

УДК 539.3
© 1990 г.

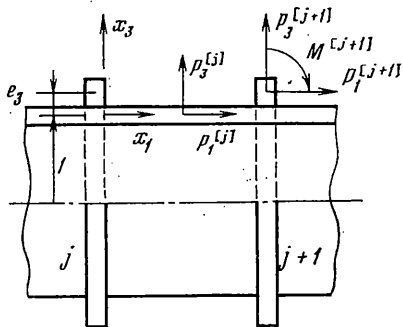
Л. С. РЫБАКОВ

ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ УПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПОДКРЕПЛЕННОЙ ШПАНГОУТАМИ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Аналитические исследования деформирования ребристых оболочек и пластин, содержащиеся в [1–6] и других, базировались на концепции сингулярно неоднородного тела, позволившей изучавшиеся там задачи свести к проблеме решения дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от δ -функции и ее производных.

В публикуемой статье задача об осесимметричном упругом деформировании круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной регулярной системой шпангоутов, сведена с помощью метода «склейки» к дискретной краевой задаче шестого порядка, для решения которой предложен точный алгоритм. В частности, для оболочки, свободной в осевом направлении хотя бы на одном краю, эта задача редуцирована к дискретной краевой задаче четвертого порядка, решение которой построено в аналитическом виде.

1. Постановка задачи. Рассмотрим упругую круговую цилиндрическую оболочку постоянной толщины, подкрепленную эксцентрично относительно ее срединной поверхности круговыми упругими шпангоутами, расположенными с постоянным шагом. Внутренние шпангоуты считаются одинаковыми, а крайние индивидуализируются. Закрепим за шпангоутами, число которых, включая крайние, полагаем равным $n+1$, где n — любое целое положительное число, нумерацию $0, 1, 2, \dots, n$. По предположению внешние нагрузки, действующие на подкрепленную оболочку, осесимметричны и представлены, вообще говоря, внешними нагрузками шпангоутов и самой оболочки. Фрагмент подкрепленной оболочки с двумя смежными внутренними шпангоутами показан схематично на фиг. 1.



Фиг. 1

Сущность упругой системы, моделирующей подкрепленную оболочку, определим следующими допущениями: деформирование оболочки описывается классической линейной теорией тонких упругих оболочек, базирующейся на гипотезе Кирхгоффа — Лява; шпангоуты имитируются линейно деформируемыми круговыми упругими линиями, наделенными заданными жесткостями на растяжение — сжатие и выкручивание; шпангоуты взаимодействуют с оболочкой непрерывно вдоль линий пересечения ее срединной поверхности с плоскостями упругих линий шпангоутов.

Анализ деформирования подкрепленной оболочки будем вести с помощью метода склейки. В соответствии с этим методом расчленим подкрепленную оболочку на составляющие ее элементы — шпангоуты и расположенные между ними отсеки оболочки, к которым помимо заданных внешних сил приложим еще силы их взаимодействия с соседними элементами,

подчиняющиеся, как известно, третьему закону Ньютона. В таком случае анализ деформирования подкрепленной оболочки сводится к описанию деформирования ее изолированных элементов и постановке геометрических условий их сопряжения.

Изложение будем вести в безразмерной форме. С этой целью примем за основные размерные параметры радиус R срединной поверхности оболочки и ее тангенциальную жесткость $B=ERhR/(1-\mu^2)$, где E и μ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки, а h — ее безразмерная, отнесенная к R , толщина. Цилиндрическая жесткость D оболочки связана с B очевидным равенством: $D=Bh^2R^2/12$. Условимся, далее, что все величины с линейной размерностью превращаются в безразмерные путем деления на R . Правила образования остальных безразмерных величин будут указаны по мере их введения.

Обратимся сначала к упругому анализу j -го отсека оболочки, расположенного между шпангоутами j и $j+1$. Пусть он отнесен к локальной системе отсчета x_1, x_2, x_3 в срединной поверхности оболочки, где $x_1 \in [0, l]$ — продольная (l — длина отсека (шаг шпангоутов); см. фиг. 1), x_2 — окружная, а x_3 — нормальная координаты. Введем обозначения: $u_1^{[j]}, u_3^{[j]}$ — продольное смещение и прогиб срединной поверхности отсека; $n_\alpha^{[j]}, m_\alpha^{[j]}$ — погонные тангенциальные усилия и изгибающие моменты (отнесены соответственно к B и DR^{-1} ; $\alpha=1, 2$); $n_3^{[j]}$ — погонная перерезывающая сила (отнесена к DR^{-2}); $p_1^{[j]}, p_3^{[j]}$ — продольная и поперечная заданные поверхностные внешние силы (отнесены соответственно к BR^{-1} и DR^{-3}). В силу осесимметричности задачи введенные величины — функции одной координаты x_1 . Деформирование j -го отсека оболочки ($j=0, 1, 2, \dots, n-1$) описывают известные уравнения [7]:

$$\begin{aligned} u_1^{[j]'}(x_1) &= n_1^{[j]}(x_1) - \mu u_3^{[j]}(x_1), & n_1^{[j]'}(x_1) &= -p_1^{[j]}(x_1) \\ u_3^{[j]IV}(x_1) + 4\beta^4 u_3^{[j]}(x_1) &= p^{[j]}(x_1) = p_3^{[j]}(x_1) - \mu c n_1^{[j]}(x_1) \\ m_1^{[j]}(x_1) &= -u_3^{[j]'''}(x_1), & m_2^{[j]}(x_1) &= \mu m_1^{[j]}(x_1) \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$n_3^{[j]}(x_1) = -u_3^{[j]'''}(x_1), \quad n_2^{[j]}(x_1) = (1-\mu^2)u_3^{[j]}(x_1) + \mu n_1^{[j]}(x_1)$$

Здесь и далее производные функций одного аргумента обозначаются штрихами сверху; $c=12h^{-2}$, $4\beta^4=(1-\mu^2)c$. Первые три уравнения (4.1) содержат основные, определяемые в первую очередь, искомые величины, последующие уравнения выражают через них остальные неизвестные.

С помощью вектора-столбца $y^{[j]}(t)$ с компонентами

$$\begin{aligned} y_1^{[j]}(t) &= \beta u_1^{[j]}(x_1), & y_2^{[j]}(t) &= n_1^{[j]}(x_1) \\ y_i^{[j]}(t) &= \beta^{3-i} d^{i-3} u_3^{[j]}(x_1) / dx_1^{i-3} \quad (i=3, 4, 5, 6) \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $t=\beta x_1$, общее решение системы первых трех уравнений (4.1) представимо в виде

$$y^{[j]}(t) = g(t) Y^{[j]} + f^{[j]}(t) \quad (4.3)$$

Здесь $Y^{[j]}=y^{[j]}(0)$, $g(t)$ — матрица 6×6 , элементы которой выражаются через функции Крылова

$$\begin{aligned} k_1(t) &= \text{ch } t \cos t, & k_2(t) &= 1/2 (\text{ch } t \sin t + \text{sh } t \cos t) \\ k_3(t) &= 1/2 \text{sh } t \sin t, & k_4(t) &= 1/4 (\text{ch } t \sin t - \text{sh } t \cos t) \end{aligned} \quad (4.4)$$

формулами

$$\begin{aligned} g_{11} &= g_{22} = 1, & g_{12} &= [t - \mu^2 k_2(t)] / (1 - \mu^2) \\ g_{1i} &= -\mu k_{i-1}(t), & g_{16} &= (1 - \mu^2) g_{32} / 4 = -\mu [1 - k_1(t)] / 4 \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$g_{2m} = g_{31} = 0, \quad g_{3s} = k_{s-2}(t), \quad g_{pq}(t) = g_{p-1,q}'(t)$$

($i=3, 4, 5$; $m=1, 3, 4, 5, 6$; $s=3, 4, 5, 6$; $p=4, 5, 6$; $q=1, 2, \dots, 6$) а $f^{[j]}(t)$ —

вектор-столбец с элементами

$$f_1^{[j]}(t) = \int_0^t [\beta^{-1}g_{12}(t-\tau)p_1^{[j]}(\tau\beta^{-1}) - \beta^{-4}g_{16}(t-\tau)p_3^{[j]}(\tau\beta^{-1})]d\tau \quad (1.6)$$

$$f_2^{[j]}(t) = \int_0^{x_1} p_1^{[j]}(\tau)d\tau, \quad f_s^{[j]}(t) = \beta^{-4} \int_0^t g_{s6}(t-\tau)p_3^{[j]*}(\tau\beta^{-1})d\tau \quad (s=3, 4, 5, 6)$$

$$p_3^{[j]*}(x_1) = p_3^{[j]}(x_1) + \mu c f_2^{[j]}(t) \quad (1.7)$$

Соотношения (1.1)–(1.7) показывают, что напряженно-деформированное состояние j -го изолированного отсека найдено с точностью до пока неизвестного начального вектора-столбца $Y^{[j]}$.

Проведем теперь упругий анализ изолированных шпангоутов. Пусть $W^{[j]}$ и $\vartheta^{[j]}$ – радиальное смещение и угол выкручивания упругой линии j -го шпангоута, а внешние нагрузки на него представлены (см. фиг. 1) равномерно распределенными вдоль его упругой линии силами $P_1^{[j]}$, $P_3^{[j]}$, направленными вдоль осей x_1 , x_3 и отнесенными соответственно к B и $\beta^3 DR^{-2}$, а также выкручивающим моментом $M^{[j]}$, отнесенным к $\beta^2 DR^{-1}$.

Из равновесия j -го внутреннего шпангоута имеем

$$(1+e_s)P_1^{[j]} + n_1^{[j]}(0) - n_j^{[j-1]}(l) = 0$$

$$\beta^2(1+e_s)(M^{[j]} - \beta^{-1}\eta\vartheta^{[j]}) - ce_3[n_1^{[j]}(0) - n_1^{[j-1]}(l)] + m_1^{[j]}(0) - m_1^{[j-1]}(l) = 0 \quad (1.8)$$

$$\beta^3(1+e_s)(P_3^{[j]} - \kappa W^{[j]}) + n_3^{[j]}(0) - n_3^{[j-1]}(l) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n-1)$$

В этих уравнениях κ и η – жесткости упругих линий внутренних шпангоутов на растяжение – сжатие и выкручивание, отнесенные соответственно к $\beta^3 DR^{-3}$ и βDR^{-1} , а e_s – удаленность этих линий от срединной поверхности оболочки.

Аналогичным образом устанавливаются уравнения равновесия

$$(1+e_{s_0})P_1^{[0]} + n_1^{[0]}(0) = 0$$

$$\beta^2(1+e_{s_0})(M^{[0]} - \beta^{-1}\eta_0\vartheta^{[0]}) - ce_{s_0}n_1^{[0]}(0) + m_1^{[0]}(0) = 0 \quad (1.9)$$

$$\beta^3(1+e_{s_0})(P_3^{[0]} - \kappa_0 W^{[0]}) + n_3^{[0]}(0) = 0$$

левого крайнего шпангоута и уравнения равновесия

$$(1+e_{3n})P_1^{[n]} - n_1^{[n-1]}(l) = 0$$

$$\beta^2(1+e_{3n})(M^{[n]} - \beta^{-1}\eta_n\vartheta^{[n]}) + ce_{3n}n_1^{[n-1]}(l) - m_1^{[n-1]}(l) = 0 \quad (1.10)$$

$$\beta^3(1+e_{3n})(P_3^{[n]} - \kappa_n W^{[n]}) - n_3^{[n-1]}(l) = 0$$

правого крайнего шпангоута. Величины κ_s , η_s , e_{3s} ($s=0, n$) имеют тот же смысл, что и κ , η , e_s , но для соответствующих крайних шпангоутов.

Запишем геометрические условия сопряжения шпангоутов со смежными отсеками оболочки

$$U^{[0]} - e_{s_0}\vartheta^{[0]} = u_1^{[0]}(0), \quad U^{[j]} - e_s\vartheta^{[j]} = u_1^{[j]}(0)$$

$$W^{[j]} = u_3^{[j]}(0), \quad \vartheta^{[j]} = -u_3^{[j]'}(0) \quad (j=0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (1.11)$$

$$U^{[n]} - e_{3n}\vartheta^{[n]} = u_1^{[n-1]}(l), \quad U^{[j]} - e_s\vartheta^{[j]} = u_1^{[j-1]}(l)$$

$$W^{[j]} = u_3^{[j-1]}(l), \quad \vartheta^{[j]} = -u_3^{[j-1]'}(l) \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

В них $U^{[j]}$ — смещение j -го шпангоута как жесткого целого вдоль оси x_1 . Из равенств (1.11) вытекают геометрические условия сопряжения смежных отсеков оболочки

$$u_m^{[j]}(0) = u_m^{[j-1]}(l) \quad (m=1, 3), \quad u_3^{[j]'}(0) = u_3^{[j-1]'}(l) \quad (j=1, 2, \dots, n-1) \quad (1.12)$$

Исключим в системе (1.8) из второго уравнения с помощью первого усилия $n_1^{[j]}$. Затем объединим ее с условиями (1.12) в единую систему, воспользуемся зависимостями (1.11) и перейдем к обозначениям (1.2). В итоге получим

$$CY^{[j]} = y^{[j-1]}(\lambda) + T^{[j]} \quad (j=1, 2, \dots, n-1) \quad (1.13)$$

Здесь $\lambda = \beta l$, C — матрица 6×6 , отличающаяся от единичной матрицы того же порядка наличием еще двух отличных от нуля элементов

$$C_{54} = -\eta^* = -(1+e_3)\eta, \quad C_{63} = \kappa^* = (1+e_3)\kappa \quad (1.14)$$

а $T^{[j]}$ — вектор-столбец с компонентами

$$T_m^{[j]} = 0 \quad (m=1, 3, 4), \quad T_2^{[j]} = -(1+e_3)P_1^{[j]} \quad (1.15)$$

$$T_5^{[j]} = (1+e_3)(M^{[j]} + e\beta^{-2}e_3P_1^{[j]}), \quad T_6^{[j]} = (1+e_3)P_3^{[j]} \quad (j=1, 2, \dots, n-1)$$

Подставляя в равенство (1.13) зависимость (1.3), приходим к системе разностных уравнений с постоянными коэффициентами

$$CY^{[j]} = GY^{[j-1]} + Z^{[j-1]} \quad (j=1, 2, \dots, n-1) \quad (1.16)$$

в которой сведены матрица G и вектор-столбец $Z^{[j]}$ с компонентами

$$G_{im} = g_{im}(\lambda), \quad Z_m^{[j]} = f_m^{[j]}(\lambda) + T_m^{[j+1]} \quad (i, m=1, 2, \dots, 6; j=0, 1, 2, \dots, n-2) \quad (1.17)$$

Эта система предназначена для нахождения искомых векторов $Y^{[j]}$, с точностью до которых выше было описано напряженно-деформированное состояние подкрепленной оболочки.

В результате подобных преобразований уравнения (1.9) принимают вид

$$Y_2^{[0]} = T_2^{[0]}, \quad -\eta_0^* Y_4^{[0]} + Y_5^{[0]} = T_5^{[0]}, \quad \kappa_0^* Y_3^{[0]} + y_6^{[0]} = T_6^{[0]} \quad (1.18)$$

а уравнения (1.10) переходят в соотношения

$$y_2^{[n-1]}(\lambda) = -T_2^{[n]}, \quad \eta_n^* y_4^{[n-1]}(\lambda) + y_5^{[n-1]}(\lambda) = -T_5^{[n]} \\ -\kappa_n^* y_3^{[n-1]}(\lambda) + y_6^{[n-1]}(\lambda) = -T_6^{[n]} \quad (1.19)$$

Равенства (1.18), (1.19) играют для системы (1.16) роль краевых условий. По аналогии с (1.14) в них введены параметры $\eta_s^* = (1+e_{3s})\eta_s$, $\kappa_s^* = (1+e_{3s})\kappa_s$ ($s=0, n$). Что же касается величин $T_m^{[s]}$ ($m=2, 5, 6; s=0, n$), то они подсчитываются по соответствующим формулам (1.15) при $j=s$ после замены в них e_3 на e_{3s} .

С помощью элемента вектора-столбца $Y^{[n]}$, выводимого из выражения (1.13) при $j=n$, условиям (1.19) можно придать более удобный вид

$$Y_2^{[n]} = 0, \quad (\eta_n^* - \eta^*) Y_4^{[n]} + Y_5^{[n]} = 0, \quad (\kappa_n^* - \kappa^*) Y_3^{[n]} - Y_6^{[n]} = 0 \quad (1.20)$$

При этом предполагается, что $Y^{[n]}$ находится из решения системы (1.16), формально продолженной до $j=n$.

Если левый (правый) торец оболочки закреплен в осевом направлении, то первое равенство (1.18) ((1.20)) следует заменить условием $Y_1^{[0]} = 0$ ($Y_1^{[n]} = 0$).

Итак, задача об осесимметричном деформировании подкрепленной оболочки сведена к решению дискретной краевой задачи (1.16), (1.18), (1.20), в краевых условиях которой, если необходимо, то надо скорректировать, как только что отмечалось, первые условия. В тех случаях, когда один или оба торца оболочки свободны в осевом направлении, эта краевая

задача, имеющая изначально шестой порядок, допускает редукцию и, как показывается ниже на примере краевых условий (1.18), (1.20), может быть приведена к более простой дискретной краевой задаче четвертого порядка.

В самом деле, второе уравнение системы (1.16) имеет вид $Y_2^{[j]} = Y_2^{[j-1]} + Z_2^{[j-1]}$ ($j=1, 2, \dots, n-1$) и с учетом первого равенства системы (1.18) и второй формулы (1.17) позволяет получить выражение

$$Y_2^{[j]} = \sum_{m=0}^{j-1} f_2^{[m]}(\lambda) + \sum_{m=0}^j T_2^{[m]} \quad (j=0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (1.21)$$

Здесь и далее предполагается, что сумма равна нулю, если ее верхний предел меньше нижнего.

Полагая в этом выражении и во втором равенстве системы (1.13) $j=n$, с учетом первого условия (1.19) находим

$$Y_2^{[n]} = y_2^{[n-1]}(\lambda) + T_2^{[n]} = \sum_{m=0}^{n-1} f_2^{[m]}(\lambda) + \sum_{m=0}^n T_2^{[m]} = 0$$

что, с одной стороны, свидетельствует об отсутствии осевого воздействия на упругую систему со стороны несуществующего отсека n ($Y_2^{[n]}=0$), а с другой стороны, подтверждает глобальное равновесие подкрепленной оболочки в отношении действующих на нее осевых внешних сил.

Поскольку величины $Y_2^{[j]}$ уже найдены, то четыре последних уравнения системы (1.16) можно теперь переписать следующим образом

$$SX^{[j]} = AX^{[j-1]} + F^{[j-1]} \quad (j=1, 2, \dots, n-1) \quad (1.22)$$

Здесь введены квадратные матрицы S , A и векторы-столбцы $X^{[j]}$, $F^{[j]}$ четвертого порядка с элементами

$$S_{im} = C_{i+2, m+2}, \quad A_{im} = G_{i+2, m+2}, \quad X_m^{[j]} = Y_{m+2}^{[j]} \quad (1.23)$$

$$F_m^{[j]} = Z_{m+2}^{[j]} + G_{m+2, 2} Y_2^{[j]} \quad (i, m=1, 2, 3, 4)$$

В новых обозначениях неиспользованные краевые условия (1.18), (1.20) имеют вид

$$-\eta_0^* X_2^{[0]} + X_3^{[0]} = T_5^{[0]}, \quad \kappa_0^* X_1^{[0]} + X_4^{[0]} = T_6^{[0]} \quad (1.24)$$

$$(\eta_n^* - \eta^*) X_2^{[n]} + X_3^{[n]} = 0, \quad (\kappa_n^* - \kappa^*) X_1^{[n]} - X_4^{[n]} = 0$$

где под $X^{[n]}$ понимается решение системы (1.22), формально продолженной до $j=n$.

Наконец, первое уравнение системы (1.16) после введения сокращения

$$F_1^{[j]} = Z_1^{[j]} + \sum_{m=2}^6 G_{1m} Y_m^{[j]}$$

принимает вид

$$Y_1^{[j]} = Y_1^{[j-1]} + F_1^{[j-1]} \quad (j=1, 2, \dots, n-1)$$

и позволяет получить выражение

$$Y_1^{[j]} = Y_1^{[0]} + \sum_{m=0}^{j-1} F_1^{[m]} \quad (j=0, 1, 2, \dots, n-1)$$

служащее для вычисления искомых $Y_1^{[j]}$ ($j=1, 2, \dots, n-1$), но лишь после определения $Y_m^{[j]}$ ($m=2, 3, 4, 5, 6; j=0, 1, 2, \dots, n-1$). Постоянную $Y_1^{[0]}$ можно интерпретировать как жесткое смещение подкрепленной оболочки вдоль оси x_1 .

Таким образом исходная дискретная краевая задача (1.16), (1.18), (1.20) шестого порядка редуцирована к задаче (1.22), (1.24) четвертого порядка.

2. Построение общего решения. При построении общего решения как нередуцированной, так и редуцированной краевой задачи можно идти двумя путями.

Один из них опирается на рекуррентный характер систем разрешающих уравнений. Так, очевидные преобразования системы (1.16) приводят к общему решению

$$Y^{[j]} = \Phi^j Y^{[0]} + Y^{[j]*} \quad (j=0, 1, 2, \dots, n) \quad (2.1)$$

где Φ^j — j -я степень матрицы $\Phi = C^{-1}G$, а

$$Y^{[j]*} = \sum_{m=0}^{j-1} \Phi^{j-m-1} C^{-1} Z^{[m]} \quad (2.2)$$

Аналогичные зависимости вытекают и из системы (1.22):

$$X^{[j]} = \Psi^j X^{[0]} + X^{[j]*} \quad (j=0, 1, 2, \dots, n) \quad (2.3)$$

$$X^{[j]*} = \sum_{m=0}^{j-1} \Psi^{j-m-1} S^{-1} F^{[m]}, \quad \Psi = S^{-1}A \quad (2.4)$$

Основные трудности на этом пути состоят в том, что с ростом числа шпангоутов системы краевых условий (см., например, (1.18), (1.20) и (1.24)), служащие для отыскания искомого $Y^{[0]}$ и $X^{[0]}$, становятся плохо обусловленными. Поэтому область эффективного применения решений (2.1) — (2.4) ограничена сравнительно небольшим числом шпангоутов. Ее, однако, можно расширить, если воспользоваться специально созданными для этого приемами (например, методом прогонки [8]) или же просто прибегнуть к вычислениям на ЭВМ с двойной или большей точностью.

Другой путь — построение общего решения системы разрешающих уравнений в аналитическом виде. Для нередуцированной задачи (системы (1.16)) из-за громоздкости выкладок этот путь не оправдан. Поэтому ограничимся нахождением общего аналитического решения системы (1.22). С этой целью рассмотрим отвечающую ей однородную систему

$$SX^{[j]} = AX^{[j-1]} \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (2.5)$$

Ее характеристическое уравнение

$$|\nu S - A| = \nu^4 - 4d_1\nu^3 + (2+4d_2)\nu^2 - 4d_1\nu + 1 = 0 \quad (2.6)$$

$$d_1 = K_1 + 1/4(\eta^* K_2 - \kappa^* K_4), \quad K_s = k_s(\lambda) \quad (s=1, 2, 3, 4)$$

$$d_2 = \chi_1 + 1/4\eta^*\chi_3 + 1/8\kappa^*\chi_4 - 1/32\kappa^*\eta^*(1-\chi_1)$$

$$\chi_1 = 1/2(\operatorname{ch} 2\lambda + \cos 2\lambda), \quad \chi_2 = 1/2(\operatorname{ch} 2\lambda - \cos 2\lambda)$$

$$\chi_3 = 1/2(\operatorname{sh} 2\lambda + \sin 2\lambda), \quad \chi_4 = 1/2(\operatorname{sh} 2\lambda - \sin 2\lambda)$$

относится к уравнениям возвратного типа и потому имеет корни $\nu_\alpha^{\pm 1}$, где

$$\nu_\alpha = d_1 - (-1)^\alpha (d_1^2 - d_2)^{1/2} + \{[d_1 - (-1)^\alpha (d_1^2 - d_2)^{1/2}]^2 - 1\}^{1/2} \quad (\alpha=1, 2) \quad (2.7)$$

При $\nu_1 \neq \nu_2$ ($d_1^2 \neq d_2$) общее решение системы (2.5) запишется таким образом

$$X^{[j]} = c_1 V(\nu_1) \nu_1^j + c_2 V(\nu_1^{-1}) \nu_1^{-j} + c_3 V(\nu_2) \nu_2^j + c_4 V(\nu_2^{-1}) \nu_2^{-j} \quad (2.8)$$

Здесь c_m ($m=1, 2, 3, 4$) — искомые постоянные, а $V(\nu)$ — некая линейная комбинация столбцов или какой-либо столбец матрицы $\Omega(\nu)$, являющейся присоединенной для матрицы $\nu S - A$. Это вытекает непосредственно из определения $\Omega(\nu)$ (I — единичная матрица): $(\nu S - A)\Omega(\nu) = \Omega(\nu)(\nu S - A) = |\nu S - A|I$

Следуя [9], можно показать, что

$$\Omega(v) = v^3 S^{-1} + v^2 (S^{-1} A S^{-1} - 4d_1 S^{-1}) + v (4d_1 A^{-1} - A^{-1} S A^{-1}) - A^{-1}$$

Наиболее просто выглядят третий и четвертый столбцы этой матрицы. Условимся поэтому, например, считать, что

$$\begin{aligned} V_1(v) &= \Omega_{13}(v) = (v^2 - 1) K_3 \\ V_2(v) &= \Omega_{23}(v) = (v^2 - 1) K_2 + v [{}^1/8 \kappa^* (1 - \chi_1) - \chi_3] \\ V_3(v) &= \Omega_{33}(v) = v^5 + v^2 (3K_1 - \kappa^* K_4) + v (1 + 2\chi_1 + {}^1/4 \kappa^* \chi_4) - K_1 \\ V_4(v) &= \Omega_{43}(v) = -v^2 (4K_4 + \kappa^* K_3) - v (2\chi_4 + {}^1/4 \kappa^* \chi_2) - 4K_4 \end{aligned}$$

Переход в формуле (2.8) от постоянных c_m к элементам искомого вектора $X^{[0]}$ позволяет представить общее решение системы (2.5) в таком виде

$$X^{[j]} = K^{[j]} X^{[0]} \quad (j=0, 1, 2, \dots, n), \quad K^{[j]} = S^{-j/2} H^{[j]} S^{j/2}$$

где $S^{\pm j/2}$ — матрицы, получаемые из S заменой η^* и κ^* на $\pm \eta^*/2$ и $\pm \kappa^*/2$, а $H^{[j]}$ — матрица, первые два элемента которой равны

$$H_{11}^{[j]} = \frac{\gamma_2 \operatorname{ch} j\sigma_1 - \gamma_1 \operatorname{ch} j\sigma_2}{\operatorname{ch} \sigma_1 - \operatorname{ch} \sigma_2}, \quad H_{12}^{[j]} = \frac{\omega_2 \operatorname{sh} \sigma_1 \operatorname{sh} j\sigma_1 - \omega_1 \operatorname{sh} \sigma_2 \operatorname{sh} j\sigma_2}{\delta (\operatorname{ch} \sigma_1 - \operatorname{ch} \sigma_2)} \quad (2.9)$$

Остальные элементы матрицы $H^{[j]}$ восстанавливаются по этим элементам в соответствии со следующими правилами. Чтобы получить два других элемента $H_{1,m+2}^{[j]}$ ($m=1, 2$) первой строки $H^{[j]}$, необходимо заменить $\operatorname{ch} j\sigma_\beta$ и $\operatorname{sh} j\sigma_\beta$ в $H_{1m}^{[j]}$ на $\gamma_\beta \operatorname{ch} j\sigma_\beta$ и $\alpha_{3-\beta} \omega_\beta \operatorname{sh} j\sigma_\beta$ ($\beta=1, 2$), после чего умножить полученные результаты соответственно на $K_3/(\gamma_1 \gamma_2)$ и $\omega_1 \omega_2$. Элементы $H_{sq}^{[j]}$ ($s=2, 3, 4$; $q=1, 2, 3, 4$) последующих строк матрицы $H^{[j]}$ образуются из соответствующих элементов $H_{1q}^{[j]}$ первой строки путем замены в них (соответственно для $s=2, 3, 4$) $\operatorname{ch} j\sigma_\beta$ на $\alpha_\beta \operatorname{sh} j\sigma_\beta / \operatorname{sh} \sigma_\beta$, $\gamma_\beta \operatorname{ch} j\sigma_\beta$, $\omega_\beta \operatorname{sh} j\sigma_\beta / \operatorname{sh} \sigma_\beta$, а $\operatorname{sh} j\sigma_\beta$ на $\alpha_\beta \operatorname{ch} j\sigma_\beta / \operatorname{sh} \sigma_\beta$, $\gamma_\beta \operatorname{sh} j\sigma_\beta$, $\omega_\beta \operatorname{ch} j\sigma_\beta / \operatorname{sh} \sigma_\beta$ ($\beta=1, 2$) с последующим делением полученных выражений построчно на $2K_3$, $-K_3$ и $-2K_3$.

В приведенных рассуждениях

$$\begin{aligned} \alpha_\beta &= a_0 + a_1 \operatorname{ch} \sigma_\beta, \quad \omega_\beta = b_0 + b_1 \operatorname{ch} \sigma_\beta \\ \gamma_\beta &= g_0 - \operatorname{ch} \sigma_\beta, \quad \sigma_\beta = \ln v_\beta \quad (\beta=1, 2) \\ a_0 &= -\chi_3 + {}^1/8 \kappa^* (1 - \chi_1), \quad a_1 = 2K_2 \\ b_0 &= 2\chi_4 + {}^1/4 \kappa^* \chi_2, \quad b_1 = 8K_4 + \kappa^* K_3 \\ g_0 &= K_1 - {}^1/2 \kappa^* K_4, \quad \delta = 4\chi_2 + \kappa^* \chi_3 - {}^1/16 \kappa^{*2} (1 - \chi_1) \end{aligned}$$

Искомое общее решение системы (1.22) можно теперь записать таким образом [10]:

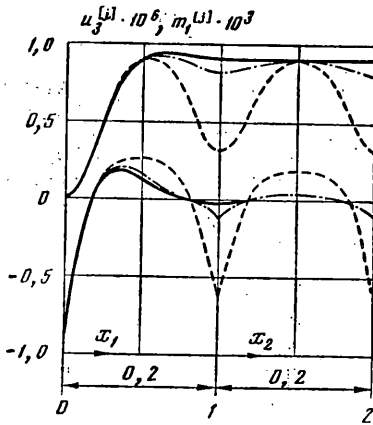
$$X^{[j]} = K^{[j]} X^{[0]} + X^{[j]*} \quad (j=0, 1, 2, \dots, n) \quad (2.10)$$

$$X^{[j]*} = \sum_{m=0}^{j-1} K^{[j-m-1]} S^{-1} F^{[m]} \quad (2.11)$$

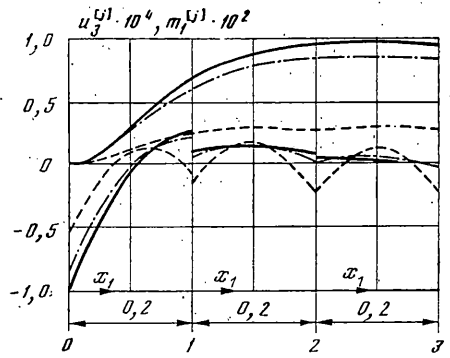
Если корни характеристического уравнения (2.6) окажутся кратными (см. (2.7) при $d_1^2 = d_2$), то, как видно из выражений (2.9) и изложенных за ними правил, все элементы матрицы $H^{[j]}$, а в пересмотре нуждается только она, принимают неопределенные значения 0/0. Отвечающую этому случаю матрицу $H^{[j]}$ проще всего получить путем раскрытия этих неопределенностей с помощью правила Лопитала.

3. Примеры. Проиллюстрируем полученные выше теоретические результаты двумя примерами.

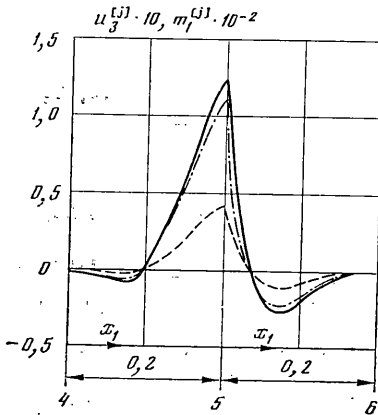
В качестве первого примера рассмотрим защемленную на торцах оболочку с десятью внутренними шпангоутами под действием постоянного внутреннего давления, безразмерное значение которого будем считать равным 1. Полагая $p_3^{[j]} = 1$ ($j=0, 1, 2, \dots, 10$), а остальные внешние воздействия равными нулю, по формулам (1.6),



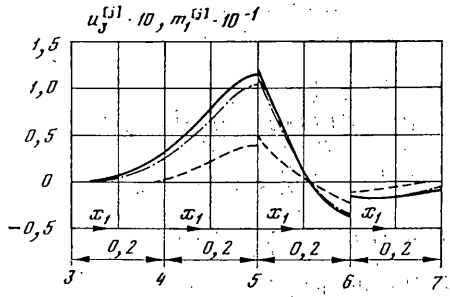
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

(1.7), (1.15), (1.16) находим $f_m^{[j]}(t) = f_m(t)$, $Z_m^{[j]} = Z_m$ ($m=1, 2, \dots, 6$), где

$$f_1(t) = \frac{\mu}{4\beta^4} [t - k_2 t], \quad f_2(t) = 0, \quad f_s(t) = \frac{1}{4\beta^4} [\delta_{3s} - \varepsilon_{s1}(t)]$$

$$Z_1 = \frac{\mu}{4\beta^4} (\lambda - K_2), \quad Z_2 = 0, \quad Z_s = \frac{1}{4\beta^4} (\delta_{3s} - G_{s1})$$

$$(j=0, 1, 2, \dots, 10; \quad s=3, 4, 5, 6)$$

а δ_{ms} — символ Кронекера. Краевые условия на торцах подкрепленной оболочки имеют вид $Y_1^{[s]} = Y_3^{[s]} = Y_4^{[s]} = 0$ ($s=0, 1, 11$).

Некоторые результаты вычислений на ЭВМ (с двойной точностью), полученные с помощью общего решения (2.1), (2.2) и формул (1.1)–(1.3) при $\mu=0,3$, $l=0,2$, $\eta=1$ представлены на фиг. 2, 3, где изображены зависимости $u_3^{[j]}(x_1)$ (верхние кривые) и $m_1^{[j]}(x_1)$ (нижние кривые) в двух левых крайних отсеках ($j=0, 1$; цифрами внизу обозначены номера шпангоутов). Периодическое решение — решение для бесконечной оболочки, в котором (см. (1.16) при $j=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, когда $Z^{[j]} = Z$) $Y^{[j]} = Y = (C-G)^{-1}Z$, реализуется фактически при $h^{-1} = 300$ (фиг. 2) уже в отсеке 1, а при $h^{-1} = 30$ (фиг. 3) — в отсеке 4; сплошные линии соответствуют $\kappa = 1/16$, штрихпунктирные — 1, штриховые — 16.

В качестве второго примера рассмотрим свободную оболочку с одинадцатью, включая крайние, одинаковыми шпангоутами под действием единичной (безразмерной) радиальной нагрузки, приложенной к среднему шпангоуту. Полагая $P_3^{[j]} = \delta_{5j}$, а остальные внешние нагрузки равными нулю, из формул (1.6), (1.7), (1.15), (1.17) устанавливаем $Z_m^{[j]} = \delta_{5m} \delta_{5, j+1} (1 + e_3)$ ($j=0, 1, 2, \dots, 9$; $m=1, 2, \dots, 6$). В силу соотношений (1.18), (1.20), (1.24) $Y_2^{[j]} = 0$ ($j=0, 1, 2, \dots, 10$) и поэтому (см. (1.23)) $F_m^{[j]} = \delta_{5m} \delta_{5, j+1} (1 + e_3)$ ($j=0, 1, 2, \dots, 9$; $m=1, 2, 3, 4$). С учетом этого выражения

$$(2.4), (2.11) \text{ дают } X^{[j]*} = h_{5j} (1 + e_3) \Psi_{.4}^{j-5} = h_{5j} (1 + e_3) K_{.4}^{j-5}$$

Здесь, например, символом $\Psi_{.4}^{j-5}$ обозначен 4-й столбец матрицы Ψ^{j-5} , а под h_{mj} понимается дискретная функция Хевисайда: $h_{mj} = 1$ при $m \geq j$, но $h_{mj} = 0$ при

$m < j$. Что касается краевых условий (1.24), то здесь они принимают вид

$$\eta^* X_2^{[0]} - X_3^{[0]} = 0, \quad \kappa^* X_1^{[0]} + X_4^{[0]} = 0, \quad X_3^{[n]} = X_4^{[n]} = 0$$

Некоторые результаты вычислений при тех же значениях μ , l , κ , η и h представлены на фиг. 4 ($h^{-1} = 300$), 5 ($h^{-1} = 30$), где слева от шпангоута 5 (его плоскость — плоскость симметрии напряженно-деформированного состояния оболочки) изображены зависимости $u_3^{[j]}(x_1)$, а справа — $m_1^{[j]}(x_1)$. Вычисления проводились как по формуле (2.3), так и по формуле (2.10). Оба способа, как и должно быть, привели к одному результату. Он, в свою очередь, совпадает с решением для бесконечной оболочки, в котором, как можно показать,

$$X^{[j]} = (1 + e_3) \sum_{m=0}^3 h_{j-m-3} \Omega_{.4}^{(3-m)} \quad (j=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\Omega^{(3)} = S^{-1}, \quad \Omega^{(2)} = S^{-1} A S^{-1} - 4d_1 S^{-1}$$

$$\Omega^{(1)} = 4d_1 A^{-1} - A^{-1} S A^{-1}, \quad \Omega^{(0)} = -A^{-1}$$

$$h_j = [4(\operatorname{ch} \sigma_1 - \operatorname{ch} \sigma_2)]^{-1} \sum_{\alpha=1}^2 (-1)^\alpha \frac{\lambda_\alpha^{-|j-1|} - 2\lambda_\alpha^{-|j|} \operatorname{ch} \sigma_\alpha}{\operatorname{sh} \sigma_\alpha}$$

Все вычисления на ЭВМ выполнены аспирантом Сильченко Л. Г., за что автор выражает ему искреннюю благодарность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гребень Е. С. Основные соотношения технической теории ребристых оболочек // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 3. С. 124–135.
2. Жилин П. А. Осесимметричная деформация цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами // Инж. ж. МТТ. 1966. № 5. С. 139–142.
3. Жилин П. А. Линейная теория ребристых оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 4. С. 150–163.
4. Образцов И. Ф., Онанов Г. Г. Строительная механика скошенных тонкостенных систем. М.: Машиностроение, 1973. 659 с.
5. Методы расчета оболочек. Т. 2. Амиро И. Я., Заруцкий В. А. Теория ребристых оболочек. Киев: Наук. думка, 1980. 367 с.
6. Михайлов Б. К. Пластины и оболочки с разрывными параметрами. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. 196 с.
7. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 635 с.
8. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. М.: Высш. шк., 1980. 408 с.
9. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 548 с.
10. Математические основы теории автоматического регулирования. Т. 2/Под ред. Б. К. Чемаданова. М.: Высш. шк., 1977. 453 с.

Москва

Поступила в редакцию
2.11.1990