

УДК 531.36:531.31

© 1990 г.

М. Г. ВАСИН

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ГРАДИЕНТОМЕТРИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Получена новая форма представления основного уравнения инерциальной навигации с использованием результатов измерения тензора вторых производных от геопотенциала. Проведен качественный анализ динамических свойств рассматриваемых инерциальных систем. На основе оценки меры наблюдаемости осуществлен синтез простых алгоритмов коррекции при использовании внешних измерительных средств для предлагаемой структуры навигационной системы по информации о координатах местоположения и скорости движения и выполнена оценка точности этих алгоритмов. Даны практические рекомендации по использованию предлагаемых алгоритмов для определения инструментальных и методических погрешностей градиентометров.

1. Исходные соотношения. Решение задачи инерциальной навигации согласно подходу, изложенному в [1], сводится к анализу движения некоторой материальной точки (например, чувствительной массы пространственного ньютонометра) под действием известных сил. С одной стороны, в качестве такой силы выступает реакция на эту точку со стороны некоторой «пружины» (механической, электрической, магнитной и т. д. в соответствии с конструктивными особенностями ньютонометра). Эта реакция измеряется во время движения объекта. В качестве другой силы выступает гравитационная сила притяжения g_{ξ} . В традиционных инерциальных системах она формируется в бортовом вычислителе по текущей навигационной информации с использованием математической модели геопотенциала.

Ранее в [2] было предложено находить вектор силы притяжения посредством измерения гравитационными градиентометрами тензора T_{ξ} вторых производных от геопотенциала.

С точки зрения физики явления, возможность использования гравитационных градиентометров для проведения измерений во время движения объекта основана на различии пространственно-временных характеристик воздействия активных и гравитационных сил на некоторую механическую систему тел [3, 4]. Рассмотрим состав информации в результатах градиентометрических измерений.

Пусть измеритель тензора T_{ξ} , для определенности, построен из трех пар пространственных ньютонометров, лежащих вдоль осей ортогонального трехгранника на одинаковом расстоянии друг от друга. Введем в рассмотрение инерциальную систему координат $O\xi$.

Введем также приборный трехгранник Mz , который с помощью соответствующих технических средств моделирует инерциальный трехгранник $O\xi$. При отсутствии погрешностей его ориентации в инерциальном пространстве показания ньютонометров (с чувствительной массой, равной единице) равны $f_{\xi} = dv_{\xi}/dt - g_{\xi}$. Вычтем результаты измерений ньютонометров по соответствующим осям и сформируем следующий тензор:

$$\partial f_{\xi} / \partial \xi = \partial (dv_{\xi} / dt) / \partial \xi - \partial g_{\xi} / \partial \xi$$

Подставляя вместо абсолютного ускорения его выражение через переносное, поворотное и относительное, для $\partial(d\mathbf{v}_\xi/dt)/\partial\xi$ находим [5]

$$\partial(d\mathbf{v}_\xi/dt)/\partial\xi = d\overset{\sim}{\omega}_\xi^T/dt + \overset{\sim}{\omega}_\xi^2$$

где $\overset{\sim}{\omega}_\xi$ — антисимметричный тензор, составленный из компонент абсолютных угловых скоростей вращения градиентометрической системы

$$\overset{\sim}{\omega}_\xi = \begin{vmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{vmatrix}$$

Таким образом, результаты измерений с помощью указанных пространственных ньютометров содержат информацию о векторе удельной силы, угловом движении и тензоре вторых производных от геопотенциала.

В системе координат $O\xi$ вектор гравитационной силы притяжения можно представить в виде функции $\mathbf{g}_\xi = \mathbf{g}_\xi(\xi, t)$ и, следовательно,

$$d\mathbf{g}_\xi/dt = \partial\mathbf{g}_\xi/\partial\xi d\xi/dt + \partial\mathbf{g}_\xi/\partial t \quad (1.1)$$

Для интегрирования уравнения (1.1) требуется знать тензор вторых производных от геопотенциала $T_\xi = \partial\mathbf{g}_\xi/\partial\xi$ и частную производную $\partial\mathbf{g}_\xi/\partial t$. Поэтому в общем случае получение характеристик пространственной изменчивости гравитационного поля с помощью градиентометров не позволяет определить полную производную по времени $d\mathbf{g}_\xi/dt$.

В случае околоземной навигации, как показывают результаты гравиметрических измерений [6], с высокой степенью точности в задачах навигации можно не учитывать изменений со временем (приливных и неприливных) гравитационного поля.

Далее, как принято в теории гравитационного поля, будем считать геопотенциал аналитической функцией, регулярной на бесконечности. При этом зависимость от времени связана только с поворотом гравитационного поля вместе с вращением Земли

$$\partial\mathbf{g}_\xi/\partial t = \mathbf{u}_\xi^{\sim T} \mathbf{g}_\xi - T_\xi \mathbf{u}_\xi^{\sim T} \xi$$

где \mathbf{u}_ξ — вектор абсолютной угловой скорости вращения Земли.

Система дифференциальных уравнений, описывающих поведение реальной точки (объекта), при использовании результатов измерения тензора вторых производных от геопотенциала имеет вид [2]

$$d\xi/dt = \mathbf{v}_\xi, \quad d\mathbf{v}_\xi/dt = \mathbf{f}_\xi + \mathbf{g}_\xi \quad (1.2)$$

$$d\mathbf{g}_\xi/dt = T_\xi \mathbf{V}_\xi + \mathbf{u}_\xi^{\sim T} \mathbf{g}_\xi$$

где \mathbf{V}_ξ — вектор относительной скорости ($\mathbf{V}_\xi = \mathbf{v}_\xi - \mathbf{u}_\xi^{\sim T} \xi$).

Начальные условия имеют вид: $\xi(0) = \xi_0$, $\mathbf{v}_\xi(0) = \mathbf{v}_{\xi 0}$, $\mathbf{g}_\xi(0) = \mathbf{g}_{\xi 0}$. Система (1.2) является эквивалентной записью уравнений механики чувствительной массы пространственного ньютометра и отличается только характером используемой информации.

2. Преобразование основного уравнения. Рассмотрим положение устойчивого равновесия гантели в поле гравитационных сил. Очевидно, что это положение совпадает с касательной к силовой линии. В этом положении гравитационный момент \mathbf{M}_ξ , действующий на гантель, равен нулю $\mathbf{M}_\xi = 2\rho_\xi^{\sim T} \Delta\mathbf{g}_\xi = 0$. Здесь ρ_ξ есть радиус-вектор одной из масс относительно центра масс гантели, а $\Delta\mathbf{g}_\xi$ — вектор соответствующего приращения силы притяжения. Имеют место условие $\rho_\xi^T \rho_\xi = \text{const}$, выражающее постоянство плеча гантели, и условие $\Delta\mathbf{g}_\xi = T_\xi \rho_\xi \neq 0$, характеризующее невырожденность гравитационного поля Земли (для потенциала, регулярного на бесконечности, это всегда имеет место). Следовательно, $\Delta\mathbf{g}_\xi = \lambda \rho_\xi$, где λ — коэффициент пропорциональности. Таким образом, приходим к собственной задаче для определения направления гравитационной вертикали [7]:

$$T_\xi \mathbf{g}_\xi^0 = \lambda \mathbf{g}_\xi^0, \quad \mathbf{g}_\xi^{0T} \mathbf{g}_\xi^0 = 1, \quad \mathbf{g}_\xi^0 = \rho_\xi / \rho \quad (2.1)$$

Из (2.1) для нахождения собственного значения получаем алгебраическое уравнение

$$\lambda^3 + p\lambda + q = 0, \quad p = -\text{Sp}(T_{\xi}^2)/2, \quad q = -\text{Sp}(T_{\xi}^3)/3$$

Это следует из того, что вне притягивающих масс справедливо уравнение Лапласа $\text{Sp}(T_{\xi}) = 0$.

Несложно выяснить физический смысл собственного значения λ , соответствующего собственному вектору в направлении гравитационной вертикали. С этой целью вычислим производную от модуля силы притяжения по вектору ξ :

$$g^2 = g_{\xi}^T g_{\xi} \quad (2.2)$$

и поэтому

$$\partial g / \partial \xi = g_{\xi}^{0T} \partial g_{\xi} / \partial \xi = \lambda g_{\xi}^{0T}, \quad \partial g / \partial \xi = (\partial g / \partial \xi_1, \partial g / \partial \xi_2, \partial g / \partial \xi_3)$$

Видно, что $|\lambda| = \|(\partial g / \partial \xi)^T\| = [(\partial g / \partial \xi)(\partial g / \partial \xi)^T]^{1/2}$, т. е. собственное число, соответствующее направлению гравитационной вертикали, характеризует максимальную «скорость» изменения модуля силы притяжения в пространстве и примерно равно $3080E$, где $1E = 10^{-9} \text{ c}^{-2}$.

Теперь продифференцируем по времени выражение (2.2) и воспользуемся последним уравнением в (1.2):

$$\begin{aligned} dg/dt &= g_{\xi}^{0T} dg_{\xi}/dt = g_{\xi}^{0T} (T_{\xi} V_{\xi} + u_{\xi}^T g_{\xi}) = \\ &= \lambda V_{\xi}^T g_{\xi}^0 \end{aligned}$$

Таким образом, поведение реальной точки описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} d\xi/dt &= v_{\xi}, & dv_{\xi}/dt &= f_{\xi} + g g_{\xi}^0, \\ dg/dt &= \lambda V_{\xi}^T g_{\xi}^0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

с соответствующими начальными условиями для приведенной точки

$$\xi(0) = \xi_0, \quad v_{\xi}(0) = v_{\xi 0}, \quad g(0) = g_0$$

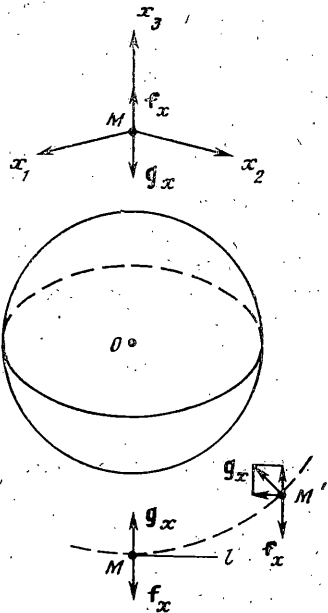
Здесь λ и g_{ξ}^0 находятся из решения собственной задачи (2.1).

Дадим физическую интерпретацию некоторых динамических свойств рассматриваемых инерциальных систем с бортовыми гравитационными градиентометрами. Здесь можно повторить рассуждения о поведении обычных инерциальных систем [8]. Пусть Земля является невращающейся сферой. Тогда тензор вторых производных от геопотенциала в системе координат Mx (фигура), связанной с местной вертикалью, равен

$$T_x = \partial g_x / \partial x = \begin{vmatrix} -\omega_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\omega_0^2 \end{vmatrix}$$

где $\omega_0 = (g/r)^{1/2}$ — частота Шулера. Допустим, что все измерения являются идеальными и точка M движется с постоянной скоростью v_0 в направлении оси Mx_3 . Имеет место равенство $|f_x| = |g_x|$ и $dg/dt = T_{33} v_0 = 2\omega_0^2 v_0$.

Пусть в бортовой вычислитель неправильно введена информация о скорости движения в начальный момент времени $t_0 = 0$ и пусть $\delta v_0 > 0$. Тогда для погрешности определения производной от модуля силы притя-



жения имеем

$$d\delta g/dt=2\omega_0^2\delta v_0>0$$

и, следовательно, сформированный в вычислителе модуль силы притяжения в момент времени t будет равен $|-g+\delta g|$, что меньше $|-g|$.

Таким образом, модельная точка (сформированный в вычислителе образ объекта) не находится в состоянии равновесия и как угодно быстро удаляется от реальной точки.

Следовательно, определение в вычислителе силы притяжения на основе интегрирования результатов градиентометрических измерений сохраняет неустойчивость вертикального канала. Для борьбы с расходимостью следует воспользоваться дополнительной информацией о высоте.

Рассмотрим теперь равномерное движение точки M по окружности. Предположим, что погрешность скорости движения модельной точки равна $\delta v_0>0$. Тогда сформированная в вычислителе сила притяжения через некоторый промежуток времени будет соответствовать положению точки M' (фигура). Поэтому для модельной точки M' возникает нескомпенсированная составляющая силы g_x , которая заставляет двигаться точку M' к M . Это также следует непосредственно из уравнения движения для малого перемещения M' вдоль оси Ml , имеющего вид $d^2\delta l/dt^2=\delta g_t=-\omega_0^2\delta l$. Соответствующая частота колебаний равна ω .

Следует отметить, что при отсутствии ошибок определения направления гравитационной вертикали вследствие ошибок навигации указанных колебаний не было бы. Это имеет место в динамических системах, поведение которых описывается уравнениями (2.3), поскольку здесь направление вертикали формируется непосредственно по результатам измерений как собственный вектор тензора вторых производных от геопотенциала без использования навигационной информации.

3. Уравнения ошибок. Рассмотрим второй тип навигационных систем с градиентометрами. Формирование в вычислителе навигационных параметров будет производиться с использованием следующей системы дифференциальных уравнений:

$$d\xi'/dt=v'_z, \quad dv'_z/dt=f'_z+g'g'_z \quad (3.1)$$

$$dg'/dt=\lambda'V_z'^T g'_z$$

с начальными условиями

$$\xi'(0)=\xi_0, \quad v'_z(0)=v_{z0}, \quad g'(0)=g_0$$

Здесь для λ' и g'_z имеем

$$T'_z g'_z = \lambda' g'_z, \quad g'_z{}^0 T'_z g'_z = 1 \quad (3.2)$$

Индексом z обозначаются величины, измеряемые в осях приборного трехгранника Oz , который в общем случае является неинерциальным вследствие его вращения с угловой скоростью дрейфа платформы, равной v_z .

Получим уравнения ошибок для рассматриваемой динамической системы. В соответствии с [1] разделим полные ошибки навигации на динамические и кинематические. Это позволит далее существенно упростить проведение выкладок. С этой целью спроектируем уравнения движения (2.3) на оси трехгранника Oz :

$$dz/dt=v_z \check{z} + v_z$$

$$dv_z/dt=v_z \check{v}_z + f_z + gg_z, \quad dg/dt=\lambda V_z^T g_z \quad (3.3)$$

Начальные условия для этих уравнений получаются в результате соответствующих преобразований исходных начальных условий. В процес-

се интегрирования уравнений (3.3) λ и g_z^0 находятся из решения собственной задачи для тензора T_z :

$$T_z g_z^0 = \lambda g_z^0, \quad g_z^{0T} g_z^0 = 1 \quad (3.4)$$

Вычтем из уравнений (3.1) выражения (3.3) и пренебрежем членами второго порядка малости

$$d\delta\xi/dt = \delta v_{\xi} - \check{v}_z \xi \quad (3.5)$$

$$d\delta v_{\xi}/dt = \Delta f_{\xi} + \delta g g_{\xi}^0 + g \delta g_{\xi}^0 - \check{v}_z \check{v}_{\xi}$$

$$d\delta g/dt = \delta \lambda V_{\xi}^T g_{\xi}^0 + \lambda \delta V_{\xi}^T g_{\xi}^0 + \lambda V_{\xi}^T \delta g_{\xi}^0$$

Здесь вариации $\delta\lambda$ и δg_{ξ}^0 находятся из решения системы алгебраических уравнений

$$\delta\lambda = g_{\xi}^{0T} \Delta T_z g_{\xi}^0 \quad (3.6)$$

$$(\Delta T_z - \delta\lambda \cdot I) g_{\xi}^0 = -(T_z - \lambda \cdot I) \delta g_{\xi}^0, \quad \delta g_{\xi}^{0T} g_{\xi}^0 = 0$$

которые получаются с использованием формул (3.2) и (3.4). Для полных ошибок находим

$$\Delta \xi = \delta \xi + \beta_{\xi} \check{v}_{\xi}, \quad \Delta v_{\xi} = \delta v_{\xi} + \beta_{\xi} \check{v}_{\xi}$$

$$\Delta g_{\xi} = \delta g_{\xi} + \beta_{\xi} \check{g}_{\xi}$$

где β_{ξ} — угол поворота платформенного трехгранника Mz относительно инерциальной системы координат $O\xi$.

Рассмотрим задачу коррекции инерциально-градиентометрической навигационной системы данного типа и проведем анализ ее наблюдаемости по дополнительной навигационной информации.

С целью получения конкретного алгоритма коррекции предположим [1], что: инструментальные погрешности на интервалах коррекции можно считать постоянными; Земля является сферой; сопутствующий трехгранник является азимутально-свободным; движение объекта происходит по «стационарным» траекториям на примерно постоянной высоте.

Следует отметить, что предположение о сферичности распространяется только на уравнения ошибок (в модельных уравнениях использована, например, эллиптическая форма Земли). Это с учетом вводимого ниже малого параметра μ приводит в линеаризованных уравнениях к ошибкам более высокого порядка малости, которыми можно пренебречь.

В результате преобразования уравнений ошибок (3.5) и выражений (3.6) в систему координат Ox , вращающуюся с абсолютной угловой скоростью ω_x , приходим к следующим соотношениям:

$$d\delta x/dt = \check{\omega}_x \delta x + \delta v_x - \check{v}_x x \quad (3.7)$$

$$d\delta v_x/dt = \omega_x \check{v}_x + g \delta g_x^0 + \delta g g_x^0 + \Delta f_x - \check{v}_x \check{v}_x$$

$$d\delta g/dt = \delta \lambda V_x^T g_x^0 + \lambda \delta V_x^T g_x^0 + \lambda V_x^T \delta g_x^0$$

$$d\beta_x/dt = \omega_x \check{\beta}_x + \check{v}_x$$

$$\delta \lambda = g_x^{0T} \Delta T_x g_x^0, \quad (\Delta T_x - \delta \lambda \cdot I) g_x^0 = -(T_x - \lambda \cdot I) \delta g_x^0, \quad \delta g_x^{0T} g_x^0 = 0 \quad (3.8)$$

Последнее уравнение в (3.7) описывает поведение приборного трехгранника относительно модельного. Для вариации относительной скорости имеем

$$\delta V_x = \delta v_x - \delta x \check{u}_x + x \check{\beta}_x \check{u}_x$$

Динамику инерциальной двухкомпонентной навигационной системы с бортовыми гравитационными градиентометрами, которая описывается уравнениями (3.7) и (3.8), с учетом вышеприведенных предположений в проекциях на оси трехгранника Ox , ось Ox_3 которого направлена по вертикали и $\omega_3=0$, можно описать в безразмерном виде следующим образом:

$$\begin{aligned} d\alpha_1/d\tau &= \pi_1 - \mu\omega_1^* \zeta + v_1^*, & d\alpha_2/d\tau &= \pi_2 - \mu\omega_2^* \zeta + v_2^* \\ d\pi_1/d\tau &= \mu^2\omega_1^* (\omega_1^* \alpha_1 + \omega_2^* \alpha_2) + \delta_1 + \varepsilon_1 - \mu v_3^* \omega_2^* + (v_1^* - \mu\omega_1^*) d\zeta^*/d\tau \\ d\pi_2/d\tau &= \mu^2\omega_2^* (\omega_1^* \alpha_1 + \omega_2^* \alpha_2) + \delta_2 + \varepsilon_2 + \mu v_3^* \omega_1^* + (v_2^* - \mu\omega_2^*) d\zeta^*/d\tau \\ d\beta_1^*/d\tau &= \mu(-\omega_2^* \beta_3^* + v_1^*), & d\beta_2^*/d\tau &= \mu(\omega_1^* \beta_3^* + v_2^*) \\ d\beta_3^*/d\tau &= \mu(\omega_2^* \beta_1^* - \omega_1^* \beta_2^* + v_3^*) \end{aligned} \quad (3.9)$$

В системе дифференциальных уравнений (3.9) использованы обозначения

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\delta x_2/r, & \alpha_2 &= \delta x_1/r, & \pi_1 &= -\delta v_2/(r\omega_0), & \pi_2 &= \delta v_1/(r\omega_0) \\ \omega_1 &= -v_2/r, & \omega_2 &= v_1/r, & \mu &= \omega_0^{-1} \max(\omega_1^2 + \omega_2^2)^{1/2}, \\ \omega_j/\omega_0 &= \mu\omega_j^*, & v_j/\omega_0 &= v_j^* \\ \beta_j^* &= \mu\beta_j, & \varepsilon_1 &= -\Delta f_2/(r\omega_0^2), & \varepsilon_2 &= \Delta f_1/(r\omega_0^2) \\ \delta_1 &= \Delta T_{23}/(3\omega_0^2), & \delta_2 &= -\Delta T_{13}/(3\omega_0^2), & \zeta &= \Delta h/r, \\ d\zeta^*/d\tau &= (d\Delta h/dt)/(r\omega_0) \end{aligned}$$

Здесь Δh и $d\Delta h/dt$ — ошибки формирования высотомерной информации. Дифференцирование в (3.9) осуществляется по безразмерному времени $\tau = \omega_0 t$.

В динамической системе, описываемой уравнениями ошибок (3.9), отсутствуют колебания приборной вертикали. Это согласуется с результатами качественного анализа, проведенного выше. Особенностью рассматриваемой динамической системы является быстрое нарастание ошибок навигации из-за погрешностей используемых ньютонометров и градиентометров.

4. Наблюдаемость по позиционной информации. Проанализируем наблюдаемость указанной динамической системы при использовании позиционной информации от внешних измерительных средств. Корректирующий вектор в этом случае равен

$$\begin{aligned} z_1^* &= \mu\alpha_1 - \beta_1^* + w_1^*, & z_2^* &= \mu\alpha_2 - \beta_2^* + w_2^* \\ w_1^* &= \mu w_2^M, & w_2^* &= -\mu w_1^M \cos \varphi' \end{aligned}$$

Здесь w_i^M ($i=1, 2$) — ошибки внешних измерительных средств в проекциях на оси Ox_i , а φ' — модельное значение широты.

Выделим в соответствии с методикой [1] наблюдаемые переменные

$$\begin{aligned} x_1 &= \mu\alpha_1 - \beta_1^* + w_1^*, & x_2 &= \pi_1 + \omega_2^* \beta_3^* - \mu\omega_1^* \zeta \\ x_3 &= \delta_1 + \varepsilon_1 + (v_1^* - \mu\omega_1^*) d\zeta^*/d\tau, & x_4 &= \mu\alpha_2 - \beta_2^* + w_2^* \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$x_5 = \pi_2 - \omega_1^* \beta_3^* - \mu\omega_2^* \zeta, \quad x_6 = \delta_2 + \varepsilon_2 + (v_2^* - \mu\omega_2^*) d\zeta^*/d\tau$$

которые с точностью до малых второго порядка удовлетворяют системе

дифференциальных уравнений

$$dx_1/d\tau = \mu x_2$$

$$dx_2/d\tau = x_3 - \mu \omega_2^* (\omega_2^* x_1 - \omega_1^* x_4) + d\omega_2^*/d\tau \beta_3^*$$

$$dx_3/d\tau = 0 \quad (z_1^* = x_1), \quad dx_4/d\tau = \mu x_5$$

$$dx_5/d\tau = x_6 + \mu \omega_1^* (\omega_2^* x_1 - \omega_1^* x_4) + d\omega_1^*/d\tau \beta_3^*$$

$$dx_6/d\tau = 0 \quad (z_2^* = x_4)$$

Из структуры полученных уравнений следует наблюдаемость переменных x_i ($i=1, 2, \dots, 6$), причем мера наблюдаемости переменных x_1 и x_4 равна 1, а переменных x_2, x_3, x_5 и x_6 имеет порядок μ . Это в известной степени аналогично результатам оценки наблюдаемости по позиционной информации в случае традиционных инерциальных систем без гравитационных градиентометров [1].

В соответствии с теорией построения асимптотического фильтра [1] оценку x_i^+ ($i=1, 2, \dots, 6$) будем производить с помощью алгоритма, допускающего декомпозицию уравнений ошибок. Тогда оценка для первой группы переменных (4.1) имеет вид (для второй группы оценка строится аналогично)

$$\begin{aligned} dx_1^+/d\tau &= \mu x_2^+ + K_1^M (z_1^* - x_1^+) \\ dx_2^+/d\tau &= x_3^+ - \mu \omega_2^* (\omega_2^* z_1^* - \omega_1^* z_2^*) + K_2^M (z_1^* - x_1^+) \\ dx_3^+/d\tau &= K_3^M (z_1^* - x_1^+) \end{aligned} \quad (4.2)$$

с начальными условиями

$$x_1^+(0) = z_1^*(0), \quad x_2^+(0) = x_3^+(0) = 0$$

Учитывая, что в общем случае реальные позиционные измерения могут содержать высокочастотный шум

$$z_1^* = x_1 + \mu \xi_1^*, \quad z_2^* = x_2 + \mu \xi_2^*$$

$$M[\xi_i^*(t) \xi_i^*(\tau)] = \rho_M^2 \delta(t-\tau) \quad (i=1, 2)$$

то, согласно уравнениям (4.1) и (4.2), получим уравнения ошибки оценки

$$\begin{aligned} d\Delta x_1/d\tau &= -K_1^M \Delta x_1 + \mu \Delta x_2 - \mu K_1^M \xi_1^* \\ d\Delta x_2/d\tau &= -K_2^M \Delta x_1 + \Delta x_3 - \mu K_2^M \xi_1^* + d\omega_2^*/d\tau \beta_3^* \\ d\Delta x_3/d\tau &= -K_3^M \Delta x_1 - \mu K_3^M \xi_1^* \end{aligned} \quad (4.3)$$

с соответствующими начальными условиями

$$\Delta x_1(0) = -\mu \xi_1^*(0), \quad \Delta x_2(0) = x_2(0), \quad \Delta x_3(0) = x_3(0).$$

Коэффициенты усиления K_1^M, K_2^M, K_3^M выберем так, чтобы корни характеристического уравнения данной динамической системы все были бы равны $(-\lambda_0)$, где $\lambda_0 > 0$. Это в результате дает $K_1^M = 3\lambda_0, K_2^M = 3\lambda_0^2/\mu, K_3^M = \lambda_0^3/\mu$.

Несложно убедиться, что элементарные делители матрицы

$$\begin{vmatrix} \lambda + K_1^M & -\mu & 0 \\ K_2^M & \lambda & -1 \\ K_3^M & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

равны: $E_1 = E_2 = 1$, $E_3 = (\lambda + \lambda_0)^3$ и, следовательно, нормальная форма Жордана для исходной матрицы имеет вид

$$\begin{vmatrix} -\lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda_0 \end{vmatrix}$$

Отсюда решение однородной системы уравнений для (4.3) равно

$$\begin{aligned} \Delta x_1(\tau) &= \{\Delta x_{10}(1 - 2\lambda_0\tau + \lambda_0^2\tau^2/2) + \Delta x_{20}(\mu\tau - \mu\lambda_0\tau^2/2) + \Delta x_{30}(\mu\tau^2/2)\}e^{-\lambda_0\tau} \\ \Delta x_2(\tau) &= \{\Delta x_{10}(-3\lambda_0^2\tau + \lambda_0^3\tau^2)\mu^{-1} + \Delta x_{20}(1 + \lambda_0\tau - \lambda_0^2\tau^2) + \Delta x_{30}(\tau + \lambda_0\tau^2)\}e^{-\lambda_0\tau} \\ \Delta x_3(\tau) &= \{\Delta x_{10}(-\lambda_0^4\tau + \lambda_0^4\tau^2/2)\mu^{-1} - \Delta x_{20}(\lambda_0^3\tau^2/2) + \Delta x_{30}(1 + \lambda_0\tau + \lambda_0^2\tau^2/2)\}e^{-\lambda_0\tau} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Теперь оценим ошибки системы (4.3), связанные с наличием в правых частях члена $d\omega_2^*/d\tau\beta_3^*$, а также белого шума ξ_1^* .

На «стационарных» траекториях величина $d\omega_2^*/d\tau\beta_3^*$ является медленно меняющейся функцией времени [1]. Поэтому вклад в установившуюся ошибку оценки можно приближенно найти из системы алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \mu \Delta x_2^0 - K_1^M \Delta x_1^0 &= 0 \\ \Delta x_3^0 - K_2^M \Delta x_1^0 + d\omega_2^*/d\tau\beta_3^* &= 0 \\ -K_3^M \Delta x_1^0 &= 0 \end{aligned}$$

Поэтому

$$\Delta x_1^0 = \Delta x_2^0 = 0, \quad \Delta x_3^0 = -d\omega_2^*/d\tau\beta_3^* \quad (4.5)$$

С использованием передаточных функций получим для каждой переменной Δx_i ($i=1, 2, 3$) дисперсии установившихся значений ошибок оценки, обусловленные влиянием белого шума

$$D_1^M = 33/16 \mu^2 \lambda_0 \rho_M^2, \quad D_2^M = 7/4 \lambda_0^3 \rho_M^2, \quad D_3^M = 3/16 \lambda_0^5 \rho_M^2 \quad (4.6)$$

Согласно полученным выражениям для установившихся ошибок оценивания следует, что ошибки из-за наличия в правой части уравнений (4.3) члена $d\omega_2^*/d\tau\beta_3^*$ не зависят от параметра λ_0 . От этого параметра λ_0 зависят только дисперсии D_i^M ($i=1, 2, 3$). Поэтому величину λ_0 следует выбирать из условия получения максимальной скорости затухания с использованием формул (4.4) и при удовлетворении заданных требований на величины дисперсий установившихся случайных ошибок. Таким образом минимизируется ошибка оценивания для заданного промежутка времени.

Рассмотрим задачу по определению погрешностей используемых градиентометров. Используя соответствующие выражения для начальных условий системы дифференциальных уравнений (4.3), последнюю формулу в (4.4) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta x_3(y) &= \xi_1^*(0) \lambda_0^2 \gamma(y) - x_{20} \lambda_0 \beta(y) + x_{30} \alpha(y) \\ \alpha(y) &= (1 + y + y^2/2) e^{-y}, \quad \beta(y) = 1/2 y^2 e^{-y} \\ \gamma(y) &= (-y + y^2/2) e^{-y}, \quad y = \lambda_0 \tau \end{aligned}$$

где $\xi_1^*(0)$ — величина высокочастотной составляющей ошибки измерения координат местоположения внешнего корректирующего средства в начальный момент времени, а x_{20} и x_{30} — начальные значения, вычисляемые в соответствии с выражениями (4.1).

Положим, что характерные значения переменных $\alpha_i, \pi_i, \varepsilon_i, \nu_j^*, \beta_j^*$

по порядку величины равны ρ [1]. Этот же порядок имеют и переменные ζ и $d\zeta^*/d\tau$. Учитывая это, из формул (4.1) для x_3 следует, что ее оценка практически является искомой оценкой переменной δ_1 .

Пусть внешние позиционные измерения удовлетворяют условию $\rho_M = \varepsilon\rho$, где $1 > \varepsilon > 0$. Исходя из результатов расчета функций $\alpha(y)$, $\beta(y)$ и $\gamma(y)$, следует, что, например, для $\lambda_0 = 3$, $\tau = 2$ первоначальная погрешность Δx_3 уменьшается более чем на порядок. При этом для $\varepsilon \sim 0,1$ обеспечивается ошибка оценивания, характеризуемая величиной $D_3^{1/2}$, которая находится на уровне ρ . В указанных оценках полагалось, что среднее ускорение на интервале коррекции примерно равно $0,1 g$. Такие же результаты справедливы и для переменной $x_6(\delta_2)$.

Следует отметить, что так мы получим оценки двух недиагональных элементов тензора, а именно ΔT_{13} и ΔT_{23} . Поэтому с целью определения оставшихся элементов тензора ΔT нужно проводить соответствующие измерения, используя свойства преобразования элементов тензора при осуществлении поворотов, а именно: поворотов объекта относительно стабилизированной платформы для определения методических погрешностей, обусловленных собственными гравитационными эффектами от масс объекта [9], поворотов платформы для определения инструментальных погрешностей градиентометрической системы [10].

5. Наблюдаемость по скоростной информации. Корректирующий вектор при формировании дополнительной скоростной информации с помощью внешних (относительно самого объекта) технических средств имеет вид

$$z_1 = d\alpha_1/d\tau - (d\beta_1^*/d\tau)/\mu + w_1$$

$$z_2 = d\alpha_2/d\tau - (d\beta_2^*/d\tau)/\mu + w_2$$

где w_i ($i=1, 2$) — ошибки определения скорости в проекциях на оси трехгранника Ox_i . Выполним оценку наблюдаемых переменных

$$y_1 = \pi_1 \omega_2^* \beta_3^* - \mu \omega_1^* \zeta + w_1$$

$$y_2 = \delta_1 + \varepsilon_1 + (\nu_1^* - \mu \omega_1^*) d\zeta^*/d\tau + \mu \omega_2^* (\omega_2^* \beta_1^* - \omega_1^* \beta_2^*)$$

$$y_3 = \pi_2 - \omega_1^* \beta_3^* - \mu \omega_2^* \zeta + w_2$$

$$y_4 = \delta_2 + \varepsilon_2 + (\nu_2^* - \mu \omega_2^*) d\zeta^*/d\tau - \mu \omega_1^* (\omega_2^* \beta_1^* - \omega_1^* \beta_2^*)$$

удовлетворяющих (с точностью до малых второго порядка) системе дифференциальных уравнений

$$dy_1/d\tau = y_2 + d\omega_2^*/d\tau \beta_3^*, \quad dy_2/d\tau = 0 \quad (z_1 = y_1)$$

$$dy_3/d\tau = y_4 + d\omega_1^*/d\tau \beta_3^*, \quad dy_4/d\tau = 0 \quad (z_2 = y_3)$$

с помощью алгоритма, который для первой подсистемы имеет вид (аналогично и для второй подсистемы)

$$dy_1^+/d\tau = y_2^+ + K_1(z_1 - y_1^+), \quad dy_2^+/d\tau = K_2(z_1 - y_1^+)$$

В качестве начальных условий примем следующие: $y_1^+(0) = z_1(0)$, $y_2^+(0) = 0$.

Коэффициенты усиления K_i ($i=1, 2$) выберем так, чтобы корни характеристического уравнения были бы равны $(-\lambda_0)$, где $\lambda_0 > 0$: $K_1 = 2\lambda_0$, $K_2 = \lambda_0^2$.

Наличие члена $d\omega_2^*/d\tau \beta_3^*$, не учитываемого в алгоритме оценки, будет приводить к ошибкам, равным $\Delta y_1^0 = 0$, $\Delta y_2^0 = -d\omega_2^*/d\tau \beta_3^*$.

Дисперсии установившихся ошибок оценки, обусловленные возможным присутствием высокочастотного шума в скоростной информации, рав-

ны $D_1 = {}^5/4 \lambda_0 \rho_v^2$, $D_2 = {}^1/4 \lambda_0^3 \rho_v^2$, где ρ_v^2 — интенсивность шума ξ_i в результатах измерения скорости $M[\xi_i(t) \xi_i(\tau)] = \rho_v^2 \delta(t-\tau)$ ($i=1, 2$).

Вычисления показывают, что, например, для $\lambda_0=3$, $\tau=2$ обеспечивает уменьшение первоначального значения Δy_2 в несколько десятков раз при использовании корректирующих средств, удовлетворяющих условию $\rho_v = \varepsilon \rho$, где $\varepsilon \sim 0,1$.

Приведенный способ представления основного уравнения инерциальной навигации можно использовать для определения инструментальных и методических погрешностей гравитационных градиентометров непосредственно в процессе движения объекта. С этой целью целесообразно использовать различные технические средства (неинерциальные) для нахождения координат местоположения, а также скорости движения объектов (автомобиль, самолет, корабль и др.). Это открывает возможности по разработке алгоритмических методов повышения основных характеристик рассматриваемых измерителей вторых производных от гравитационного потенциала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Парусников Н. А., Морозов В. М., Борзов В. И. Задача коррекции в инерциальной навигации. Изд-во МГУ, 1982. 174 с.
2. Britting K. R., Madden S. J., Hildebrant R. A. The impact of gradiometer techniques on the performance of inertial navigation systems // AIAA Paper. 1972. No. 72-850. P. 1-9.
3. Forward R. L. Gravity sensors and the principle of equivalence // IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems. 1981. V. AES-17. No. 4. P. 511-519.
4. Селезнев В. П. Навигационные устройства. М.: Машиностроение, 1974. 600 с.
5. Reinhardt V. S., Bun F. O., Turneaure J. P. A supersensitive accelerometer for spacecraft gradiometry // IEEE PLANS'82: Position Location and Navigation Symp. Record, Atlantic City, 1982. N. Y.: IEEE, 1982. P. 279-288.
6. Юзефович А. П., Огородова Л. В. Гравиметрия. М.: Недра, 1980. 319 с.
7. Дизель Дж. Новый метод построения вертикали с использованием градиента гравитационного поля // Ракетн. техника и космонавтика. 1964. № 7. С. 30-40.
8. Девянин Е. А., Парусников Н. А. О лагранжевой форме уравнений инерциальной навигации // Инж. ж. МТТ. 1968. № 2. С. 22-25.
9. Molny M. J., Summer D. L., Weiss J. D. Ship-gradient effects on vertical deflection estimation capability of a gravity gradiometer // IEEE PLANS'82: Position Location and Navigation Symp. Record, Atlantic City, 1982. N. Y.: IEEE, 1982. P. 395-398.
10. Pelka E. J., DeBra D. B. The effects of relative instrument orientation upon gravity gradiometer system performance // J. Guidance and Control. 1979. V. 2. No. 1. P. 18-24.

Москва

Поступила в редакцию
28.X.1988