МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1990

УДК 539.3

Б. В. НЕРУБАЙЛО

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ФИЗИЧЕСКИ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

В [1, 9] сформулированы актуальные проблемы расчета тонкостенных конструкций. Среди них – учет различного рода нерегулярностей. Для успешного решения этих проблем рекомендуется сочетание метода конечных элементов, метода декомпозиции, синтеза напряженного состояния. Здесь рассмотрим применение последнего из упомянутых методов к решению задачи об оболочке со свободным краем при нерегулярных (локализованных) силовых и температурных воздействиях. Другие аспекты решения этой проблемы рассмотрены в [2–8] [1].

1. Случай силового воздействия. При использовании полных уравнений теории физически ортотропных упругих тонких оболочек, построенной на основе принятия гипотез Кирхгофа – Лява, задача о действии на оболочку нормальной поверхностной нагрузки $p(\alpha, \beta)$ может быть приведена к следующему разрешающему дифференциальному уравнению относительно функции $\Phi(\alpha, \beta)$ [3]:

$$L\Phi(\alpha, \beta) = R^4 D_1^{-1} p(\alpha, \beta) \tag{1.1}$$

$$L = \frac{\partial^8}{\partial\alpha^8} + a_{6,2}\frac{\partial^8}{\partial\alpha^6\partial\beta^2} + 2\nu_2\frac{\partial^6}{\partial\alpha^6} + a_{4,4}\frac{\partial^8}{\partial\alpha^4\partial\beta^4} + a_{4,2}\frac{\partial^6}{\partial\alpha^4\partial\beta^2} +$$
$$+\lambda\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + a_{2,6}\frac{\partial^8}{\partial\alpha^2\partial\beta^6} + a_{2,4}\frac{\partial^6}{\partial\alpha^2\partial\beta^4} + a_{2,2}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} +$$
$$+\lambda^2\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+1\right)^2 + \frac{1-\nu_1\nu_2}{c^2}\lambda^2\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} \tag{1.2}$$

$$a_{6,2} = \frac{\lambda-\nu_2^2}{\mu_1} + 4\mu_1, \quad a_{4,4} = 2\lambda\left[3 + \frac{\nu_1}{\mu_2}(1-\nu_1\nu_2) - 4\nu_1(\nu_2+\mu_1)\right];$$

$$a_{4,2} = a_{4,4}, \quad a_{2,6} = \lambda a_{6,2}, \quad a_{2,4} = 2\lambda(a_{6,2}-\nu_2)$$

$$a_{2,2} = \lambda\left(\frac{\lambda-\nu_2^2}{\mu_1} - 2\nu_2\right), \quad \lambda = \frac{E_2}{E_1} = \frac{\nu_2}{\nu_1}, \quad c^2 = \frac{h^2}{12R^2}$$

$$\mu_1 = \frac{G}{E_1}(1-\nu_1\nu_2), \quad \mu_2 = \frac{G}{E_2}(1-\nu_1\nu_2), \quad D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}$$

α, β – безразмерные продольная и окружная координаты соответственно; R, h – радиус, толщина оболочки; E_1, E_2 – модули упругости материала оболочки в направлениях α и β соответственно; G – модуль сдвига; ν_1 – коэффициент поперечного сжатия в направлении β при растяжении в направлении α; ν_2 – коэффициент поперечного сжатия в направлении α при растяжении в направлении β.

Перемещения, усилия, изгибающие моменты и другие факторы связаны с функцией $\Phi(\alpha, \beta)$ с помощью дифференциальных соотношений.

---

[1] *И. Ф. Образцов, Б. В. Нерубайло, В. П. Ольшанский.* Оболочки при локализованных воздействиях (обзор работ, основные результаты и направления исследований). М., 1988. 192 с. Деп. ВИНИТИ 12.02.88, № 1222.

Остановимся на рассмотрении полубесконечной оболочки со свободным краем при действии самоуравновешенной системы сил, локально приложенных в зоне свободного края. Прямоугольные области $(2\alpha_0 R\times 2\beta_0 R)$, общим числом k, равномерно расположены вдоль контура оболочки; середины этих областей находятся на расстоянии ξR от края. Начало координат поместим в середину одной из нагруженных областей, а нагрузку представим в виде

$$p(\alpha,\beta)=p_0\theta(\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\theta_n\cos kn\beta$$

$$\theta_n=k\beta_0/\pi \quad (n=0),\quad \theta_n=(2/\pi)\sin kn\beta_0 \quad (n=1,2,3,\ldots) \tag{1.3}$$

p_0, $\theta(\alpha)$ — амплитудное значение нагрузки и безразмерная функция распределения нагрузки вдоль образующей оболочки ($\theta(\alpha)=1$ при $|\alpha|\leqslant\alpha_0$, $\theta(\alpha)=0$ при $|\alpha|>\alpha_0$; $p_0=P(4\alpha_0\beta_0R^2)^{-1}$.

Решение разрешающего уравнения (1.1) ищем в виде

$$\Phi(\alpha,\beta)=\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n(\alpha)\cos kn\beta \tag{1.4}$$

В результате подстановки (1.3), (1.4) в (1.1) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $\Phi_n(\alpha)$:

$$L^{\bullet}\Phi_n(\alpha)=R^4D_1^{-1}\theta_n\theta(\alpha) \tag{1.5}$$

$$L^{\bullet}=\frac{d^8}{d\alpha^8}+(2\nu_2-a_{6,2}k^2n^2)\frac{d^6}{d\alpha^6}+(a_{4,4}k^4n^4-a_{4,2}k^2n^2+\lambda)\frac{d^4}{d\alpha^4}-$$
$$-(a_{2,6}k^6n^6-a_{2,4}k^4n^4+a_{2,2}k^2n^2)\frac{d^2}{d\alpha^2}+\lambda^2k^4n^4(k^2n^2-1)^2+\frac{1-\nu_1\nu_2}{c^2}\lambda\frac{d^4}{d\alpha^4} \tag{1.6}$$

В случае рассматриваемой здесь оболочки решение должно удовлетворять граничным условиям на бесконечности и следующим четырем граничным условиям на свободном крае $\alpha=-\xi$:

$$T_{1n}(-\xi)=S_n(-\xi)=0 \quad \text{(тангенциальные условия)}$$
$$Q_{1n}^*(-\xi)=G_{1n}(-\xi)=0 \quad \text{(нетангенциальные условия)} \tag{1.7}$$

Численная реализация такого решения связана с известными трудностями, которые растут по мере локализации нагрузки. Их удается достаточно легко преодолеть, если применить один из сформулированных в [3] методов синтеза напряженного состояния. При этом в случае рассмотрения физически ортотропных оболочек формулы для номеров гармоник $n=n^-$, $n=n^*$, определяющих границы использования приближенных уравнений, обобщаются [4]. Первое из двух упомянутых значений n найдено из условия минимума асимптотической погрешности, второе — путем прямого сравнения членов дифференциального уравнения (1.5) в предположении о возможности пренебрежения величинами порядка $(h/R)^{1/2}$ по сравнению с единицей при использовании приближенных уравнений теории оболочек. Методы синтеза напряженного состояния при решении краевых задач позволяют разделить краевую задачу на ряд краевых задач для уравнений более низкого порядка и более простой структуры. Один из них приводит к решению уравнений полубезмоментной теории и краевого эффекта (при номерах гармоник $n\leqslant n^*$) и уравнений изгибного состояния (при номерах гармоник $n>n^*$). В соответствии с идеей этого метода при $n\leqslant n^*$ разрешающая функция $\Phi_n(\alpha)$ может быть найдена приближенно $\Phi_n(\alpha)\approx\Phi_n^{\circ}(\alpha)+\Phi_n^{k}(\alpha)$. Здесь $\Phi_n^{\circ}(\alpha)$, $\Phi_n^{k}(\alpha)$ описывают основное состояние и краевой эффект соответственно.

Уравнения для определения $\Phi_n^{\circ}(\alpha)$, $\Phi_n^{k}(\alpha)$ получаются из (1.5) путем соответствующего упрощения оператора $L^{\bullet}$ (1.6).

Разрешающая функция $\Phi_n^\circ(\alpha)$ должна удовлетворять уравнению

$$(d^4/d\alpha^4+4\mu_n^4)\,\Phi_n^\circ(\alpha)=p_0R^2\theta_n\theta(\alpha)/(E_2h)$$

$$4\mu_n^4=c^2\lambda(1-\nu_1\nu_2)^{-1}k^4n^4(k^2n^2-1)^2$$

а также граничным условиям на бесконечности и на свободном крае $\alpha=-\xi$:

$$T_{1n}^\circ(-\xi)=S_n^\circ(-\xi)=0 \qquad (1.8)$$

При этом разрешающая функция основного состояния имеет вид

$$\Phi_n^\circ(\alpha)=c_1^\circ\chi_n(\alpha)+c_2^\circ\zeta_n(\alpha)+\Phi_n^{*\circ}(\alpha)$$

$$\chi_n(\alpha)=\exp(-\mu_n\alpha)\cos\mu_n\alpha,\quad \zeta_n(\alpha)=\exp(-\mu_n\alpha)\sin\mu_n\alpha \qquad (1.9)$$

Частное решение $\Phi_n^{*\circ}(\alpha)$ может быть найдено методом интеграла Фурье

$$\Phi_n^{*\circ}(\alpha)=\frac{P}{\pi^2\alpha_0\beta_0E_2h}\,\frac{\sin kn\beta_0}{n}\int_0^\infty\frac{\sin\alpha_0\omega\cos\alpha\omega}{\omega(\omega^4+4\mu_n^4)}\,d\omega$$

Произвольные постоянные c_1°, c_2° определяются из граничных условий на свободном крае $\alpha=-\xi$, которые имеют вид (1.8).

Рассмотрим краевой эффект в месте приложения нагрузки, называя его «локальным» в отличие от обычного краевого эффекта вблизи края и по аналогии с «точечным» краевым эффектом.

Принимая в качестве разрешающей функции краевого эффекта радиальное перемещение, получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$(d^4/d\alpha^4+4\eta^4)\,w_n^k(\alpha)=D_1^{-1}R^4p_0\theta_n\theta(\alpha) \qquad (1.10)$$

$$4\eta^4=\lambda(1-\nu_1\nu_2)/c^2$$

Решение уравнения (1.10) с учетом условий на бесконечности записывается так

$$w_n^k(\alpha)=c_1^k\chi(\alpha)+c_2^k\zeta(\alpha)+w_n^{*k}(\alpha)$$

$$\chi(\alpha)=\exp(-\eta\alpha)\cos\eta\alpha,\quad \zeta(\alpha)=\exp(-\eta\alpha)\sin\eta\alpha \qquad (1.11)$$

Частное решение уравнения (1.10), найденное по методу интеграла Фурье, определяется формулой

$$w_n^k(\alpha)=\frac{6(1-\nu_1\nu_2)}{\pi^2\alpha_0\beta_0}\left(\frac{R}{h}\right)^3\frac{P}{E_1R}\,\theta_n\int_0^\infty\frac{\sin\alpha_0\omega\cos\alpha\omega}{\omega(\omega^4+4\eta^4)}\,d\omega$$

Произвольные постоянные c_1^k, c_2^k находятся из нетангенциальных граничных условий

$$G_1^k(-\xi)=Q_1^k(-\xi)=0 \qquad (1.12)$$

Невязка в граничных условиях, появляющаяся за счет раздельного наложения тангенциальных и нетангенциальных граничных условий при $n\leqslant n^*$, может быть устранена с помощью краевого эффекта вблизи края $\alpha=-\xi$, построенного следующим образом

$$Ehw_n^k(\alpha^+,\beta)=2\eta[c_1\chi(\alpha^+)-c_2\zeta(\alpha^+)],\quad RT_{2n}^k(\alpha^+,\beta)=-2\eta[c_1\chi(\alpha^+)-c_2\zeta(\alpha^+)]$$

$$\eta G_{1n}^k(\alpha^+,\beta)=-[c_1\zeta(\alpha^+)+c_2\chi(\alpha^+)];\quad (\alpha^+=\alpha+\xi) \qquad (1.13)$$

Произвольные постоянные c_1, c_2 находятся из нетангенциальных граничных условий на свободном крае

$$G_{1n}(-\xi)=G_{1n}^k(-\xi,c_1,c_2)+G_{1n}^\circ(-\xi)=0$$

$$Q_{1n}(-\xi)=Q_{1n}^k(-\xi,c_1,c_2)+Q_{1n}^\circ(-\xi)=0 \qquad (1.14)$$

В (1.14) величины $G_{1n}^{o}(-\xi)$; $Q_{1n}^{o}(-\xi)$ — амплитудные значения продольного изгибающего момента и перерезывающей силы основного состояния при $\alpha=-\xi$.

При $n>n^*$ имеем $\Phi_n(\alpha)\approx\Phi_n^{u}(\alpha)$. Как и в случае краевого эффекта, вместо разрешающей функции введем радиальное перемещение, для которого получаем разрешающее уравнение

$$[d^4/d\alpha^4-2(\nu_2+2\mu_1)k^2n^2d^2/d\alpha^2+\lambda k^4n^4]\,w_n^{v}(\alpha)=D_1^{-1}R^4p_0\theta_n\theta(\alpha)$$

Преобразуем коэффициенты этого уравнения, приняв для модуля сдвига зависимость $G={}^1/_2(E_1E_2)^{1/2}[1+(\nu_1\nu_2)^{1/2}]^{-1}$, тогда получим

$$(d^2/d\alpha^2-\lambda^{1/2}k^2n^2)^2w_n^{u}(\alpha)=D_1^{-1}R^4p_0\theta_n\theta(\alpha) \tag{1.15}$$

Решение уравнения (1.15), учитывая условия на бесконечности, имеет вид

$$w_n^{u}(\alpha)=(c_1^{u}+c_2^{u}\lambda^{1/4}kn\alpha)\exp(-\lambda^{1/4}kn\alpha)+$$
$$+\frac{12(1-\nu_1\nu_2)}{\pi\alpha_0\beta_0}\frac{P}{E_1R}\left(\frac{R}{h}\right)^2\frac{\sin kn\beta_0}{n}\int\limits_0^\infty\frac{\sin\alpha_0\omega\cos\alpha\omega}{\omega(\omega^2+\lambda^{1/2}k^2n^2)^2}d\omega \tag{1.16}$$

Произвольные постоянные c_1^{u}, c_2^{u} определяются из нетангенциальных граничных условий (1.7) при номерах гармоник $n>n^*$.

Зная компоненты напряженного состояния для основного состояния и краевого эффекта (при $n\leqslant n^*$) и изгибного состояния (при $n>n^*$), находим полные значения перемещений, усилий, изгибающих моментов

$$\begin{gathered}
w(\alpha,\beta)\approx w^{o}(\alpha,\beta)+w^{k}(\alpha,\beta)+w^{u}(\alpha,\beta)\\
T_1(\alpha,\beta)\approx T_1^{o}(\alpha,\beta),\quad T_2(\alpha,\beta)\approx T_2^{k}(\alpha,\beta),\quad S(\alpha,\beta)\approx S^{o}(\alpha,\beta)\\
G_1(\alpha,\beta)\approx\nu_1G_2^{o}(\alpha,\beta)+G_1^{k}(\alpha,\beta)+G_1^{u}(\alpha,\beta)\\
G_2(\alpha,\beta)\approx G_2^{o}(\alpha,\beta)+\nu_2G_1^{k}(\alpha,\beta)+G_2^{u}(\alpha,\beta)
\end{gathered} \tag{1.17}$$

Примем, что $\xi\to\infty$, тогда на основании (1.17) для изгибающих моментов находим следующие выражения:

$$G_1(\alpha,\beta)=G_1^{k}(\alpha,\beta)+\nu_1G_2^{o}(\alpha,\beta)+G_1^{u}(\alpha,\beta)$$
$$G_2(\alpha,\beta)=G_2^{o}(\alpha,\beta)+\nu_2G_1^{k}(\alpha,\beta)+G_2^{u}(\alpha,\beta)$$

$$G_1^{k}(\alpha,\beta)=\frac{(h/R)P}{16\alpha_0\beta_0\sqrt{3(1-\nu_1\nu_2)}\lambda}g^{k}(\alpha)\sum_{n=0}^{n^*}\theta_n\cos kn\beta$$

$$G_2^{o}(\alpha,\beta)=\frac{P}{4\pi\alpha_0\beta_0}\sum_{n}^{n^*}\frac{\sin kn\beta_0}{n(k^2n^2-1)}g_n^{o}(\alpha)\cos kn\beta$$

$$G_i^{u}(\alpha,\beta)=\frac{P}{4\pi\alpha_0\beta_0k^2\lambda^{1/2}}\sum_{n^*+1}^{\infty}\frac{\sin kn\beta_0}{n^3}g_{in}^{u}(\alpha)\cos kn\beta\qquad(i=1,2)$$

$$g^{k}(\alpha)=\zeta(\alpha_0-|\alpha|)+\zeta(\alpha_0+|\alpha|)\qquad(|\alpha|\leqslant\alpha_0)$$
$$g^{k}(\alpha)=\zeta(|\alpha|+\alpha_0)-\zeta(|\alpha|-\alpha_0)\qquad(|\alpha|>\alpha_0)$$
$$g_n^{o}(\alpha)=2-\chi_n(\alpha_0-|\alpha|)-\chi_n(\alpha_0+|\alpha|)\qquad(|\alpha|\leqslant\alpha_0)$$
$$g_n^{o}(\alpha)=\chi_n(|\alpha|-\alpha_0)-\chi_n(|\alpha|+\alpha_0)\qquad(|\alpha|>\alpha_0)$$
$$g_{1n}^{u}(\alpha)=2\nu-{}^1/_2[2\nu-(1-\nu)n_+(\alpha_0-|\alpha|)]e^{-n_+(\alpha_0-|\alpha|)}-$$
$$-{}^1/_2[2\nu-(1-\nu)n_+(\alpha_0+|\alpha|)]e^{-n_+(\alpha_0+|\alpha|)}\qquad(|\alpha|\leqslant\alpha_0)$$

$$g_{1n}{}^u(\alpha)=-{}^1/_2[2\nu-(1-\nu)n_+(|\alpha|+\alpha_0)]e^{-n_+(|\alpha|+\alpha_0)}+$$
$$+{}^1/_2[2\nu-(1-\nu)n_+(|\alpha|-\alpha_0)]e^{-n_+(|\alpha|-\alpha_0)}\qquad(|\alpha|>\alpha_0)$$
$$g_{2n}{}^u(\alpha)=2-{}^1/_2[2+(1-\nu)n_+(\alpha_0-|\alpha|)]e^{-n_+(\alpha_0-|\alpha|)}-$$
$$-{}^1/_2[2+(1-\nu)[n_+(\alpha_0+|\alpha|)]e^{-n_+(\alpha_0|\alpha|)}\qquad(|\alpha|\leqslant\alpha_0)$$
$$g_{2n}{}^u(\alpha)={}^1/_2[2+(1-\nu)n_+(|\alpha|-\alpha_0)]e^{-n_+(|\alpha|-\alpha_0)}-$$
$$-{}^1/_2[2+(1-\nu)n_+(|\alpha|+\alpha_0)]e^{-n_+(|\alpha|+\alpha_0)}\qquad(|\alpha|>\alpha_0)$$
$$\nu=(\nu_1\nu_2)^{1/2},\quad n_+=\lambda^{1/4}kn$$

В частном случае приложения нагрузки по линиям контура ($\alpha_0=0$) получаем следующие зависимости

$$G_1{}^k(\alpha,\beta)=\frac{P(h/R)^{1/2}}{8\beta_0\sqrt[4]{3(1-\nu_1\nu_2)}\lambda}g^k(\alpha)\sum_{n=0}^{n^*}\theta_n\cos kn\beta$$

$$G_2{}^o(\alpha,\beta)=\frac{Pk\lambda^{1/4}(h/R)^{1/2}}{4\pi\beta_0\sqrt[4]{3(1-\nu_1\nu_2)}}\sum_{n}^{n^*}\frac{\sin kn\beta_0}{(k^2n^2-1)^{1/2}}g_n{}^o(\alpha)\cos kn\beta$$

$$G_{in}{}^u(\alpha,\beta)=\frac{P\lambda^{1/4}}{4\pi k\beta_0}\sum_{n^*+1}^{\infty}\frac{\sin kn\beta_0}{n^2}g_{in}{}^u(\alpha)\cos kn\beta$$

$$g^k(\alpha)=\chi(|\alpha|)-\zeta(|\alpha|),\qquad g_n{}^o(\alpha)=\chi_n(|\alpha|)+\zeta_n(|\alpha|)$$
$$g_{1n}{}^u(\alpha)=[1+\nu-(1-\nu)n_+(|\alpha|)]e^{-n_+(|\alpha|)}$$
$$g_{2n}{}^u(\alpha)=[1+\nu+(1-\nu)n_+(|\alpha|)]e^{-n_+(|\alpha|)}$$

При $\alpha=0$ последние слагаемые в моментах могут быть записаны через табулированные ряды, что существенно снижает и без того незначительный объем вычислений, необходимый для получения информации о напряженном состоянии.

Представляют наибольший интерес два отличные друг от друга случая нагружения оболочки: действие силы, близкой к сосредоточенной и распределенной на достаточно больших отрезках, для которых параметр $\beta_0\sim(h/R)^{1/2}$. В первом случае наиболее мощным является изгибное состояние, определяемое изгибающими моментами

$$\begin{gathered}G_1(\alpha,\beta)\approx G_1{}^u(\alpha,\beta)=\frac{P}{4\pi\lambda^{1/4}}\sum_n^{\infty}\frac{\cos kn\beta}{n}\{1+(\nu_1\nu_2)^{1/2}-\\-[1-(\nu_1\nu_2)^{1/2}]n_+|\alpha|\}e^{-n_+|\alpha|}\\G_2(\alpha,\beta)\approx G_2{}^u(\alpha,\beta)=\frac{P}{4\pi\lambda^{-1/4}}\sum_n^{\infty}\frac{\cos kn\beta}{n}\{1+(\nu_1\nu_2)^{1/2}+\\+[1-(\nu_1\nu_2)^{1/2}]n_+|\alpha|\}e^{-n_+|\alpha|}\end{gathered}\tag{1.18}$$

Из приведенных выражений (1.18) могут быть получены асимптотические формулы, описывающие поведение моментов в окрестности точки $\beta\to0$.

Во втором случае напряженное состояние определяется решением для основного состояния и простого краевого эффекта. Если ввести допущение $k^2n^2-1\approx k^2n^2$ и принять $n^*\to\infty$, тогда максимальные значения изгибающих моментов могут быть преобразованы к следующим конечным формулам

$$G_1(0, 0)=P[\pi+\nu_1(\pi-k\beta_0)(E_2/E_1)^{1/2}](h/R)^{1/2}(8\pi\beta_0)^{-1}[3(1-\nu_1\nu_2)E_2/E_1]^{-1/4}$$
$$G_2(0, 0)=P[\pi\nu_2+(\pi-k\beta_0)(E_2/E_1)^{1/2}](h/R)^{1/2}(8\pi\beta_0)^{-1}[3(1-\nu_1\nu_2)E_2/E_1]^{-1/4} \quad (1.19)$$

Хорошее совпадение результатов, полученных по формулам (1.19), и по общей теории оболочек, имеет место при длинах нагруженных отрезков, удовлетворяющих условию $s_0 \geqslant 2(Rh)^{1/2}$.

2. Случай теплового воздействия. Рассмотрим краевую задачу для оболочки со свободным краем при появлении в зоне свободного края температурного поля, возникшего в какой-то момент времени. Тогда при температурном поле $t(\alpha, \beta)$, произвольно распределенном по оболочке и постоянном по ее толщине, термоупругая задача может быть приведена к решению следующего разрешающего уравнения [3]:

$$L\Phi(\alpha, \beta)=(\alpha_{2t}+\nu_1\alpha_{1t})Rc^{-2}t(\alpha, \beta) \quad (2.1)$$

в котором оператор L определяется соотношением (1.2); α_{1t}, α_{2t} — коэффициенты линейного температурного расширения в направлениях α и β соответственно.

Перемещения, усилия, изгибающие моменты выражаются через разрешающую функцию $\Phi(\alpha, \beta)$ с помощью соответствующих дифференциальных зависимостей.

Пусть температурное поле имеет две плоскости симметрии. Поместим начало координат на пересечении этих плоскостей, расположенном на расстоянии ξR от свободного края оболочки, а температурное поле представим в виде разложения

$$t(\alpha, \beta)=t_0\theta(\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\theta_n\cos n\beta \quad (2.2)$$

в котором t_0 — амплитудное значение температуры; θ_n — коэффициент ряда Фурье.

Представим решение разрешающего уравнения (2.1) в виде (1.4), тогда для $\Phi_n(\alpha)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$L^{\cdot}\Phi_n(\alpha)=(\alpha_{2t}+\nu_1\alpha_{1t})c^{-2}Rt_0\theta_n\theta(\alpha) \quad (2.3)$$

в котором оператор $L^{\cdot}$ определяется на основании (1.6), если положить $k=1$.

Решение поставленной задачи должно удовлетворять условиям на бесконечности и граничным условиям на свободном крае $\alpha=-\xi$.

Как и в случае силовой задачи, рассмотренной в п. 1, будем строить решение на основе приближенных уравнений применяя метод синтеза напряженного состояния, в соответствии с которым функция $\Phi_n(\alpha)$ находится приближенно в зависимости от номера гармоник n:

$$\Phi_n(\alpha)\approx\Phi_n^{o}(\alpha)+\Phi_n^{k}(\alpha) \quad (n\leqslant n^*), \quad \Phi_n(\alpha)\approx\Phi_n^{\tau}(\alpha) \quad (n>n^*) \quad (2.4)$$

Здесь функции $\Phi_n^{o}(\alpha)$, $\Phi_n^{k}(\alpha)$, $\Phi_n^{\tau}(\alpha)$ описывают основное состояние (o), краевой эффект (k), и тангенциальное состояние (τ) соответственно.

Для функции $\Phi_n^{o}(\alpha)$ вместо (2.3) имеет место уравнение

$$(d^4/d\alpha^4+4\mu_n^4)\Phi_n^{o}(\alpha)=(\alpha_{2t}+\nu_1\alpha_{1t})\lambda^{-1}(1-\nu_1\nu_2)^{-1}\times$$
$$\times Rt_0\theta_n\theta(\alpha), \quad 4\mu_n^4=c^2\lambda(1-\nu_1\nu_2)^{-1}n^4(n^2-1)^2 \quad (2.5)$$

решение которого складывается из решения однородного уравнения ($t_0=0$) и частного решения, полученного путем применения к (2.5) преобразования Фурье

$$\Phi_n^{\circ}(\alpha)=c_1^{\circ}\chi_n()\alpha+c_2^{\circ}\zeta_n(\alpha)+(2\pi\lambda)^{-1}(1-\nu_1\nu_2)^{-1}(\alpha_{2t}+\nu_1\alpha_{1t})\times$$

$$\times Rt_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega\alpha}}{\omega^4+4\mu_n^4} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(\alpha) e^{i\omega\alpha} d\alpha \tag{2.6}$$

Входящие в (2.6) функции $\chi_n(\alpha)$, $\zeta_n(\alpha)$ заданы формулами (1.9), а произвольные постоянные c_1°, c_2° определяются из граничных условий (1.8) на свободном крае.

Для разрешающей функции краевого эффекта, за которую принимаем радиальное перемещение, имеем дифференциальное уравнение

$$\begin{gathered}(d^4/d\alpha^4+4\eta^4)\, w_n^k(\alpha) = -(\lambda-\nu_2\vartheta)(\alpha_{2t}+\nu_1\alpha_{1t})\, c^{-2} R t_0 \theta_n \theta(\alpha) \\ \vartheta = (\alpha_{1t}+\nu_2\alpha_{2t})/(\alpha_{2t}+\nu_1\alpha_{1t}), \quad 4\eta^4 = \lambda(1-\nu_1\nu_2)/c^2\end{gathered} \tag{2.7}$$

Решение уравнения (2.7) с учетом граничных условий на бесконечности запишем в таком виде

$$\begin{gathered}w_n^k(\alpha) = c_1^k \chi(\alpha) + c_2^k \zeta(\alpha) - (2\pi c^2)^{-1} (\lambda-\nu_2\vartheta)(\alpha_{2t}+\vartheta_1\alpha_{1t}) \times \\ \times Rt_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega\alpha}}{\omega^4+4\eta^4} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(\alpha) e^{i\omega\alpha} d\alpha\end{gathered} \tag{2.8}$$

Функции $\chi(\alpha)$, $\zeta(\alpha)$ имеют прежний смысл (1.11), а произвольные постоянные c_1^k, c_2^k определяются из граничных условий (1.12) на свободном крае оболочки $\alpha=-\xi$.

Невязка в граничных условиях, появляющаяся за счет раздельного наложения тангенциальных и нетангенциальных граничных условий устраняется с помощью краевого эффекта вблизи края $\alpha=-\xi$ на основе соотношений (1.13), (1.14), как и в случае силовой задачи.

При номерах гармоник $n>n^*$ имеет место тангенциальное состояние, при котором $\Phi_n(\alpha) \approx \Phi_n^{\tau}(\alpha)$.

Для разрешающей функции $\Phi_n^{\tau}(\alpha)$ получаем дифференциальное уравнение

$$\left[\frac{d^4}{d\alpha^4} - \left(\frac{\lambda-\nu_2^2}{\mu_1} - 2\nu_2\right) n^2 \frac{d^2}{d\alpha^2} + \lambda n^4\right] \Phi_n^{\tau}(\alpha) = (\alpha_{2t}+\nu_1\alpha_{1t}) R t_0 \theta_n \theta(\alpha) \tag{2.9}$$

Решение уравнения (2.9), предварительно преобразованного, как и в случае силового нагружения, с учетом условий на бесконечности имеет вид

$$\begin{gathered}\Phi_n^{\tau}(\alpha) = (c_1^{\tau} + c_2^{\tau} \lambda^{1/4} n\alpha) \exp(-\lambda^{1/4} n\alpha) + \\ + \frac{\alpha_{2t}+\nu_1\alpha_{1t}}{2\pi} \theta_n R t_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega\alpha}}{(\omega^2+\lambda^{1/2} n^2)^2} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(\alpha) e^{i\omega\alpha} d\alpha\end{gathered}$$

Произвольные постоянные c_1^{τ}, c_2^{τ} определяются из тангенциальных граничных условий на свободном крае $\alpha=-\xi$: $T_{1n}(-\xi)=S_n(-\xi)=0$, $(n>n^*)$.

Теперь, когда построены разрешающие функции для каждого элементарного состояния (2.4), нетрудно получить выражения для искомых перемещений, усилий, изгибающих моментов — вначале для основного состояния, краевого эффекта, тангенциального состояния отдельно, а затем полные выражения, принимая во внимание, что они приближенно равны следующим суммам:

$$\begin{gathered}w(\alpha,\beta) \approx w^{\circ}(\alpha,\beta) + w^k(\alpha,\beta); \quad T_1(\alpha,\beta) \approx T_1^{\circ}(\alpha,\beta) + \\ + T_1^{\tau}(\alpha,\beta) - T_{1t}(\alpha,\beta); \quad T_2(\alpha,\beta) \approx T_2^k(\alpha,\beta) + T_2^{\tau}(\alpha,\beta) - T_{2t}(\alpha,\beta); \\ G_1(\alpha,\beta) \approx \nu_2 G_1^{\circ}(\alpha,\beta) + G_1^k(\alpha,\beta); \quad G_2(\alpha,\beta) \approx G_2^{\circ}(\alpha,\beta) + \nu_2 G_1^k(\alpha,\beta); \\ T_{1t}(\alpha,\beta) = E_1 h (1-\nu_1\nu_2)^{-1} (\alpha_{1t}+\nu_2\alpha_{2t}) t(\alpha,\beta); \\ T_{2t}(\alpha,\beta) = E_2 h (1-\nu_1\nu_2)^{-1} (\alpha_{2t}+\nu_1\alpha_{1t}) t(\alpha,\beta)\end{gathered}$$

Для искомых факторов получаются достаточно легко реализуемые аналитические выражения, справедливые при наперед заданном температурном поле $t(\alpha, \beta)$.

Рассмотрим пример конкретного температурного поля — сильно локализованного, а именно, кусочно-постоянного как вызывающего наибольшие вычислительные трудности, но в то же время позволяющего наиболее наглядно раскрыть сущность применяемого метода. Для этого температурного поля $\theta(\alpha)=1$ $(|\alpha|\leqslant\alpha_0)$; $\theta(\alpha)=0$ $(\alpha>\alpha_0)$; $\theta_n=\beta_0/\pi$ $(n=0)$; $\theta_n=(2/\pi n)\sin n\beta_0$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$.

Тогда (при $\xi\to\infty$) для продольного усилия получим выражение

$$\left(\frac{\alpha_{2t}+\nu_1\alpha_{1t}}{1-\nu_1\nu_2}E_2ht_0\right)^{-1}T_1(\alpha,\beta)=\frac{1}{\pi}\frac{\vartheta}{\lambda}\sum_{n=2}^{n^*}\frac{1}{n}t_{1n}(\alpha)\sin n\beta_0\cos n\beta+$$

$$+\frac{1}{\pi\lambda}\sum_{n^*+1}^{\infty}\frac{1}{n}t_{1n}^*(\alpha)\sin n\beta_0\cos n\beta-$$

$$-\frac{4}{\pi^2}\frac{\vartheta}{\lambda}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\beta_0\cos n\beta\int_0^{\infty}\frac{1}{\omega}\sin\alpha_0\omega\cos\alpha\omega\,d\omega$$

$$t_{1n}(\alpha)=\chi_n(\alpha_0-|\alpha|)+\chi_n(\alpha_0+|\alpha|),\quad t_{1n}^*(\alpha)=2\nu_2+$$

$$+[\vartheta-\nu_2+{}^1/_2m\lambda^{1/4}n(\alpha_0+|\alpha|)]e^{-\lambda^{1/4}n(\alpha_0+|\alpha|)}+$$

$$+[\vartheta-\nu_2+{}^1/_2m\lambda^{1/4}n(\alpha_0-|\alpha|)]e^{-\lambda^{1/4}n(\alpha_0-|\alpha|)}$$

$$(|\alpha|\leqslant\alpha_0),\quad t_{1n}(\alpha)=\chi_n(|\alpha|+\alpha_0)-\chi_n(|\alpha|-\alpha_0)$$

$$t_{1n}^*(\alpha)=[\vartheta-\nu_2+{}^1/_2m\lambda^{1/4}n(|\alpha|+\alpha_0)]e^{-\lambda^{1/4}n(|\alpha|+\alpha_0)}-$$

$$-[\vartheta-\nu_2+{}^1/_2m\lambda^{1/4}n(|\alpha|-\alpha_0)]e^{-\lambda^{1/4}n(|\alpha|-\alpha_0)}$$

$$(|\alpha|>\alpha_0),\quad m=\vartheta-\nu_2-(\lambda-\nu_2\vartheta)\lambda^{-1/2}$$

В аналогичной форме могут быть записаны другие искомые факторы. Входящие в них бесконечные ряды обладают замечательным свойством — они допускают представление в замкнутом виде, что позволяет свести процедуру получения числовой информации о напряженном состоянии оболочки к вычислению элементарных, как правило, табулированных функций и рядов с конечным верхним пределом суммирования $n=n^*$ [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Образцов И. Ф.* Некоторые перспективы развития теории пластин и оболочек с позиций проектирования конструкций современных летательных аппаратов // Тр. 9-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Л.: Судостроение, 1975. С. 6–12.
2. *Образцов И. Ф., Нерубайло Б. В.* О методах синтеза напряженного состояния в теории оболочек // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269. № 1. С. 54–56.
3. *Образцов И. Ф., Нерубайло Б. В.* Об одной термосиловой аналогии в теории оболочек // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277. № 2. С. 327–331.
4. *Образцов И. Ф., Нерубайло Б. В.* Об одном классе решений краевых задач для термоупругих анизотропных оболочек // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291. № 2. С. 306–309.
5. *Нерубайло Б. В., Образцов И. Ф., Ольшанский В. П.* Определение локальных напряжений в цилиндрической оболочке, нагруженной по круговой площадке // ПМТФ. 1986. № 6. С. 160–164.
6. *Нерубайло Б. В., Образцов И. Ф., Ольшанский В. П.* Пологая оболочка под действием нормальной локальной нагрузки (асимптотические результаты) // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 6. С. 156–159.
7. *Образцов И. Ф., Нерубайло Б. В., Ольшанский В. П.* Метод двумерных отображений в локальных задачах прочности оболочек // Докл. АН СССР. 1987. Т. 295. № 1. С. 56–59.
8. *Образцов И. Ф., Нерубайло Б. В., Иванов А. И.* Исследование оболочек вращения при локализованных силовых и температурных воздействиях // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение. 1989. Вып. 29. С. 243–262.
9. *Образцов И. Ф.* Современные проблемы создания сложных инженерных конструкций // Научные основы прогрессивной технологии. М.: Машиностроение. 1982. С. 52–96.

Москва

Поступила в редакцию 16.I.1990