1) под знаком суммы, при $n \rightarrow \infty$ перейдут в компоненты граничной функции Грина [3].

Реализация второй формы представления общего решения (3.1), (3.2) и (2.4) ввиду наличия многократных сумм, сопряжена со значительными вычислительными затратами, которые частично сокращаются использованием быстрого преобразования Фурье.

4. Перейдем далее к сворачиванию многократных сумм, фигурирующих во второй форме общего решения. В результате проведения аналитических преобразований (которые делаются один раз и навсегда) удалось получить компактные и экономичные представления решения.

Используем условия ортогональности тригонометрических функций дискретного аргумента [11]:

$$\frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^n \sin \frac{\pi kl}{n+1} \sin \frac{\pi km}{n+1} = \begin{cases} 1, & l=m \\ 0, & l \neq m \end{cases} \tag{4.1}$$

и следующие суммы:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1} \right) \sin \frac{\pi km}{n+1} &= \varepsilon_m, & \frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n+1} \sin \frac{\pi km}{n+1} &= (-1)^{m+1} \varepsilon_m \\
\varepsilon_m &= 2/\gamma_m \cos[\pi m/(2(n+1))], & \gamma_m &= 2(n+1) \sin[\pi m/(2(n+1))]
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Тогда получим (приводятся только окончательные результаты):

$$f_{ij}^{G,S,R}(x, y, z) = - \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \chi_{i^*j^*lm}(x, y, z) a_{ijkl}^{(1)} \varepsilon_l a_{ijkl}^{(2)} \varepsilon_m$$

$$\chi_{i^*j^*lm}(x, y, z) = \psi_{i^*lm}(x_1^{i^*}) \sin \pi l x_2^{i^*} \sin \pi m x_3^{i^*} \quad (i=1, 2; j=\overline{1, 4}) \quad (4.3)$$

$$f_{ij}^{R,S}(x, y, z) = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n \varphi_{i^*j^*l}(x, y, z) a_{ijkl} \varepsilon_l, \quad \varphi_{i^*j^*l}(x, y, z) =$$

$$= [\kappa_{j^*}(x_1^{i^*}, x_2^{i^*}) + \nu_{j^*l}(x_1^{i^*}, x_2^{i^*})] \sin \pi l x_3^{i^*} \quad (i=1, 2; j=\overline{1, 4}) \quad (4.4)$$

$$f_{ijk}^{G,R}(x, y, z) = \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^n \sum_{p=1}^n \chi_{i^*j^*mp}(x, y, z) a_{ijklm}^{(1)} a_{ijklp}^{(2)} \quad (i=\overline{1, 3}; j=\overline{1, 4}; k=\overline{1, n}) \quad (4.5)$$

В (4.3) для фиксированных значений i, j индексы $i^*=i^*(i, j, k)$, $j^*=j^*(i, j, k)$ совпадают с индексами трех ($k=1, 2, 3$) граней, пересекающихся в вершине A_{ij} , а значение параметра $a_{ijkl}^{(r)} = -1$, если грань $C_{i^*j^*}(\xi_1, \xi_2)$ имеет в ней $\xi_r=0$ ($r=1, 2$) и $a_{ijkl}^{(r)} = (-1)^{s+1}$, если $\xi_r=1$, где $s=l$ ($r=1$) $s=m$ ($r=2$).

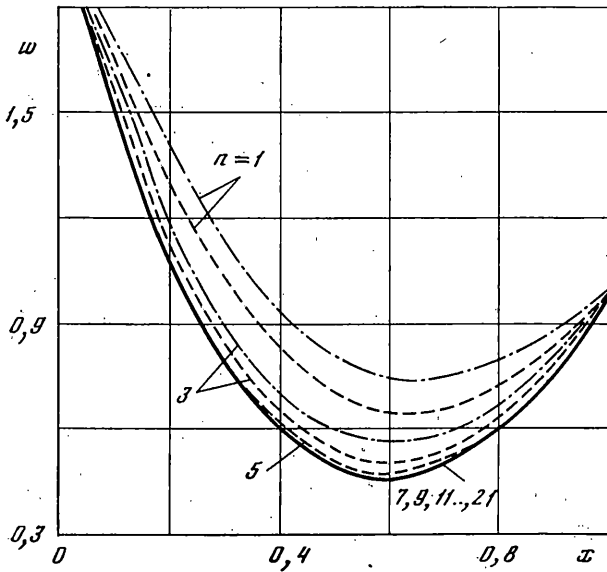
В (4.4) для фиксированных значений i, j индексы i^*, j^* совпадают с индексами трех ($k=1, 2, 3$) ребер, пересекающихся в вершине, а значение параметра $a_{ijkl}=1$, если ребро $B_{i^*j^*}(\zeta)$ имеет в ней координату $\zeta=0$ и $a_{ijkl} = (-1)^{l+1}$, если соответствующая координата $\zeta=1$. И, наконец, в (4.5) для фиксированных значений i, j индексы i^*, j^* совпадают с индексами двух ($l=1, 2$) граней, пересекающихся на ребре B_{ij} , а значение параметра $a_{ijklg}^{(r)} = \varepsilon_q$, если грань $C_{i^*j^*}(\xi_1, \xi_2)$ имеет на данном ребре $\xi_r=0$ ($r=1, 2$) и $a_{ijklg}^{(r)} = (-1)^{q+1} \varepsilon_q$, если $\xi_r=1$; если же ξ_r совпадает с координатой ζ ребра $B_{ij}(\zeta)$, то значение $a_{ijklg}^{(r)} = 2 \sin \pi q \zeta$.

Число слагаемых в конечных суммах (4.3)–(4.5) соответственно в $24n^4+2n^2$, $4n$ и $3n^3$ раз меньше, чем число слагаемых в соответствующих суммах из (3.2), что значительно сокращает трудоемкость вычисления функций формы.

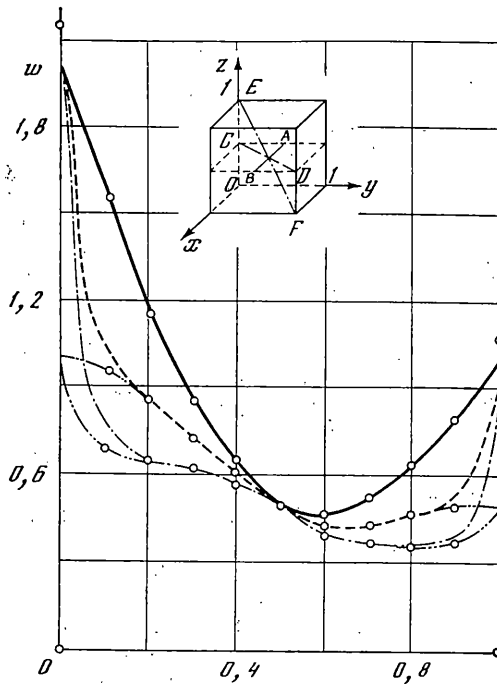
В предельном случае ($n \rightarrow \infty$) суммарные представления (4.1) и (4.2) автоматически переходят в интегральные, а конечные суммы (4.3)–(4.5) становятся бесконечными рядами и $\lim \varepsilon_m = 2/(\pi m)$ (при $n \rightarrow \infty$).

Построенные общие решения уравнения (2.1) в форме (2.3) и (3.1) осуществляют гармоническую (или «почти» гармоническую) граничную интерполяцию при произвольном числе узлов, а их предельные представления (при соответствующей гладкости самих граничных условий) дают точное решение задачи Дирихле в равномерно сходящихся рядах в замкнутой области Ω . Для представления (3.3) через граничную функцию Грина [3] следует первые два члена внести под знак поверхностного интеграла по Γ , для чего необходимо домножить функции при соответствующих граничных значениях на δ -функции, сосредоточенные на соответствующих геометрических многообразиях. Заметим, однако, что здесь достаточно ограничиться полученным операторным представлением, выражающим общее решение определяющего уравнения, которое в форме (3.1) и используется при численной реализации.

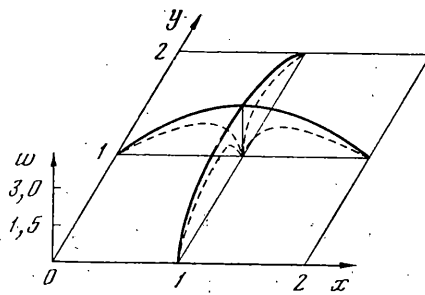
Явный вид решения получается для задачи теплопроводности (1.2), (1.4) в том частном случае, когда оператор $L^{(r)}$ — тождественный, т. е. при задании на граничной поверхности значений температуры. В общем случае подстановка точного ($n \rightarrow \infty$) решения (2.3) или (3.3) в граничные условия (1.3), (1.4) или в условия сопряжения блоков с учетом представлений (1.5) и (1.7) даст систему операторных (интегральных) уравнений. Использование же приближенных решений (2.3) или (3.1), которые и применяются на практике, приведет к системе линейных алгебраических



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Таблица

n	1	3	5	7	9	11	13
$w_C \cdot 10$	7,013	5,282	5,151	5,084	5,054	5,038	5,028
	3,987	4,684	4,853	4,916	4,946	4,962	4,972
	5,500	4,983	5,002	5,000	5,000	5,000	5,000
	5,213	5,000	5,000	5,000	5,000	—	—
	—	—	—	—	—	—	—
w_A	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000
	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000
	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000
	3,242	2,435	2,260	2,185	2,144	—	—
	—	—	—	—	—	—	—
w_B	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	1,621	1,218	1,130	1,093	1,072	—	—
	—	—	—	—	—	—	—

уравнений. При этом для вычислительной устойчивости существенно то, что на границе Γ всегда будет выполняться граничное операторное уравнение (тождество) второго рода, обусловленное структурой решения (3.1) или (3.3).

5. В качестве примера рассмотрим задачу теплопроводности для прямоугольного параллелепипеда с разрывными граничными условиями: температуры граней $x=0$ и $x=1$ постоянны и равны соответственно $T_0=2^\circ\text{C}$ и $T_1=1^\circ\text{C}$, а остальные грани поддерживаются при нулевой температуре.

На фиг. 1 показано распределение безразмерной температуры (отнесенной к 1°C) w вдоль прямой $y=z=0,5$. Сплошная линия соответствует точному решению, полученному в рядах Фурье [6]; штриховые линии относятся к решению, найденному на основе формулы (2.3) с характеристическими числами (2.5); штрихпунктирные линии соответствуют решению (2.3) с $\alpha_k=kt$, т. е. при точном удовлетворении уравнению (2.1). Видно, что точное удовлетворение определяющему уравнению приводит к менее точным результатам, что объясняется как разрывной природой задачи, так и поточечным характером удовлетворения граничным условиям. По мере роста числа узлов ($n \geq 7$) кривые сближаются, практически совпадая с точным решением.

Из постановки задачи возникает неопределенность в задании граничных значений в вершинах и на ребрах параллелепипеда. В зависимости от того, к какой из граней отнести угловые точки, возможны два случая. В первом из них считается, что угловые точки относятся к тем граням, где заданы ненулевые граничные значения. Второй случай предполагает задание нулевых значений температуры в вершинах и на ребрах.

Результаты проведенных расчетов в точках $C(1/2, 1/2, 1/2)$, $A(0, 1/2, 1/2)$ и $B(1, 1/2, 1/2)$ с использованием формулы (3.1) приведены в таблице. Первым двум случаям соответствуют первые две строки. Третья строка соответствует решению, полученному заданием в угловых точках значений равных полусумме граничных величин, соответствующих первым двум случаям (целесообразность введения третьего случая обусловлена тем, что первый случай настолько завышает точное решение, насколько второй случай его занижает). Четвертая строка соответствует точному решению [6] при удержании в нем конечного числа членов.

Сопоставление результатов приводит к следующим выводам: распоряжением допускаемого произвола в задании граничных условий в угловых точках удается значительно убыстрить сходимость (при точной реализации интерполяционных свойств на границе), а также получать верхние и нижние оценки искомого решения. Представление решения в форме (3.1) дает возможность оценивать «вклады», вносимые при приближенном расчете в решение w гранями, ребрами и вершинами, значения которых для центральной точки $(1/2, 1/2, 1/2)$ параллелепипеда обозначены соответственно через w^C , w^B , w^A и приведены ниже для различных n (в круглых скобках указано общее число граничных узлов на поверхности Γ):

$n=1$	3	5	7	9	11
(26)	(98)	(218)	(386)	(602)	(866)
$w \cdot 10=5,5001$	4,9830	5,0021	5,0002	5,0001	5,0001
$w^C \cdot 10=3,9870$	4,6842	4,8531	4,9161	4,9459	4,9623
$w^B \cdot 10=0,0129$	0,3498	0,1427	0,0836	0,0539	0,0376
$w^A \cdot 10=1,5001$	-0,0510	0,0063	0,0006	0,0004	0,0002
$n=13$	15	17	19	21	
(1178)	(1538)	(1946)	(2402)	(2906)	
$w \cdot 10=5,0000$	5,0000	5,0000	5,0000	5,0000	
$w^C \cdot 10=4,9723$	4,9787	4,9832	4,9864	4,9887	
$w^B \cdot 10=0,0277$	0,0212	0,0168	0,0136	0,0113	
$w^A \cdot 10=0,0001$	0,00007	0,00004	0,00002	0,00001	

Полученные результаты иллюстрируют уточнение решения, связанное с учетом ребер и вершин и кроме того служат реализацией функции формы блоков с числом граничных узлов от 26 до 2906.

На фиг. 2 показано распределение температуры вдоль трех прямых: AB (соединяющей две грани), CD (соединяющей два ребра) и EF (соединяющей две вершины). Решение (3.1) вдоль этих прямых отмечено сплошной, штриховой и штрихпунктирной линиями. Штрихпунктирные линии с двумя точками использованы для обозначения решения, полученного при задании в угловых точках упомянутых выше среднеарифметических значений. Светлые точки соответствуют решению в рядах Фурье [6], которое в угловых точках всегда обращается в нуль, а на гранях (при конечной реализации) обнаруживает осцилляции, превышая заданные значения (табл.). При вычислениях полагалось $n=9$; вдоль оси абсцисс отложены значения координат по направлениям выбранных прямых, отнесенные к их длинам.

Для иллюстрации сопряжения нескольких блоков рассмотрим задачу теплопроводности бесконечной (в направлении оси z) параллелепипедной трубки, раскроенной на четыре блока, при постоянной интенсивности объемного тепловыделения q_V и нулевых значениях температуры на внешней границе. Используя поточечное сопряжение блоков, исследуем два случая. Первый случай соответствует учету граничных неоднородностей в угловых точках, а второй случай предполагает их нулевые значения. Изменение безразмерной температуры $w=T/(q_V a^2/\lambda^{(T)})$ вдоль границ блоков показано на фиг. 3. Здесь на каждой единичной стороне блока бралось по 100 узлов. Сопряжение блоков производилось точечным образом по нормальным производным искомого решения (для самого решения оно выполняется автоматически).

Для первого случая стыковки (сплошные линии) решение совпало с точным [8], что адекватно описывает поведение всей конструкции. При втором же случае (штриховые линии) конструкция из блоков, несмотря на достаточно большое число граничных узлов, развалилась, приведя к «нулевому» [1, с. 69] результату. Последнее связано с допущенным обнулением решения в углах и использованием, поэтому, неполного набора построенных базисных функций. Из проведенного сопоставления следует, что учет угловых точек (и соответствующих им частных решений) при поточечной реализации метода блоков имеет существенное значение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А. А.* Загадки механики твердых деформируемых тел // *Нерешенные проблемы механики и прикладной математики*. М.: Изд-во МГУ, 1977. С. 68–73.
2. *Горшков А. Г., Колесников И. Ю.* Построение операторов граничного влияния для невязанной динамической задачи термоупругости в прямоугольном параллелепипеде // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1986. № 4. С. 94–100.
3. *Горшков А. Г., Колесников И. Ю.* Формирование общих решений в форме функций граничного влияния для статической задачи теории упругости в прямоугольном параллелепипеде // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1988. № 4. С. 67–74.
4. *Победря В. Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1981. 343 с.
5. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
6. *Бабич В. М., Капилович М. Б., Михлин С. Г. и др.* Линейные уравнения математической физики. М.: Наука, 1964. 368 с.
7. *Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н.* Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1980. 686 с.
8. *Колесников И. Ю.* Применение модульного подхода к расчету пластин // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1984. № 5. С. 136–141.
9. *Горшков А. Г., Колесников И. Ю.* Об одной методике приближенного решения задач колебаний пластин // *Прикл. механика*. 1985. Т. 21. № 2. С. 86–91.
10. *Колесников И. Ю.* Приближенное построение функций влияния для многослойных пластин с произвольными граничными условиями // *Прикл. механика*. 1985. Т. 21. № 3. С. 87–92.
11. *Хемминг Р. В.* Численные методы для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1972. 398 с.
12. *Зенкевич О.* Применение метода конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
13. *Суслова Н. Н.* Методы решения пространственной задачи теории упругости для тела в форме параллелепипеда // *Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела*. М.: ВИНТИ. 1980. Т. 13. С. 187–296.
14. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 517 с.
15. *Горшков А. Г., Колесников И. Ю.* Построение функций граничного влияния пространственной задачи теории упругости в параллелепипеде // *Математические методы и физико-механические поля*. Киев: Наук. думка. 1987. Вып. 26. С. 68–72.
16. *Колесников И. Ю.* К расчету трехслойных пластин со смешанными граничными условиями с помощью рядов Фурье // *Прикл. механика*. 1981. Т. 17. № 7. С. 94–100.
17. *Колесников И. Ю.* Метод конечных рядов Фурье и его применение к расчету трехслойных пластин со сложными граничными условиями // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1982. № 1. С. 169–175.

Москва

Поступила в редакцию
20.XI.1989