

УДК 539.3

© 1990 г.

С. В. КУЗНЕЦОВ

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СТАТИКИ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ

Для цилиндрически анизотропных осесимметричных упругих тел построены фундаментальные решения уравнений статики. Исследована сходимость рядов, определяющих параметрикс. Указан сходящийся итерационный процесс для нахождения фундаментального решения. Выяснены условия, при которых параметрикс обеспечивает аппроксимацию фундаментального решения.

1. Введение. Обычно фундаментальные решения статики в осесимметричном случае для изотропного упругого тела строят методом интегрирования фундаментального решения Кельвина в R^3 по дуговой координате [1–3]. Этот метод приводит к появлению в построенном решении эллиптических интегралов, что в известной мере снижает практическую ценность таких решений. Для цилиндрически анизотропных осесимметричных упругих тел фундаментальные решения статики неизвестны.

Ниже предлагается способ определения параметрикса, а затем и фундаментального решения уравнений, к которым сводятся осесимметричные задачи для цилиндрически анизотропных упругих тел. Параметриксом в теории дифференциальных операторов называют оператор, который будучи подставлен в исходное уравнение дает δ -образную составляющую и некоторый ограниченный оператор, операторная норма которого может быть сделана меньше единицы [4]. Часто вместо параметрикса используют функцию Леви, получаемую замораживанием коэффициента в главной части исходного дифференциального оператора.

Естественно, чем «меньше» этот ограниченный оператор, тем лучше параметрикс аппроксимирует фундаментальное решение. Далее будут указаны случаи, при которых параметрикс обеспечивает достаточно хорошее приближение к фундаментальному решению. Для построения последующих приближений предлагается использовать итерационный процесс.

2. Основные уравнения и операторы. Дифференциальные уравнения статики для анизотропного упругого тела в отсутствие массовых сил могут быть записаны в виде $A(\mathbf{u}) = -\operatorname{div} C[\nabla \mathbf{u}] = 0$, где C — четырехвалентный тензор, характеризующий упругие свойства анизотропной среды, \mathbf{u} — вектор перемещений. В некоторых случаях вместо тензора C удобнее использовать двухвалентный тензор $c \in R^6 \otimes R^6$. Этот двухвалентный тензор c , называемый тензором упругости [5], будет использоваться в дальнейшем.

Матричный дифференциальный оператор A уравнений статики для цилиндрически анизотропного (ортотропного) тела в осесимметричном случае задается своими физическими компонентами

$$\begin{aligned} A_{(rr)} &= c_{11} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + c_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + c_{11} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - c_{22} \frac{1}{r^2} \\ A_{(zz)} &= c_{44} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + c_{33} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + c_{44} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \\ A_{(rz)} &= (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} + (c_{13} - c_{23}) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$A_{\langle zr \rangle} = (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} + (c_{23} + c_{44}) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z}$$

где ось Z цилиндрической системы координат предполагается совпадающей с осью цилиндрической анизотропии; c_{11}, c_{23}, \dots — компоненты тензора упругости, связывающие между собой физические проекции тензоров напряжений и деформаций

$$\sigma_{\langle rr \rangle} = c_{11} \varepsilon_{\langle rr \rangle} + c_{12} \varepsilon_{\langle \varphi\varphi \rangle} + c_{13} \varepsilon_{\langle zz \rangle} \quad (2.2)$$

$$\sigma_{\langle \varphi\varphi \rangle} = c_{21} \varepsilon_{\langle rr \rangle} + c_{22} \varepsilon_{\langle \varphi\varphi \rangle} + c_{23} \varepsilon_{\langle zz \rangle}$$

$$\sigma_{\langle zz \rangle} = c_{31} \varepsilon_{\langle rr \rangle} + c_{32} \varepsilon_{\langle \varphi\varphi \rangle} + c_{33} \varepsilon_{\langle zz \rangle}$$

$$\sigma_{\langle rz \rangle} = c_{44} \varepsilon_{\langle rz \rangle}$$

Помимо оператора A рассматривается симметричный оператор A_0 :

$$\begin{aligned} A_{0\langle rr \rangle} &= c_{11} \partial^2 / \partial r^2 + c_{44} \partial^2 / \partial z^2, & A_{0\langle zz \rangle} &= c_{44} \partial^2 / \partial r^2 + c_{33} \partial^2 / \partial z^2 \\ A_{0\langle rz \rangle} &= A_{0\langle zr \rangle} = (c_{13} + c_{44}) \partial^2 / \partial r \partial z \end{aligned} \quad (2.3)$$

представляющий собой главную часть A . Непосредственное вычисление символического определителя $\det(A_0)$ по формулам (2.3) дает достаточное условие эллиптичности, которое можно сформулировать в виде леммы.

Лемма 1. Если выполняются неравенства

$$\begin{aligned} c_{11} > 0, \quad c_{33} > 0, \quad c_{44} > 0 \\ (c_{11} c_{33})^{1/2} / c_{44} + c_{44} (c_{11} c_{33})^{-1/2} - (c_{13} + c_{44})^2 (c_{11} c_{33})^{-1/2} / c_{44} > -2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

то операторы A, A_0 эллиптичны.

Подстановка в неравенства (2.4) компонент $c_{11} = c_{33} = (\lambda + 2\mu), c_{13} = c_{23} = \lambda, c_{44} = 2\mu$, соответствующих изотропному упругому телу с константами Ламе λ, μ , показывает, что при $\lambda > 0, \mu > 0$ неравенства (2.4) тождественно удовлетворяются.

Следствие. В случае изотропного упругого тела с $\lambda > 0, \mu > 0$ операторы A, A_0 эллиптичны.

3. Построение параметрикса. В качестве параметрикса предлагается использовать фундаментальное решение E_0 оператора A_0 . Таким образом, этот параметрикс совпадает с функцией Леви оператора (2.1). Для построения параметрикса осуществляется преобразование Фурье по переменным r, z , это дает символ A_0^\sim оператора A_0 :

$$A_{0\langle rr \rangle}^\sim = -4\pi^2 (c_{11} \xi_r^2 + c_{44} \xi_z^2), \quad A_{0\langle zz \rangle}^\sim = -4\pi^2 (c_{44} \xi_r^2 + c_{33} \xi_z^2) \quad (3.1)$$

$$A_{0\langle rz \rangle}^\sim = A_{0\langle zr \rangle}^\sim = -4\pi^2 (c_{13} + c_{44}) \xi_r \xi_z$$

где ξ_r, ξ_z — компоненты вектора $\xi \in R^2$ в плоскости изображений. Преобразованное по Фурье фундаментальное решение E_0^\sim (символ параметрикса) может быть представлено в виде

$$E_0^\sim(\xi) = A_{e_0}(\xi) / \det(A_0^\sim(\xi)) \quad (3.2)$$

где A_{e_0} — матрица алгебраических дополнений символа A_0^\sim . Формула (3.2) показывает, что символ E_0^\sim обладает следующими свойствами: 1) E_0^\sim — вещественно-аналитичен по ξ всюду в $R^2 \setminus 0$; 2) E_0^\sim — однороден по ξ степени -2 .

Для обращения преобразования Фурье и построения собственно параметрикса E_0 рассматривается разложение символа E_0^\sim в ряд Фурье на окружности S единичного радиуса с центром в начале координат

$$\frac{B_0}{2|\xi|^2} + \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \left(B_n \frac{\cos n\varphi}{|\xi|^2} + C_n \frac{\sin n\varphi}{|\xi|^2} \right) \quad (3.3)$$

$$|\xi| = (\xi_r^2 + \xi_z^2)^{1/2}, \quad \varphi = \arcsin(\xi_z / |\xi|^{-1})$$

Матричные коэффициенты B_n, C_n определяются интегрированием по S :

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_s E_0^\vee(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad C_n = \frac{1}{\pi} \int_s E_0^\vee(\varphi) \sin n\varphi d\varphi$$

Нетрудно показать, что ввиду свойства 2) в разложении (3.3) присутствуют гармоники лишь четных степеней.

Обратное преобразование Фурье ряда (3.3) дает [6]:

$$\gamma_0 B_0 \ln|x| + \sum_{n=2,4,\dots} \gamma_n (B_n \cos n\Psi + C_n \sin n\Psi) \quad (3.4)$$

$$|x| = (r^2 + z^2)^{1/2}, \quad \Psi = \arcsin(z|x|^{-1})$$

коэффициенты γ_n вычисляются по формулам

$$\gamma_0 = \pi, \quad \gamma_n = (-1)^{n/2} \pi \Gamma(n/2) / \Gamma(n/2 + 1) \quad (n=2, 4, \dots)$$

Теорема 1. Ряд (3.4) сходится к $E_0(0)$ покомпонентно абсолютно и равномерно на S .

В формулировке теоремы $E_0(0)$ — параметрикс с полюсом в начале координат. Доказательство теоремы опирается на асимптотические оценки матричных коэффициентов B_n, C_n :

$$\|B_n\| = o(n^{-\beta}), \quad \|C_n\| = o(n^{-\beta}), \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall \beta, \beta > 0$$

вытекающие из свойства 1) символа E_0^\vee ; $\|\cdot\|$ — обозначает спектральную матричную норму. Кроме того, используется асимптотическая оценка для γ_n : $|\gamma_n| = o(n^{-1/2}), n \rightarrow \infty$, основанная на формуле Стирлинга.

Следствие: Ряд (3.4) сходится к E_0 покомпонентно абсолютно и равномерно на любом компактном подмножестве из $R^2 \setminus 0$.

Доказательство следствия вытекает из предыдущего результата с учетом свойства 2) символа E_0^\vee .

Замечание 1. Для приложений бывает более удобным иметь формулы для параметрикса E_0 в разностном виде. В этом случае в разложении (3.4) целесообразнее перейти к декартовым координатам r, z точки $x \in R^2$. Это дает

$$E_0(x-y) = \gamma_0 B_0 \ln|x-y| + \sum_{n=2,4,\dots} \frac{\gamma_n}{|x-y|^n} (B_n P_c^n(x-y) + C_n P_s^n(x-y)) \quad (3.5)$$

где P_c^n, P_s^n — однородные степени n полиномы, представляющие собой разложения соответственно $\cos n\psi, \sin n\psi$ по $\cos \psi, \sin \psi$.

После выделения из оператора (2.1) его главной части остается матричный дифференциальный оператор R :

$$R_{(rr)} = c_{11} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - c_{22} \frac{1}{r^2}, \quad R_{(rz)} = (c_{13} - c_{23}) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z}$$

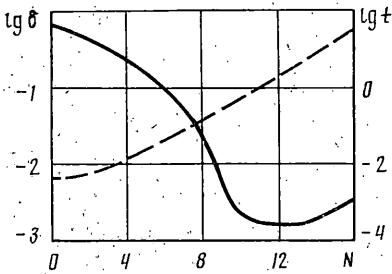
$$R_{(rz)} = (c_{32} + c_{44}) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z}, \quad R_{(zz)} = c_{44} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (3.6)$$

Непосредственная подстановка параметрикса E_0 в оператор (2.1) дает $AE_0 = \delta I + RE_0$, где δ — дельта-функция, а I — единичная матрица.

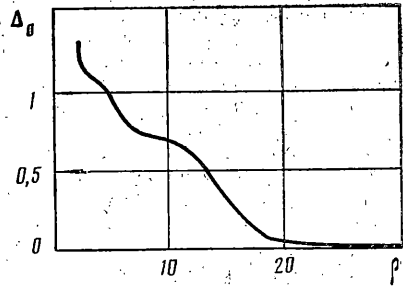
Лемма 2. Для любой ограниченной замкнутой области $\bar{\Omega}$, не пересекающейся с осью Z , оператор rRE_0 имеет тип (2.2).

Доказательство основано на представлении E_0 в виде ряда (3.5). Далее применяется неравенство Юнга [6] к интегралу

$$\int \int_{\Omega} f(x) \cdot rRE_0(x-y) \cdot g(y) dx dy$$



Фиг. 1



Фиг. 2

где $f, g \in L^2(\Omega, R^2)$. Это неравенство показывает, что оператор $\mathcal{R}E_0$ ограничен в $L^2(\Omega, R^2)$.

Следствие. В условиях предыдущей леммы оператор $\mathcal{R}E_0$ допускает асимптотическую оценку

$$\|\mathcal{R}E_0\|_{L^1} = O(\rho^{-1}), \quad \rho \rightarrow \infty \quad (3.7)$$

где ρ — расстояние от оси Z до области $\bar{\Omega}$.

Замечание 2. Следствие из леммы 2 показывает, что при удалении области Ω от оси Z , параметрикс E_0 обеспечивает достаточно хорошее приближение к фундаментальному решению. Это приближение тем лучше, чем дальше область Ω удалена от оси Z .

Для построения собственно фундаментального решения можно воспользоваться итерационным процессом, при котором последующее приближение определяется через предыдущее по рекуррентной формуле («звездочка» означает свертку):

$$E_i = E_0 - E_{i-1} * \mathcal{R}E_0 \quad (i=1, 2, \dots) \quad (3.8)$$

Теорема 2. Если $\|\mathcal{R}E_0\|_{L^1} < 1$, то итерационный процесс (3.8) нормально сходится в Ω к фундаментальному решению E .

Доказательство. Условие теоремы обеспечивает нормальную сходимость ряда

$$\delta I - \mathcal{R}E_0 + \mathcal{R}E_0 * \mathcal{R}E_0 + \dots + (-1)^n \mathcal{R}E_0 * \dots * \mathcal{R}E_0 + \quad (3.9)$$

Рассматривая свертку этого ряда с E_0 , получаем фундаментальное решение E .

Полученные результаты позволяют оценить ошибку Δ , возникающую если в рассматриваемом ряде ограничиться конечным (n) числом членов ряда

$$\Delta \leq \|\mathcal{R}E_0\|^n (1 - \|\mathcal{R}E_0\|)^{-1} = \Delta_n \quad (3.10)$$

Замечание 3. Изложенный метод построения фундаментального решения непосредственно применим к цилиндрически анизотропным осесимметричным телам при условии, что либо мера области Ω мала, либо область расположена на достаточном расстоянии от оси Z , что обеспечивает сходимость итерационного процесса (3.8). Если эти условия нарушаются, то для построения фундаментального решения необходимо исследуемую область разбить на части, для каждой из которых должно выполняться неравенство $\|\mathcal{R}E_0\| < 1$.

4. Пример. Рассматривается задача определения параметрикса E_0 и операторной нормы невязки $\mathcal{R}E_0$ для цилиндрически анизотропного кругового тора, материал которого характеризуется следующими (безразмерными) упругими постоянными: $c_{11}=1$; $c_{22}=c_{33}=0,292$; $c_{13}=0,322$; $c_{23}=0,112$; $c_{44}=0,57$, отвечающими намоточному стеклопластику [5].

Удерживая конечное число гармоник в разложениях (3.3), (3.4), на первом этапе приближенно определялся параметрикс E_0 . На фиг. 1 приведен график, характеризующий спектральную L^∞ -норму ошибки δ в определении параметрикса E_0 :

$$\delta = \|A_0 \sim E_0 \sim I\|_{L^\infty} \quad (4.1)$$

в зависимости от удержанного в разложениях (3.3), (3.4) числа гармоник (N).

В силу теоремы Марцинкевича величина δ совпадает с операторной L^2 -нормой ошибки в определении E_0 . Ввиду однородности $A_0 \cdot E_0 \sim I$ по $|\xi|$ нулевой степени, оценку (4.1) естественно производить на единичной окружности в R^2 . Приведенный график показывает, что δ убывает с ростом N , причем в диапазоне $N=7 \div 10$ изменение δ происходит более, чем на порядок. В дальнейшем скорость убывания δ замедляется, а при дальнейшем росте N происходит ухудшение точности, вызванное некорректностью задачи суммирования ряда Фурье с приближенно (в метрике l^2) определенными коэффициентами. Штриховой линией на фиг. 1 показана зависимость затрат процессорного времени от N (t — в секундах).

На втором этапе расчетов по формуле (3.10) оценивалась мажоранта Δ_0 в определении собственно фундаментального решения. На фиг. 2 построен график изменения Δ_0 в зависимости от расстояния ρ от оси z до центра круга Ω . Диаметр Ω при этом оставался фиксированным и равным единице. Интегрирование по Ω в (3.7) осуществлялось с использованием квадратурных формул чебышевского типа с равномерным (в полярных координатах) шагом узлов и выделением интегрируемой особенности вида $|x-x_0|^{-1}$, $x, x_0 \in R^2$. Количество узлов (M) по окружностям и такое же по диаметру Ω варьировалось в диапазоне $6 \div 64$. Приемлемыми с точки зрения затрат процессорного времени и точности оказались значения $M=12 \div 18$. График на фиг. 2 показывает, что при $\rho < 4$ итерационный процесс (3.8) для исследуемого тела расходится: в этом случае необходимо разбить Ω на несколько более мелких областей. В случае, когда $\rho > 25$ параметрикс E_0 обеспечивает приближение к искомому фундаментальному решению E с относительной ошибкой менее 0,05.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kermandis Th.* Eine Integralgleichungsmethode zur Losung des Torsionsproblems des Umbrechungskorpers // *Acta Mech.* 1973. V. 16. N. 3/4. P. 175–181.
2. *Kermandis Th.* A numerical solution for axially symmetrical elasticity problems // *Intern. J. Solids and Struct.* 1975. V. 11. N. 4. P. 493–500.
3. *Cruse T. A., Snow D. W., Wilson R. B.* Numerical solutions in axisymmetric elasticity // *Comp. and Struct.* 1977. V. 7. N. 3. P. 445–451.
4. *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Мир, 1965. 379 с.
5. *Лезницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
6. *Стейн И.* Сингулярные интервалы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973. 342 с.

Москва

Поступила в редакцию
29.IV.1988