

УДК 539.375

© 1990 г.

В. В. БОЛОТИН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОБРАТИМЫХ ТРЕЩИН

В [1, 2] был предложен общий подход к построению механики твердых тел с трещинами, основанный на принципе виртуальных перемещений для механических систем с односторонними связями. Односторонний характер связей отвечает представлению о трещинах как о необратимых, «незакрывающихся» дефектах. Таковы трещины в обычных конструкционных материалах, для устранения которых требуется сварка, пайка и другие технологические операции. Однако возможны и «закрывающиеся» трещины, например, в полимерах, которые находятся в высокоэластическом состоянии, в металлах при температурах, близких к температуре плавления, в условиях вакуума или высокого контактного давления. Теория трещин может оказаться полезной при разработке новых технологических процессов, в частности, различных упрочняющих технологий. Цель данной статьи состоит в том, чтобы показать, какие дополнения необходимо внести в теорию, чтобы ее можно было распространить на обратимые трещины. При этом, как и в [1, 2], ограничиваемся медленными процессами нагружения и эволюции трещин, трактуя эти процессы как последовательность смежных состояний равновесия.

1. Следуя [1], рассмотрим состояние Σ_0 системы тело с трещинами — нагрузка. При фиксированных параметрах трещин состояние Σ_0 устойчиво по Ляпунову. Наряду с состоянием Σ_0 , которое назовем невозмущенным, возьмем совокупность бесконечно близких смежных состояний Σ . Эти состояния при фиксированных параметрах трещин также устойчивы по Ляпунову. При переходе к смежным состояниям время, заданные поверхностные и объемные силы, а также заданные перемещения не подлежат варьированию; всюду в теле, кроме, может быть, малых окрестностей фронта трещин, выполняются все условия равновесия и совместности деформаций, все механические уравнения состояния.

Поскольку при переходе от состояния Σ_0 к смежным состояниям Σ варьируются только параметры трещин, то эти параметры выполняют роль обобщенных координат. Если траектории всех трещин заранее известны (например, из соображений симметрии), то за обобщенные координаты могут быть приняты независимые размеры трещин. Будем считать, что их число конечно и равно m . Обозначая обобщенные координаты l_1, \dots, l_m , выберем их так, чтобы их положительные приращения соответствовали растущим трещинам. Для необратимых трещин $\delta l_j \geq 0$ ($j=1, \dots, m$). При наличии обратимых трещин допускаются вариации δl_j обоих знаков.

Описанный способ варьирования, введенный в [1], будем называть варьированием по Гриффитсу. Рассмотрим виртуальную работу всех внешних и внутренних сил для системы тело с трещинами — нагрузка при варьировании состояний по Гриффитсу:

$$\delta A = \delta A_e + \delta A_i + \delta A_f \quad (1.1)$$

Здесь δA_e — виртуальная работа внешних сил, δA_i — виртуальная работа внутренних сил во всем объеме тела за исключением малых концевых зон. Виртуальная работа δA_f в концевых зонах отрицательна при продвижении фронта трещин, т. е. при разрушении связей, и неотрицательна (как правило, положительна) при заживлении трещин.

Из всех состояний системы тело с трещинами — нагрузка выделим состояния Σ_0 , для которых при любых вариациях $\delta l_j \neq 0$, $j=1, \dots, m$ вир-

туальная работа $\delta A < 0$. Эти состояния названы в [1] субравновесными. Для выхода из этих состояний требуются дополнительные энергетические затраты, так что субравновесные состояния устойчивы. Если существуют такие виртуальные переменные $\delta l_j \neq 0$, $j=1, \dots, m_1$, для которых $\delta A = 0$, а для остальных $\delta l_j \neq 0$ выполнено условие $\delta A < 0$, то состояние Σ_0 назовем равновесным по обобщенным координатам $\delta l_1, \dots, \delta l_{m_1}$. Равновесное состояние устойчиво, если для любых вариаций $\delta l_j \neq 0$, $j=1, \dots, m_1$, имеем $\delta^2 A \equiv \delta(\delta A) < 0$, где вторая вариация также вычисляется по Гриффитсу. Равновесное состояние неустойчиво, если среди вариаций δl_j , $j=1, \dots, m_1$ найдутся такие, что $\delta^2 A > 0$. Если при любых вариациях $\delta^2 A = 0$, то равновесное состояние относится к нейтральным, т.е. пограничным между устойчивыми и неустойчивыми состояниями или сомнительным, когда требуется анализ высших вариаций от δA .

Если при некоторых вариациях обобщенных координат имеем $\delta A > 0$, то невозмущенное состояние не может существовать как состояние равновесия и, следовательно, неустойчиво. При этом необходимо различать два случая. Для определенности допустим, что неравенство $\delta A > 0$ достигается при $\delta l_k \neq 0$ независимо от вариаций остальных обобщенных координат. Если $\delta A > 0$ при $\delta l_k > 0$, то соответствующая обобщенная координата l_k будет расти либо до достижения следующего устойчивого состояния, либо до финального разрушения. В этом случае состояние Σ_0 будем называть неравновесным по обобщенной координате l_k . Если $\delta A > 0$ при $\delta l_k < 0$, то обобщенная координата l_k будет убывать до достижения устойчивого состояния, которым, в частности, может оказаться полное залечивание трещины по этой координате. Тогда состояние Σ_0 будем называть антиравновесным по координате l_k . В общем случае состояние Σ_0 может быть неравновесным (антиравновесным) по отношению к $m_1 \leq m$ обобщенным координатам.

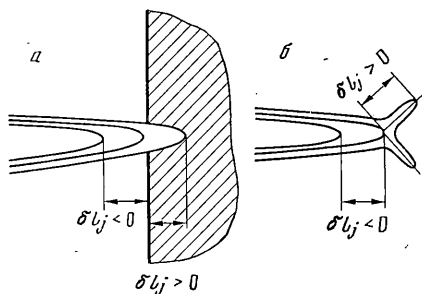
Приведенная классификация состояний систем тел с трещинами — нагрузка аналогична классификации из [1, 2] с тем отличием, что в [1, 2] рассматривались только необратимые трещины. При этом все $\delta l_j \geq 0$, так что не было необходимости различать неустойчиво растущие и неустойчиво зарастающие трещины.

2. Сформулируем классификацию состояний в терминах обобщенных сил. Представим слагаемые из правой части в (1.1) в виде

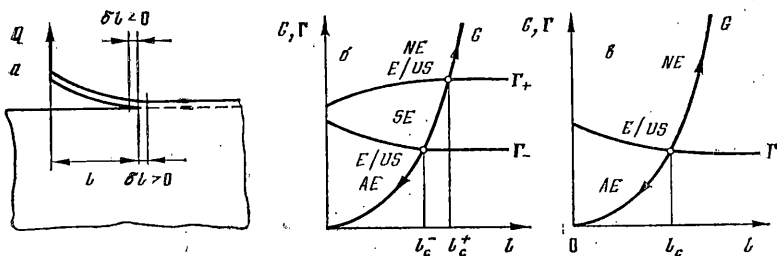
$$\delta A_e + \delta A_i \equiv \sum_{j=1}^m G_j \delta l_j, \quad \delta A_r \equiv - \sum_{j=1}^m \Gamma_j \delta l_j \quad (2.1)$$

В [1, 2] множители G_j названы активными обобщенными силами, множители Γ_j — обобщенными силами сопротивления. Эти названия имеют смысл для необратимых трещин, где величины G_j характеризуют интенсивность высвобождения энергии при продвижении фронта трещин, а величины Γ_j — энергию, расходуемую на разрушение связей. Если среди трещин имеются обратимые, то истолкование обобщенных сил G_j и Γ_j изменяются. Так, при $\delta l_j < 0$ обобщенная сила G_j характеризует энергию, которая высвобождается в результате залечивания трещины по соответствующей обобщенной координате. Поэтому в дальнейшем будем говорить просто об обобщенных силах G_j и Γ_j .

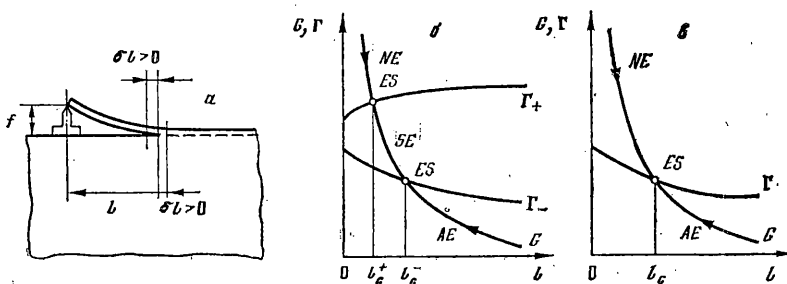
Вообще, следует различать значения обобщенных сил при $\delta l_j > 0$ и $\delta l_j < 0$. Пусть, например, в состоянии Σ_0 фронт трещины находится у границы раздела двух материалов (фиг. 1, а). При $\delta l_j > 0$ трещина проникает вглубь другого материала, при $\delta l_j < 0$ ее фронт перемещается в пределах того же материала. Поэтому $G_j^+ \neq G_j^-$, где значки плюс и минус отвечают вариациям $\delta l_j > 0$ и $\delta l_j < 0$ соответственно. Аналогичная ситуация имеет место, если состояние Σ_0 предшествует повороту или ветвлению трещины (фиг. 1, б). Кстати, в первом примере также возможно ветвление трещины и ее распространение по границе раздела двух материалов.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Обобщенные силы Γ_j также могут зависеть от знака δl_j . Если виртуальная работа δA_T связана с обобщенными силами Γ_j вторым соотношением (2.4), то, очевидно, мы должны принять $\Gamma_j > 0$ при $\delta l_j > 0$ и $\Gamma_j \geq 0$ при $\delta l_j < 0$ (знак равенства относится к необратимым трещинам). Вообще, $\Gamma_j^+ \geq \Gamma_j^-$, т. е. работа, затрачиваемая на продвижение фронта трещины на единицу длины или площади, не превышает энергии, высвобождаемой при залечивании трещины на ту же меру. Действительно, продвижение фронта трещины вглубь материала обычно сопровождается его пластическим деформированием, образованием микротрещин, микропор и других микрповреждений, в то время как залечивание трещины не предполагает полной обратимости перечисленных побочных процессов. Лишь в случае, если энергия связей в среде полностью обратима, имеем $\Gamma_j^+ = \Gamma_j^-$. Такова гипотетическая среда из пионерской работы Гриффитса, где сопротивление росту трещины связано с поверхностной энергией, которая в принципе является обратимой (хотя Гриффитс имел в виду необратимые трещины). Для трещин и пустот в жидких полимерах, расплавах и т. п. энергия связей близка к обратимой. Аналогичная ситуация имеет место для соединений на жидких клеевых слоях. Во всех этих случаях, по-видимому, $\Gamma_j^+ \approx \Gamma_j^-$.

Необходимость проводить различие между G_j^+ и G_j^- , а также между Γ_j^+ и Γ_j^- несколько усложняет условия устойчивости по сравнению с теорией необратимых трещин. Состояние системы тело с трещинами — нагрузка будет субравновесным и, следовательно, устойчивым, если вы-

полняются условия

$$G_j^+ < \Gamma_j^+, \quad G_j^- > \Gamma_j^- \quad (j=1, \dots, m) \quad (2.2)$$

Первая группа условий обеспечивает отсутствие роста трещин хотя бы по одной из обобщенных координат, вторая группа — отсутствие залечивания хотя бы одной трещины.

Состояние системы будет равновесным по отношению к обобщенным координатам $l_1, \dots, l_{m_1}, l_{m_1+1}, \dots, l_{m_2}$ при

$$G_k^+ = \Gamma_k^+ \quad (k=1, \dots, m_1), \quad G_k^- = \Gamma_k^- \quad (k=m_1+1, \dots, m_2) \quad (2.3)$$

$$G_j^+ < \Gamma_j^+, \quad G_j^- > \Gamma_j^- \quad (j=m_2+1, \dots, m)$$

Устойчивость равновесных состояний зависит от свойств квадратичной формы

$$\delta^2 A = \sum_{j=1}^{m_2} \sum_{k=1}^{m_2} \frac{\partial}{\partial l_j} (G_k - \Gamma_k) \delta l_j \delta l_k \quad (2.4)$$

куда при $k=1, \dots, m_1$ вместо G_k и Γ_k надо подставлять G_k^+ и Γ_k^+ , при $k=m_1+1, \dots, m_2$ соответственно G_k^- и Γ_k^- . Состояние системы будет неравновесным по координате l_k , если $G_k^+ > \Gamma_k^+$ и антиравновесным по координате l_k , если $G_k^- < \Gamma_k^-$. В первом случае одна из трещин или группа однотипных трещин будет расти по координате l_k , во втором будет иметь место залечивание по этой координате.

3. Проиллюстрируем введенные понятия на простых примерах. Пусть тонкая упругая балка или пластина в условиях цилиндрического изгиба приклеена к основанию, которое считаем абсолютно жестким. Толщину клевого слоя считаем весьма малой, так что балку (пластину) можно считать защемленной по границе склеивания. Рассмотрим два случая: нагружение отслоившегося участка заданной поперечной нагрузкой Q (фиг. 2) и «жесткое» (кинематическое) нагружение при заданном на конце прогиба отслоения f (фиг. 3). В обоих случаях потенциальная энергия отслоения U и прогиб f связаны с силой Q и длиной отслоения l формулами

$$U = Q^2 l^3 / 6D, \quad f = Q l^3 / 3D \quad (3.1)$$

Здесь D — изгибная жесткость, например, при цилиндрическом изгибе $D = Eh^3 [12(1-\nu^2)]^{-1}$ при модуле Юнга E , коэффициенте Пуассона ν и толщине отслоения h .

Если задана сила Q , то при варьировании по Гриффитсу $\delta A_e = 2\delta U$, $\delta A_i = -\delta U$, так что согласно первому соотношению (2.1) $G = \partial U / \partial l$. Обобщенная сила G с учетом (3.1) будет

$$G = Q^2 l^2 / 2D \quad (3.2)$$

Графики для обобщенных сил G и Γ представлены на фиг. 2, б, где принято $\Gamma_+(l) > \Gamma_-(l)$. При $0 < l < l_c^-$, где l_c^- — корень уравнения $G(l) = \Gamma_-(l)$, состояние будет антиравновесным: отслоение будет «схватываться» с основанием до полного зарастания. При $l > l_c^+$, где l_c^+ — корень уравнения $G(l) = \Gamma_+(l)$, состояние будет неравновесным: отслоение будет отдираться от основания. На отрезке $l_c^- < l < l_c^+$ выполнены условия (2.2), так что состояние субравновесно. При заданных значениях Q и l начальная длина отслоения изменяться не будет. Антиравновесные, неравновесные и субравновесные ветви кривой $G(l)$ обозначены на фиг. 2 и 3 символами AE , NE и SE соответственно.

Точки пересечений линий $G(l)$, $\Gamma_+(l)$ и $\Gamma_-(l)$ отвечают равновесным состояниям (2.3). Квадратичная форма (2.4), которая в данном случае принимает вид $\delta^2 A = [\partial(G - \Gamma) / \partial l] (\delta l)^2$, так что для обоих равновесных состояний $l = l_c^-$ и $l = l_c^+$, имеем $\delta^2 A > 0$. Следовательно, оба равновесных состояния, ограничивающих область субравновесных состояний, неустойчивы. Они обозначены на фиг. 2 E/US . Результат физически ясен: из формулы (3.2) следует, что при фиксированной силе Q обобщенная сила G с уменьшением l убывает. Поэтому при $l < l_c^-$ силы, способствующие

схватыванию клеевого шва, будут доминировать. Шов будет залечиваться, несмотря на наличие силы Q . С увеличением l обобщенная сила G растет, что приводит к неустойчивому росту отслоения, начиная с равновесного состояния $l=l_c^+$.

В принципе возможна ситуация, когда энергия склеивания является полностью обратимой. Примером могут служить жидкие клеевые швы. Случай $\Gamma_+(l)=\Gamma_-(l)$ проиллюстрирован на фиг. 2, *в*. Все отслоения, начальный размер которых $l>l_c$, будут расти неустойчиво. Равновесное состояние при $l=l_c$ играет роль границы между двумя типами состояний и будет, очевидно, неустойчиво.

Нагружение отслоившегося участка с заданным прогибом f показано на фиг. 3, *а*. Формулы (3.1) верны и в этом случае. Однако при вычислении обобщенной силы G необходимо учитывать, что сила Q возникает как реакция на задаваемое перемещение. Формула для потенциальной энергии отслоения принимает вид

$$U=3Df^2/(2l^3) \quad (3.3)$$

При варьировании по Гриффитсу $\delta A_e=0$, $\delta A_i=-\delta U$, так что как и в случае силового нагружения $G=-\partial U/\partial l$. С учетом формулы (3.3) вместо (3.2) получаем $G=9Df^2/(2l^4)$.

Примерные графики для $G(l)$, $\Gamma_+(l)$ и $\Gamma_-(l)$ представлены на фиг. 3, *б*. При $0<l<l_c^+$, где l_c^+ — корень уравнения $G(l)=\Gamma_+(l)$, состояния системы будут неравновесными. При $l>l_c^-$, где l_c^- — корень уравнения $G(l)=\Gamma_-(l)$, они будут антиравновесными. В интервале $l_c^+<l<l_c^-$ состояния субравновесны. Пограничные состояния являются равновесными и устойчивыми (на фиг. 3, *б* они обозначены символом E/S). Таким образом, отслоения, размер которых меньше l_c^+ , будут расти, а отслоения, размер которых больше l_c^- , будут убывать, пока не будет достигнуто одно из устойчивых состояний. Если $\Gamma_+(l)=\Gamma_-(l)$, то область субравновесных состояний вырождается в единственное (при заданном f) равновесное устойчивое состояние, при котором $l=l_c$. Этот случай проиллюстрирован на фиг. 3, *в*.

4. Применим изложенную теорию к тонким отслоениям в слоистом композиционном материале. Устойчивость в смысле Гриффитса отслоений этого типа была рассмотрена в [1, 4–7]. Проиллюстрируем качественные результаты на простейшем примере отслоения, работающего в условиях цилиндрического изгиба (фиг. 4, *а*). Отслоение толщиной h рассматриваем как пластину изгибной жесткостью $Eh^3[12(1-\nu^2)]^{-1}$ и жесткостью при растяжении — сжатии $Eh(1-\nu^2)^{-1}$. Полудлину отслоения обозначим l , прогиб посредине f . При этом $h\ll l$, $f\ll l$. Начальные значения l и f обозначим l_0 и f_0 . Форму прогиба возьмем в виде

$$w(x)=f \cos^2(\pi x/2l), \quad |x|\leq l \quad (4.1)$$

полагая, что отслоение защемлено по концам. Жесткость основного элемента будем считать весьма большой по сравнению с жесткостью отслоившегося участка. Продольное усилие в выпученном отслоении приближенно примем равным критической силе (в смысле Эйлера). Тогда осевая деформация сжатия срединной поверхности в направлении оси Ox может быть вычислена как

$$\varepsilon_E=(\pi^2 h^2)/(12l^2) \quad (4.2)$$

Потенциальная энергия упругой деформации отслоения складывается из энергии срединной поверхности и энергии изгиба. Для половины длины отслоения $0\leq x\leq l$ имеем

$$U=\frac{Eh\varepsilon^2 l}{2(1-\nu^2)}+\frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)}\int_0^l\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx \quad (4.3)$$

Подставляя сюда $w(x)$ из (4.1) и $\varepsilon = \varepsilon_E$ из (4.2), находим

$$U = \left(\frac{\pi^4 E h^5}{288(1-\nu^2)l^3} \right) \left(1 + \frac{3f^2}{2h^2} \right) \quad (4.4)$$

Основной элемент не напряжен, заданные внешние усилия отсутствуют. Отсюда обобщенная сила $G = -\partial U / \partial l$, так что

$$G = \left(\frac{\pi^4 E h^5}{96(1-\nu^2)l^4} \right) \left(1 + \frac{3f^2}{2h^2} \right) \quad (4.5)$$

Виртуальная работа $\delta A_T = -\gamma \delta l$, где γ — удельная работа разрушения связи при $\delta l > 0$ и удельная энергия схватывания при $\delta l < 0$. Следовательно, обобщенная сила $\Gamma = \gamma$, где $\gamma = \gamma_+$ при $\delta l \geq 0$ и $\gamma = \gamma_-$ при $\delta l < 0$.

С ростом длины l обобщенная сила убывает, так что мы имеем ситуацию, которая качественно аналогична ситуации, изображенной на фиг. 3. С учетом (4.5) условие $G = \Gamma$ дает формулу для равновесных размеров отслоения

$$\frac{l}{h} = \pi \left[\frac{Eh}{96\gamma(1-\nu^2)} \left(1 + \frac{3f^2}{2h^2} \right) \right]^{1/4} \quad (4.6)$$

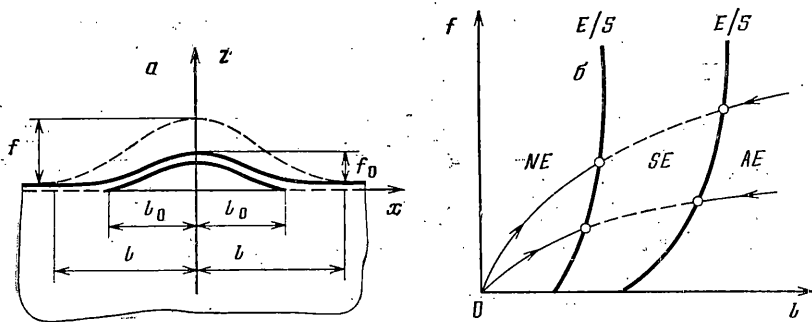
куда надо подставить $\gamma = \gamma_+$ для расширяющихся и $\gamma = \gamma_-$ для залечивающихся отслоений. Вообще, $\gamma_+ \geq \gamma_-$.

Зависимость между равновесными размерами l и f показана на фиг. 4, б, где принято $\gamma_+ = 16\gamma_-$. Обе равновесные ветви соответствуют устойчивым состояниям (E/S). Состояния, изображающие точки которых расположены левее кривой $G(l) = \gamma_+$, неравновесны (NE). Состояния правее линии $G(l) = \gamma_-$ антиравновесны (AE). Область между указанными линиями отвечает субравновесным состояниям (SE). Все отслоения, размеры которых попадают в эту область, будут устойчивы. Устойчивы также и пограничные состояния. Отслоения, начальные размеры которых попадают в область NE , будут расти во всяком случае до достижения ближайшего устойчивого состояния; напротив, отслоения с размером из области AE будут уменьшать свои размеры. Это схематически показано на фиг. 4, б тонкими линиями. Эти линии отвечают размерам f и l , которые связаны кинематическими соотношениями. Так, если пренебречь укорочением срединной поверхности от эйлерова обжатия, то $s + (l_0 - l) \approx s_0$, где s_0 и s — длины дуг, отсчитываемых по изогнутой срединной поверхности, l_0 и l — их проекции на ось Ox . С учетом (4.1) получаем приближенное соотношение

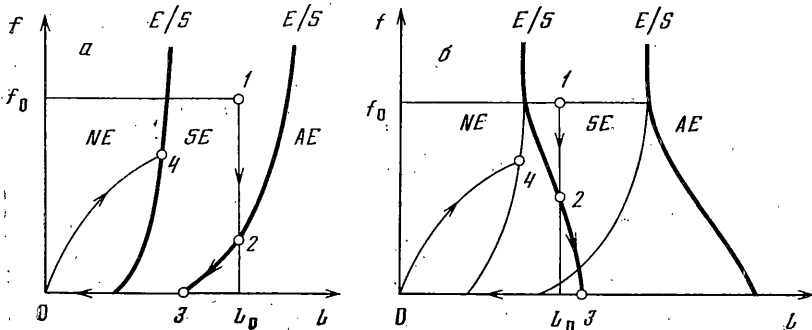
$$f \approx f_0 (l/l_0)^{1/2} \quad (4.7)$$

Обсудим некоторые способы «выглаживания» отслоений. Один из способов — создание термической или химической усадки наружного слоя. К аналогичным результатам приводит вытягивание основного элемента. Пусть, например, отслоение получает усадку вдоль оси Ox с относительной деформацией ε_s . Потенциальная энергия упругой деформации отслоения по-прежнему определена по формуле (4.3) при $\varepsilon = \varepsilon_E$. Формулы (4.4)–(4.6) сохраняют при этом тот же вид, но изменяются кинематические соотношения между f_0 , l_0 и f , l . При упрощениях, приводящих к формуле (4.7), имеем $s + (l_0 - l) \approx s_0 - \varepsilon_s l_0$. Тогда вместо (4.7) получаем

$$f \approx (l/l_0)^{1/2} (f_0^2 - 16\varepsilon_s l_0^2 / \pi^2)^{1/2} \quad (4.8)$$



Фиг. 4



Фиг. 5

На фиг. 5, а показано примерное изменение размеров отслоения при постепенном росте усадочной деформации ϵ_s . В начальном состоянии 1 отслоение субравновесно и устойчиво. После усадки до состояния 2 изменение размеров происходит по устойчивой ветви вплоть до состояния 3, при котором $f=0$. По формуле (4.8) приближенное значение усадочной деформации при $f=0$ составляет $(\pi^2 f_0^2)/(16l_0^2)$. При дальнейшем уменьшении ϵ_s происходит залечивание дефектов. Если усадочная деформация обратима, то при $\epsilon_s=0$ отслоение частично восстанавливается (точка 4 на фиг. 5, а).

Другой способ состоит в принудительном сглаживании отслоений, скажем, при помощи жесткого плоского штампа. При этом положение штампа задает прогиб f , а деформация срединной поверхности ϵ возникает как реакция на задаваемый прогиб. Если l постоянно, то длины дуг s_0 и s связаны с деформацией ϵ соотношением $s_0 - s \approx (\epsilon - \epsilon_E)l$. Отсюда

$$\epsilon \approx \epsilon_E [1 + (3/4)(f_0^2 - f^2)/h^2] \quad (4.9)$$

Подставим выражения (4.1), (4.2) и (4.9) в (4.3). Вместо (4.5) получаем следующую формулу для обобщенной силы $G = -\partial U/\partial l$:

$$G = \frac{\pi^4 E h^5}{96(1-\nu^2)l^4} \left[\left(1 + \frac{3}{4} \frac{f_0^2 - f^2}{h^2} \right)^2 + \frac{3f_0^2}{2h^2} \right]$$

Условие $G = \Gamma$ дает формулу для равновесных отслоений

$$\frac{l}{h} = \pi \left\{ \frac{Eh}{96\gamma(1-\nu^2)} \left[\left(1 + \frac{3}{4} \frac{f_0^2 - f^2}{h^2} \right)^2 + \frac{3f_0^2}{2h^2} \right]^{1/4} \right\} \quad (4.10)$$

Примерные графики зависимости (4.10) при $\gamma_+ = 16\gamma_-$ представлены сплошными линиями на фиг. 5, б. Обе ветви этой зависимости отвечают устойчивым состояниям. Области неравновесных, субравновесных и антиравновесных состояний, как и ранее, обозначены соответственно символами *NE*, *SE* и *AE*. При выглаживании отслоения с начальными размерами из области субравновесных состояний (точка 1) уменьшение прогиба f вначале происходит при постоянном значении $l=l_0$. После достижения состояния 2 размер l начинает расти вплоть до точки 3, когда прогиб отслоения обращается в нуль. Под давлением штампа может произойти полное залечивание дефекта, т. е. длина отслоения может уменьшиться до нуля. Если при выдержке под штампом не возрастает прочность клеевого слоя или не произойдет соответствующей усадки, то после удаления штампа отслоение вновь выпучится. Новые значения l и f зависят от начальных значений l_0 и f_0 . Они связаны приближенной зависимостью (4.7). Окончательному состоянию отслоения отвечает точка 4 на фиг. 5, б.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бологин В. В.* Уравнения роста усталостных трещин // Изв. АН СССР, МТТ. 1983. № 4. С. 153–160.
2. *Бологин В. В.* Устойчивость и рост трещин при непотенциальных внешних нагрузках // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 148–157.
3. *Си Г., Либовиц Г.* Математическая теория хрупкого разрушения // Разрушение. М.: Мир, 1975. Т. 2. С. 83–203.
4. *Бологин В. В.* Дефекты типа расслоений в конструкциях из композитных материалов // Механика композит. материалов. 1984. № 2. С. 239–255.
5. *Bolotin V. V.* Fracture and fatigue of composite plates and shells // Inelastic Behaviour of Plates and Shells: Proc. IUTAM Sympos. Rio de Janeiro, 1985. Heidelberg: Springer, 1986. P. 131–161.
6. *Кисляков С. А.* Устойчивость и рост отслоений в цилиндрической оболочке из композитного материала при сжатии // Механика композит. материалов. 1985. № 4. С. 653–657.
7. *Нефедов С. В.* Анализ роста эллипсоидальных отслоений в композитах при длительных квазистатических нагрузках // Механика композит. материалов. 1988. № 5. С. 827–833.

Москва

Поступила в редакцию
21.IX.1989