МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1990

УДК 539.375

О. А. БУХАРИН, Л. В. НИКИТИН

МЕДЛЕННЫЙ РОСТ ТРЕЩИН В ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЕ

Для описания длительного квазистатического разрушения в твердых телах необходимо учитывать их свойства вязкости. Рост трещины в вязкоупругом теле изучался во многих работах. Решение проблемы в [1, 2] опирается на энергетический подход Гриффитса. Критерии разрушения, предписывающие некоторому параметру критическое значение в окрестности вершины трещины, использовались в [3–6]. В большинстве упомянутых работ решение задачи сводится к сложным уравнениям, для которых возможно только численное решение. В данной работе используется критерий разрушения, предложенный Си [7]. Он позволяет избежать математические сложности и дает хорошее соответствие теоретических и экспериментальных результатов.

Критерий Си утверждает, что разрушение в упругом материале происходит, когда минимум интенсивности S плотности энергии деформаций W в окрестности вершины трещины достигает критического значения S_{cr}, представляющего собой характеристику трещиностойкости материала

$$\min S(\theta)=S_{cr},\quad S=\lim_{r\to 0} rW,\quad W={}^1/_2\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \tag{1}$$

где σ_{ij} и ε_{ij} напряжения и деформации; r, θ — полярные координаты с началом в вершине трещины.

Модифицируем критерий Си для применения к задачам вязкоупругости. Определяющий закон для линейно-вязкоупругого тела имеет вид

$$\sigma_{ij}=\int_0^t C_{ijkl}(t-\tau)\,d\varepsilon_{kl}\equiv\mathbf{C}_{ijkl}[\varepsilon_{kl}] \tag{2}$$

где $C_{ijkl}(t)$ и $\mathbf{C}_{ijkl}$ ядро и оператор ползучести соответственно. Разобьем малые деформации ε_{ij} на две части: мгновенноупругую ε_{ij}^e и вязкую ε_{ij}^v, так что определяющие уравнения в напряжениях будут

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}^e+\varepsilon_{ij}^v=\int_0^t J_{ijkl}(t-\tau)\,d\sigma_{kl}\equiv\mathbf{J}_{ijkl}[\sigma_{kl}]$$

$$\varepsilon_{ij}^e=\overset{0}{J}_{ijkl}\sigma_{kl}(t),\quad \varepsilon_{ij}^v=\int_0^t \dot{J}_{ijkl}(t-\tau)\sigma_{kl}(\tau)\,d\tau$$

Здесь оператор податливости $\mathbf{J}_{ijkl}$ является обратным к $\mathbf{C}_{ijkl}$, $J_{ijkl}(t)$ — соответствующее ядро податливости, $J^0_{ijkl}=J_{ijkl}(0)$. В вязкоупругом теле запасаемой энергией деформаций является свободная энергия. Для линейных определяющих соотношений она может быть представлена в виде квадратичной формы от ε_{ij}^e и ε_{ij}^v:

$$W={}^1/_2\overset{0}{C}_{ijkl}\varepsilon_{ij}^e\varepsilon_{kl}^e+\overset{1}{C}_{ijkl}\varepsilon_{ij}^e\varepsilon_{kl}^v+\overset{2}{C}_{ijkl}\varepsilon_{ij}^v\varepsilon_{ij}^v. \tag{3}$$

Можно показать, что C^0_{ijkl} — тензор мгновенных модулей $C_{ijkl}(0)$, а $\overset{1}{C}_{ijkl}$ и $\overset{2}{C}_{ijkl}$ выражаются через мгновенно упругие C^0_{ijkl} и длительные

$C_{ijkl}(\infty)$ модули. Модифицированный критерий Си примем в прежней форме (1), с той лишь разницей, что W будет теперь плотностью свободной энергии (3).

Для изотропного упруго сжимаемого линейно вязкоупругого тела определяющие уравнения для девиаторных и изотропных компонент деформаций будут

$$e_{ij}=s_{ij}/(2\mu_0)+\int_0^t J^{\cdot}(t-\tau)s_{ij}(\tau)\,d\tau,$$

$$e=p/K_0,\quad K_0=2\mu_0(1+\nu_0)/(1-2\nu_0) \tag{4}$$

$$e_{ij}=\varepsilon_{ij}-e\delta_{ij},\quad e={}^1/_3\varepsilon_{kk},\quad s_{ij}=\sigma_{ij}-p\delta_{ij},\quad p={}^1/_3\sigma_{kk},$$

где μ_0 и ν_0 — мгновенные модули сдвига и коэффициент Пуассона, K_0 — модуль объемного сжатия. Можно показать, что в этом случае плотность свободной энергии примет вид

$$W={}^3/_2K_0e^2+\mu_0e_{ij}{}^e e_{ij}{}^e+\mu_v e_{ij}{}^v e_{ij}{}^v,\quad \mu_v=(J(\infty)-J(0))^{-1} \tag{5}$$

В качестве примера рассмотрим классическую задачу Гриффитса об изолированной трещине с начальной длиной $2l_0$, содержащейся в неограниченной плоскости, которая в момент $t=0$ начинает на бесконечности растягиваться нормальным к направлению трещины напряжением σ, в дальнейшем поддерживаемым постоянным. Поместим начало координатной системы x_1x_2 в середине трещины и направим ось x_1 вдоль трещины. Для растущей трещины справедлив принцип соответствия между решениями задач упругости и вязкоупругости, так что решение задачи для напряжений и деформаций является известным. Вследствие симметрии трещина будет распространяться вдоль оси x_1. Поэтому в дальнейшем потребуются только компоненты напряжений при $\theta=0$, $r\to0$:

$$s_{11}=s_{22}={}^1/_3(1-2\boldsymbol{\nu})\,[K_1(2\pi r)^{-1/2}] \tag{6}$$

$$s_{33}=-{}^2/_3(1-\boldsymbol{\nu})\,[K_1(2\pi r)^{-1/2}],\quad p={}^2/_3(1+\boldsymbol{\nu})\,[K_1(2\pi r)^{-1/2}]$$

где $K_1=\sigma(\pi l)^{1/2}$ — коэффициент интенсивности напряжений. Операторный коэффициент Пуассона $\boldsymbol{\nu}$ является оператором того же типа, что и (2):

$$\boldsymbol{\nu}[f]=\nu_0f(t)+\int_0^t \nu_1^{\cdot}(t-\tau)f(\tau)\,d\tau$$

где ядро $\nu_1(t)$ — линейная функция резольвенты ядра $J(t)$.

Используя (4), (5) и (6) получим для свободной энергии

$$W=\frac{\sigma^2}{2\mu_0}\left(\frac{1-2\nu_0}{2}\,\frac{l}{x_1-l}+\frac{1}{1+\nu_0}\left(1+\frac{3\mu_v}{2\mu_0(1+\nu_0)}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\int_0^t \nu_1^{\cdot}(t-\tau)\frac{l^{1/2}(\tau)\,d\tau}{(x_1-l(\tau))^{1/2}}\right)^2\right) \tag{7}$$

Можно показать, что для движущейся трещины интеграл в (7) ограничен. В этом случае минимум интенсивности плотности свободной энергии достигается при $\theta=0$ и равен $S(0)=(1-2\nu_0)\sigma^2l/(4\mu_0)$.

Если при $t=0$, когда $l=l_0$, интенсивность $S(0)>S_{cr}$, трещина окажется перегруженной и будет расти неограниченно. Если при $t=0$ интенсивность $S(0)<S_{cr}$, трещина сначала остается неподвижной. При этом интенсивность плотности энергии будет

$$S(0)=\frac{\sigma^2l_0}{2\mu_0}\left(\frac{1-2\nu_0}{2}+\frac{1}{1+\nu_0}\left(1+\frac{3\mu_v}{2\mu_0(1+\nu_0)}\right)\nu_1^2(t)\right) \tag{8}$$

В общем случае существуют предельное σ^* и безопасное σ_* напряжения

$$\sigma^*=\left(\frac{4\mu_0S_{cr}}{l_0(1-2\nu_0)}\right)^{1/2},\quad \sigma_*=\left(\frac{\mu_0S_{cr}}{l_0}\left(\frac{1-2\nu_0}{2}+\right.\right.$$

$$+\frac{1}{1+\nu_0}\left(1+\frac{3\mu_v}{2\mu_0(1+\nu_0)}\nu_1^2(\infty)\right)^{-1}\Bigg)^{1/2}$$

При $\sigma<\sigma_*$ разрушение не произойдет никогда. При $\sigma>\sigma^*$ трещина начнет двигаться в момент $t=0$. При $\sigma_*<\sigma<\sigma^*$ имеет место латентное разрушение и трещина начинает расти в момент времени t_d. Время задержки разрушения t_d определяется из (8), где необходимо подставить $S(0)=S_{cr}$.

В частности, для широко используемого на практике ядра Абеля $\nu_1^{\cdot}(t)=Bt^{\alpha-1}$, $B>0$, $0<\alpha<1$ получим для времени задержки разрушения

$$t_d=\left(\frac{(4\mu_0S_{cr}/\sigma^2l-(1-2\nu_0))(1+\nu_0)}{(2+3\mu_v/\mu_0(1+\nu_0))}\frac{\alpha^2}{B^2}\right)^{1/(2\alpha)}$$

Аналогично для экспоненциального ядра

$$\nu_1^{\cdot}(t)=B\exp(-\alpha t),\quad B>0,\quad \alpha>0$$

$$t_d^e=-\frac{1}{\alpha}\ln\left(1-\frac{\alpha}{B}\left(\frac{(4\mu_0S_{cr}/\sigma^2l-(1-2\nu_0))(1+\nu_0)}{(2+3\mu_v/\mu_0(1+\nu_0))}\right)^{1/2}\right)$$

и для ядра Работнова [8]:

$$\nu_1^{\cdot}(t)=BG_\alpha(-\beta,t),\quad B>0,\quad \beta>0,\quad -1<\alpha<0$$

$$t_d^R=\left(-\frac{1}{\gamma\beta}\ln\left(1-\left(\frac{(4\mu_0S_{cr}/\sigma^2l-(1-2\nu_0))(1+\nu_0)}{(2+3\mu_v/\mu_0(1+\nu_0))}\right)^{1/2}\frac{\beta}{B}\right)\right)^{1/(1+\alpha)}$$

$$\gamma=(1+\alpha)^{1+\alpha}$$

Принятый критерий, в отличие от критериев Гриффитса [9] и Леонова — Панасюка [10], используемых для изучения роста трещины в вязкоупругих средах [2, 4], дает для тела типа Максвелла ($\mu_v=0$) ненулевое безоспасное напряжение $\sigma_*=(8\mu_0S_{cr}(1+\nu_0)/3l_0(1-2\nu_0))^{1/2}$.

Для тела типа Кельвина $1/K_0=1/\mu_0=0$ и поэтому не существует связи между ядрами операторов $J(t)$ и $\nu_1(t)$. Плотность свободной энергии в этом случае можно записать в виде

$$W=\frac{\mu_v}{3}\sigma^2\left(\int_0^t J^{\cdot}(t-\tau)\left(\frac{l^{1/2}(\tau)}{(x_1-l(\tau))^{1/2}}-2\int_0^\tau\nu_1^{\cdot}(\tau-\xi)\frac{l^{1/2}(\xi)d\xi}{(x_1-l(\xi))^{1/2}}\right)d\tau\right)^2.$$

Ядра $J(t)$ и $\nu_1(t)$ имеют одинаковую структуру и поэтому можно ввести функцию $M(t)$ — ядро композиции $(1-2\boldsymbol{\nu})/\boldsymbol{\mu}$. Тогда

$$W=\frac{\mu_v}{3}\sigma^2\left(\int_0^t M^{\cdot}(t-\tau)\frac{l^{1/2}(\tau)d\tau}{(x_1-l(\tau))^{1/2}}\right)^2$$

и для интенсивности плотности свободной энергии получим

$$S(0)={}^1/_3\mu_v\sigma^2l_0(M(t)-M(0))^2$$

Отсюда видно, что тело типа Кельвина никогда не разрушается в момент приложения нагрузки, однако безопасное напряжение для него существует

$$\sigma_*=(3S_{cr}/\mu_vl_0)^{1/2}(M(\infty)-M(0))^{-1}$$

Интересно выяснить влияние вязкости на поведение устойчивой трещины. Примером устойчивой трещины является та же, что и рассмотренная выше, но нагруженная парой сосредоточенных сил F, которые прикладываются в момент $t=0$ в центре трещины в противоположных друг другу направлениях по нормали к поверхности трещины. В этом случае асимптотические решения для необходимых в дальнейшем величин имеют по-прежнему вид (7) с коэффициентом интенсивности напряжений $K_1=F(\pi/l)^{1/2}$. Для плотности свободной энергии из (5) с помощью

(6) получим

$$W=\frac{F^2}{2\mu_0}\left(\frac{1-2\nu_0}{2}\frac{1}{l(x_1-l)}+\frac{1}{1+\nu_0}\left(1+\frac{3\mu_v}{2\mu_0(1+\nu_0)}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\int\limits_0^t \nu_1^{\cdot}(t-\tau)\frac{d\tau}{(l(\tau)(x_1-l(\tau)))^{1/2}}\right)^2\right)$$

Опуская рассуждения, аналогичные приведенным для задачи о неустойчивой трещине, можно показать, что интенсивность плотности свободной энергии для недогруженной, неподвижной в начальный период трещины ($S(0)<S_{cr}$) будет

$$S(0)=\frac{F^2}{2\mu_0 l_0}\left(\frac{1-2\nu_0}{2}+\frac{1}{1+\nu_0}\left(1+\frac{3\mu_v}{2\mu_0(1+\nu_0)}\right)\nu_1^2(t)\right) \tag{9}$$

Для движущейся трещины

$$S(0)=(1-2\nu_0)F^2/4\mu_0 l \tag{10}$$

Рассмотрим сначала случай не очень большой нагрузки такой, что

$$F<F_*=\left(2\mu_0 l_0 S_{cr}\left(\frac{1-2\nu_0}{2}+\frac{1}{1+\nu_0}\left(1+\frac{3\mu_v}{2\mu_0(1+\nu_0)}\right)\nu_1^2(\infty)\right)^{-1}\right)^{1/2}$$

Как следует из (9), несмотря на постоянный рост интенсивности во времени, она никогда не достигнет своего критического значения и трещина останется неподвижной. Пусть теперь

$$F>F^*=(4\mu_0 l_0 S_{cr}/(1-2\nu_0))^{1/2}$$

Тогда, согласно (10) интенсивность плотности свободной энергии сразу превышает критическое значение и трещина скачком достигает длины $l_*=(1-2\nu_0)F^2/(4\mu_0 S_{cr})$. В последующие моменты времени $t>0$ трещина не может оставаться в покое, так как в противном случае при $l=l_*$, как видно из формулы (9), ввиду вязко-упругих свойств материала трещина окажется перегруженной. Естестенно предположить, что трещина начнет медленно двигаться так, что либо сразу, либо через некоторое время ее скорость станет отличной от нуля. Однако из формулы (10) следует противоречащее этому предположению следствие о том, что $l=\text{const}$. Возникает довольно необычная ситуация: трещина не может ни оставаться в покое, ни двигаться. Какова же альтернатива? Единственная возможность снять это противоречие заключается в том, чтобы допустить скачкообразное распространение трещины. Находясь в покое трещина перегружается до некоторой степени, затем она мгновенно увеличивает свою длину, возможно, перескакивая равновесное состояние, далее она снова стоит, пока не перегрузится и т. д. Величина перегрузки, при которой происходит скачок трещины, остается при этом анализе неизвестной. Равновесная в момент t длина трещины, около которой происходит скачкообразное движение трещины, легко находится из (9)

$$l(t)=\frac{F^2}{2\mu_0 S_{cr}}\left(\frac{1-2\nu_0}{2}+\frac{1}{1+\nu_0}\left(1+\frac{3\mu_v}{2\mu_0(1+\nu_0)}\right)\nu_1^2(t)\right). \tag{11}$$

При нагрузках $F_*<F<F^*$ трещина после некоторого времени задержки начинает также распространяться скачкообразно около траектории (11). В этом случае отсутствует начальный скачок l_*.

Вернемся к классической задаче Гриффитса о неустойчивой трещине, несколько изменив реологические свойства среды. А именно, будем предполагать ее изотропной и линейно-вязкоупругой с коэффициентом Пуассона $\nu=\nu_0$. При этом модуль объемного сжатия $\mathbf{K}$ будет оператором, причем $\mathbf{K}=2\boldsymbol{\mu}(1+\nu_0)/(1-2\nu_0)$. Определяющие соотношения (5) трансформируются в

$$e_{ij}=s_{ij}/(2\mu_0)+\int_0^t J^{\cdot}(t-\tau)s_{ij}(\tau)\,d\tau,$$

$$e=\frac{p}{K_0}+\frac{1-2\nu_0}{1+\nu_0}\int_0^t J^{\cdot}(t-\tau)p(\tau)\,d\tau,\quad K_0=\frac{2(1+\nu_0)}{1-2\nu_0}\mu_0 \tag{12}$$

Здесь K_0 — мгновенно упругий модуль объемного сжатия. Можно показать, что плотность свободной энергии для (12)

$$W={}^3/{}_2K_0e^{e2}+{}^3/{}_2K_ve^{v2}+\mu_0e_{ij}{}^e e_{ij}{}^e+\mu_v e_{ij}{}^v e_{ij}{}^v, \tag{13}$$
$$K_v=2(1+\nu_0)\mu_v/(1-2\nu_0).$$

Формулы для компонент напряжений на продолжении трещины (6) сохранят свой вид с заменой ν на ν_0. Используя их и уравнения (12), (13) получим для плотности свободной энергии

$$W=(1-2\nu_0)\sigma^2\left(\frac{l}{4\mu_0(x_1-l)}+\mu_v\left(\int_0^t J^{\cdot}(t-\tau)\frac{l^{1/2}(\tau)}{(x_1-l(\tau))^{1/2}}d\tau\right)^2\right).$$

Опуская анализ этого выражения, аналогичный приведенному выше, представим формулы для безопасного σ_* и предельного σ^* напряжений ($\mu_\infty=\mu_v\mu_0/(\mu_v+\mu_0)$ — длительный упругий модуль):

$$\sigma_*=(4\mu_\infty S_{cr}/(1-2\nu_0)l_0)^{1/2},\quad \sigma^*=(4\mu_0 S_{cr}/(1-2\nu_0)l_0)^{1/2}.$$

Отметим, что тело типа Максвелла, как это следует из (13) при $\mu_v=0$, $K_v=0$, в смысле разрушения ведет себя как упругое, т. е. при постоянной нагрузке трещины в нем начинают распространяться либо в момент приложения нагрузки, либо никогда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Williams M. L.* Stress sigularites, adhesion and fracture // Proc. 5 th U. S. Nat. Congr. Appl. Mech. N. Y.: ASME, 1966. P. 451–464.
2. *Nikitin L. V.* Application of the Griffith's approach to analysis of rupture in viscoelastic bodies // Intern. J. Fract. 1984. V. 24. № 2. P. 149–157.
3. *Wnuk M. P., Knauss W. G.* Delayed fracture in viscoelastic-plastic solids // Intern. J. Solids and Struct. 1970. V. 6. № 7. P. 995–1009.
4. *Kostrov B. V., Nikitin L. V.* Some general problems of mechanics of brittle fracture // Arch. Mech. Stosaw. 1970. V. 22. № 6. P. 749–776.
5. *McCartney L. N.* Crack propagation resulting from a monotonic increasing applied stress in a linear viscoelastic materials // Intern. J. Fract. 1977. V. 13. № 5. P. 641–654.
6. *Schapery R. A.* A Theory of crack initiation and growth in viscoelastic media // Intern. J. Fract. 1975. V. 11. № 1. P. 141–159.
7. *Sih G. C.* Some basic problems in fracture mechanics and new concepts // Eng. Fract. Mech. 1973. V. 5. № 2. P. 365–377.
8. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
9. *Griffith A. A.* The phenomenon of rupture and flow in solids // Phil. Trans. Roy. Soc. 1920. V. A221. № 2. P. 163–198.
10. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами, Киев: Наук. думка, 1968. 246 с.

Москва

Поступила в редакцию
8.I.1990