

Ш. А. МУХАМЕДИЕВ

ТЕНЗОРЫ ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА И УНИВЕРСАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Проблема описания на континуальном уровне равновесия, движения и взаимодействия неоднородностей, способных перемещаться по частицам среды, превращается в отдельную область механики твердого деформируемого тела. Мы употребляем здесь широкое толкование слова «неоднородность», понимая под ним точечные дефекты и дислокации в кристаллической решетке, объемные включения, поверхности нарушения сплошности материала и т. д. История проблемы восходит к концу прошлого столетия (см. обзор [1]). Эшелби [2] в рамках линейной теории упругости ввел концепцию силы, действующей на неоднородность. Эта сила для широкого класса неоднородностей выражалась через тензор, который впоследствии [1, 3] по аналогии с терминологией теории поля был назван Эшелби тензором энергии-импульса. Обобщения на случай конечных деформаций упругой среды проводились в [1, 3-5].

Столь долгая история проблемы позволяет сделать некоторые заключения о тенденциях развития исследований. Мы ограничимся упоминанием лишь некоторых работ. Имеющиеся подходы к решению проблемы можно условно разделить на фундаментальный и прикладной. Фундаментальный подход присущ работам (например, [1-5]), обобщающие результаты которых справедливы для широкого класса неоднородностей произвольной природы. В работах прикладного характера моделируются вполне конкретные физические ситуации, а методы механики сплошной среды используются в качестве инструмента анализа. В свою очередь работы прикладного характера можно классифицировать способом, более общим, чем просто по физической природе изучаемой неоднородности. Например, микроскопические неоднородности удобно подразделить по признаку наличия или отсутствия массообмена через ограничивающую неоднородность сингулярную поверхность (поверхность разрыва некоторых характеристик процесса). Примером сингулярной поверхности без массообмена служит трещина — поверхность разрыва перемещений, края которой могут двигаться по материалу. В основе энергетических подходов, развиваемых в механике трещин [6-8], явным или неявным образом присутствует концепция тензора энергии-импульса.

К задаче формулировки условий на сингулярной поверхности с массообменом можно прийти, моделируя физические явления совершенно разной природы. Большинство исследований прикладного характера, посвященных этой задаче, исходило из диктуемой потребностями наук о Земле и металлургии необходимости континуального описания фазовых переходов. Соответствующая группа работ ([9-14] и многие другие) составила целое направление, которое для краткости назовем «фазовым». Целью многих работ этого направления было обобщение классических результатов Гиббса [15] по фазовым равновесиям в жидкостях на случай, когда хотя бы одна из фаз является твердым телом (как правило упругим).

Характеризуя фазовое направление в целом, следует отметить его относительную замкнутость «на себя», выражающуюся, например, в отсутствии в соответствующих работах ссылок на работы других направлений. Это обстоятельство приводит, в частности, к отсутствию сравнения с результатами, полученными для других типов неоднородностей и надежнее обеспеченными экспериментальной проверкой. (В сущности единственным критерием адекватности в работах фазового направления является непротиворечивость результатов соответствующим результатам для жидкостей.) Известную роль в такой изолированности фазового направления играет, на наш взгляд, принятая здесь в последнее время терминология взамен более общей и ранее принятой терминологии в механике неоднородностей.

В настоящей работе на основе вариационного уравнения энергии выводятся универсальные (без предварительной фиксации определяющих соотношений материала) условия равновесия сингулярных поверхностей с массообменом. Рассматриваются различные типы сингулярных поверхностей. На основе сравнения с результатами механики трещин исследуется вопрос об учете поверхностной энергии. Обсуждаются вопросы терминологии и классификации. Сингулярную поверхность можно трактовать как поверхность раздела фаз. Возможны и другие интерпретации (например, фронт рассеянного разрушения).

1. Рассмотрим отсчетную κ , актуальную χ и варьированную (возмущенную) $\chi + \delta\chi$ конфигурации некоторого тела B с границей ∂B , состоящего из одних и тех же частиц. Предполагается, что в κ выбрана гладкая арифметизация материальных точек x_κ , индуцирующая при кусочно-гладких отображениях координаты в других конфигурациях. При отображении $\kappa \rightarrow \chi$ материальная точка x_κ отображается в точку x_χ пространства, элементарные материальные элементы ориентированной площади ds_κ и объема $d\kappa$ преобразуются в ds_χ и $d\chi$. При варьировании $\chi \rightarrow \chi + \delta\chi$ точка x_χ занимает место $x_\chi + \delta x_\chi$ (δx_χ — бесконечно малый виртуальный пространственный вектор). Конфигурации κ^* , χ^* и $(\chi + \delta\chi)^*$ любого подтела $B^* \subset B$ рассматриваются как подобласти конфигураций κ , χ и $\chi + \delta\chi$ с границами $\partial\kappa^*$, $\partial\chi^*$ и $\partial(\chi + \delta\chi)^*$.

В дальнейшем в целях сокращения объема записей вместо букв и индексов κ и χ , обозначающих принадлежность величины к той или иной конфигурации, будут иногда использоваться первые буквы греческого алфавита $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. В соответствующих формулах или выражениях вместо $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ можно подставить любую из букв κ или χ , но так, чтобы каждой из букв $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, сколько раз она ни встречается в данной формуле или выражении, соответствовала либо κ , либо χ . Величины f , определенные на $\partial\alpha^*$, будем в случае надобности помечать верхним индексом: $f^{\partial\alpha^*}$. Если f — функция, определенная в области, то под $f^{\partial\alpha^*}$ понимается ее предельное значение при стремлении точки области к соответствующей границе. Предположим, что граничные элементы $ds_\kappa^{\partial\kappa^*}$ и $ds_\chi^{\partial\chi^*}$ ориентированы по направлению внешней нормали к областям κ^* и χ^* . Обозначим значками \cdot, \cdot, \otimes , соответственно, операции скалярного, двойного скалярного и тензорного умножения, индексом τ — операцию транспонирования тензора второго ранга.

Известные [16, 17] кинематические соотношения во введенных обозначениях примут вид

$$\frac{ds_\alpha}{d\alpha} = (\nabla_\alpha \otimes x_\beta) \cdot \frac{ds_\beta}{d\beta}, \quad (\nabla_\alpha \otimes x_\beta) \cdot (\nabla_\beta \otimes x_\alpha) = I_\alpha \quad (1.1)$$

Здесь I_α — метрический тензор, ∇_α — дифференциальный векторный набла-оператор Гамильтона [16] в конфигурации α .

Пусть в теле B расположена сингулярная поверхность σ с (двумерными) конфигурациями σ_κ и σ_χ соответственно в κ и χ . Для простоты примем, что σ — одновязна и разделяет B на две части B^+ и B^- . Предположим, что в конфигурации α поверхность σ_α ориентирована векторным полем единичных нормалей n_α , направленных от α^- к α^+ , $d\sigma_\alpha = n_\alpha d\sigma_\alpha \rightarrow$ ориентированный элемент площади на σ_α . Поверхность σ_α совпадает с участками $\partial\alpha^\pm \setminus (\partial\alpha^\pm \cap \partial\alpha)$ границ подтел B^\pm . Таким образом

$$ds_\alpha^{\partial\alpha^\pm} = ds_\alpha^{\sigma_\alpha}, \quad x_\alpha^{\partial\alpha^\pm} \in \partial\alpha^\pm \cap \partial\alpha \quad (1.2)$$

$$ds_\alpha^{\sigma_\alpha} = -ds_\alpha^{\partial\alpha^+} = d\sigma_\alpha, \quad x_\alpha^{\sigma_\alpha} = x_\alpha^{\partial\alpha^\pm} \in \partial\alpha^\pm \setminus (\partial\alpha^\pm \cap \partial\alpha)$$

Здесь и в дальнейшем, если в выражениях, или соотношениях в верхних индексах встречаются символы \pm или \mp , то выбираются одновременно либо верхние знаки, либо нижние. Через x_α^σ обозначены точки поверхности σ_α . Описанная конструкция для тела B , когда σ пересекает ∂B , изображена на фиг. 1.

Введем обозначения для объемных плотностей массы dm и актуальной свободной энергии dw материального элемента

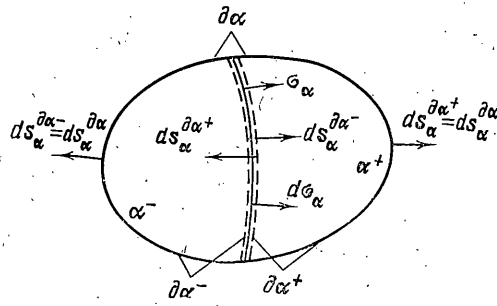
$$dm = \rho_\kappa d\kappa = \rho_\chi d\chi, \quad dw = w_\kappa d\kappa = w_\chi d\chi \quad (1.3)$$

а также для скачка и среднего значения функции на σ

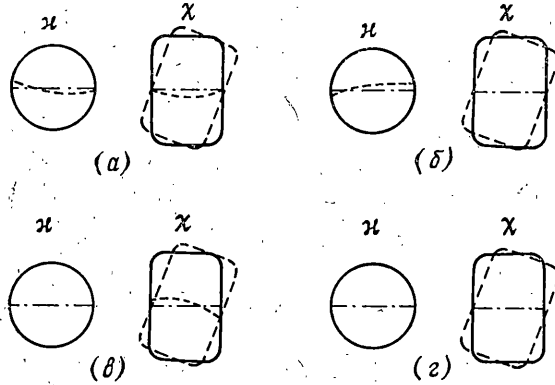
$$[f]_\alpha = f^{\partial\alpha^+} - f^{\partial\alpha^-}, \quad \langle f \rangle_\alpha = 1/2 (f^{\partial\alpha^+} + f^{\partial\alpha^-}) \quad (1.4)$$

Предположим, что отображение $x_\kappa \rightarrow x_\chi$, теряя гладкость, остается непрерывным на σ , т. е.

$$[x_\kappa]_\sigma = 0 \Rightarrow [x_\chi]_\sigma = 0, \quad \forall x_\alpha^\sigma \quad (1.5)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

и, кроме того, κ удовлетворяет условию

$$[\rho_\kappa]_\kappa = 0, \forall \mathbf{x}_\kappa^\sigma \quad (1.6)$$

Условия (1.5), (1.6) являются фактически ограничениями на выбор отсчетной конфигурации. Для градиента отображения $\alpha \rightarrow \beta$ из (1.5) справедливо [13, 17]:

$$\mathbf{I}_\alpha^\sigma \cdot [\nabla_\alpha \otimes \mathbf{x}_\beta]_\alpha = [\nabla_\alpha^\sigma \otimes \mathbf{x}_\beta]_\alpha = 0 \quad (\mathbf{I}_\alpha^\sigma = \mathbf{I}_\alpha - \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha, \nabla_\alpha^\sigma = \mathbf{I}_\alpha^\sigma \cdot \nabla_\alpha) \quad (1.7)$$

Здесь \mathbf{I}_α^σ — метрический тензор поверхности σ_α , ∇_α^σ — поверхностный набла-оператор.

Из условия (1.7) для любого тензора второго ранга \mathbf{C} выполняется тождество

$$d\sigma_\alpha \cdot \mathbf{C} \cdot [\nabla_\alpha \otimes \mathbf{x}_\beta]_\alpha^T = (\mathbf{C} : [\nabla_\alpha \otimes \mathbf{x}_\beta]_\alpha) d\sigma_\alpha \quad (1.8)$$

Пусть \mathbf{C} представляет собой скачок на σ_α какого-либо тензора \mathbf{A} ($\mathbf{C} = =[\mathbf{A}]_\alpha$). Если вектор $d\sigma_\alpha \cdot \mathbf{A}$ непрерывен на σ_α , то из (1.8) скачок $[\mathbf{A}]_\alpha$ ортогонален $[\nabla_\alpha \otimes \mathbf{x}_\beta]_\alpha$, т. е.

$$d\sigma_\alpha \cdot [\mathbf{A}]_\alpha = 0 \Rightarrow [\mathbf{A}]_\alpha : [\nabla_\alpha \otimes \mathbf{x}_\beta]_\alpha = 0 \quad (1.9)$$

При отображении $\chi \rightarrow \chi + \delta\chi$ в общем случае варьируются положение σ в пространстве ($\sigma_\chi \rightarrow \sigma_\chi + \delta\sigma_\chi$) и в материале ($\sigma_\kappa \rightarrow \sigma_\kappa + \delta\sigma_\kappa$) (фиг. 2, а). Для произвольного подтела $B^* \subset B$ изменяется его пространственная граница ($\partial\chi^* \rightarrow \partial(\chi + \delta\chi)^*$), а в случае, если в процессе варьирования B^* наращивается окружающими частицами, то изменяется и его материальная граница ($\partial\kappa^* \rightarrow \partial(\kappa + \delta\kappa)^*$). Непрерывные на σ_α и $\partial\alpha^*$ элементарные векторные поля, осуществляющие указанные вариации, обозначим через $D\mathbf{x}_\alpha^\sigma$ и $D\mathbf{x}_\alpha^{\partial\alpha^*}$. Имеем

$$\mathbf{x}_\alpha^\sigma + D\mathbf{x}_\alpha^\sigma = \mathbf{x}_\alpha^{\sigma+\delta\sigma} \in \sigma_\alpha + \delta\sigma_\alpha, \quad \mathbf{x}_\alpha^{\partial\alpha^*} + D\mathbf{x}_\alpha^{\partial\alpha^*} = \mathbf{x}_\alpha^{\partial(\alpha+\delta\alpha)^*} \in \partial(\alpha + \delta\alpha)^* \quad (1.10)$$

Введенные векторные поля обладают свойствами

$$\partial\alpha: Dx_{\alpha}^{\partial\alpha} \equiv 0, Dx_{\alpha}^{\partial\alpha} = \delta x_{\alpha}^{\partial\alpha} \quad (1.11)$$

$$\partial\alpha^{\pm} \setminus (\partial\alpha^{\pm} \cap \partial\alpha): Dx_{\alpha}^{\partial\alpha^{\pm}} \cdot n_{\alpha} = Dx_{\alpha}^{\partial\alpha^{\mp}} \cdot n_{\alpha} = Dx_{\alpha}^{\sigma} \cdot n_{\alpha} = Du_{\alpha} \quad (1.12)$$

Здесь Du_{α} и Du_{α} — виртуальные смещения (по пространству и относительно частиц материала) точек σ по нормали к поверхности. Соотношение (1.12) выражает собой требование отсутствия раскрытий и перехлестов между участками границ $\partial(\alpha + \delta\alpha)^{\pm}$, примыкающих к $\sigma_{\alpha} + \delta\sigma_{\alpha}$. Из (1.12) следуют условия

$$n_{\alpha} \cdot [Dx_{\alpha}]_{\alpha} = 0, n_{\alpha} \cdot [Dx_{\alpha}]_{\alpha} = 0 \quad (1.13)$$

первое из которых, в силу (1.6), обеспечивает локальное сохранение массы при варьировании.

2. Пусть dt_{α} — вектор усилия, действующего на площадку ds_{α} в конфигурации χ . Тогда

$$dt_{\alpha} = ds_{\alpha} \cdot T_{\alpha}^{\chi} = ds_{\alpha} \cdot T_{\alpha}^{\chi*} \quad (2.1)$$

где T_{α}^{χ} — тензор напряжений Коши, $T_{\alpha}^{\chi*}$ — несимметричный тензор напряжений Пиолы — Кирхгофа [16]. Введем тензоры $T_{\alpha}^{\chi*}$ и T_{α}^{χ} с помощью соотношений

$$T_{\alpha}^{\chi*} = w_{\alpha} I_{\alpha} - T_{\alpha}^{\chi} \cdot (\nabla_{\alpha} \otimes x_{\alpha})^T, \quad T_{\alpha}^{\chi} = \frac{dw_{\alpha}}{d\chi} (\nabla_{\alpha} \otimes x_{\alpha})^T \cdot T_{\alpha}^{\chi*} \quad (2.2)$$

Тензор $T_{\alpha}^{\chi*}$ для упругого материала можно ввести как гамильтонову производную от плотности w_{α} , рассматриваемой в качестве плотности лагранжиана, аналогично стандартному способу введения тензора энергии-импульса в вариационном исчислении и теории поля [18]. Это было сделано Дж. Эшелби в работах [1, 3], который в качестве тензора энергии-импульса вводил (в наших обозначениях) тензор $(T_{\alpha}^{\chi*} + T_{\alpha}^{\chi})^T$. Тензор $T_{\alpha}^{\chi*}$ совпадает с тензором энергии-импульса, рассматривавшимся, например, в [5].

Используя (1.1), (1.3), имеем в (2.1), (2.2) при $\alpha \neq \beta$

$$T_{\beta}^{\beta} = w_{\beta} I_{\beta} - T_{\beta}^{\beta} \cdot (\nabla_{\beta} \otimes x_{\beta})^T, \quad ds_{\beta} \cdot T_{\beta}^{\beta} = ds_{\alpha} \cdot T_{\beta}^{\alpha} \quad (2.3)$$

Обозначим через T_{β} и T_{β}^{σ} собственные числа тензоров T_{β}^{β} и $[T_{\beta}^{\beta}]_{\beta}$, соответствующие собственному вектору $d\sigma_{\beta}$, т. е.

$$d\sigma_{\beta} \cdot T_{\beta}^{\beta} = T_{\beta} d\sigma_{\beta}, \quad d\sigma_{\beta} \cdot [T_{\beta}^{\beta}]_{\beta} = T_{\beta}^{\sigma} d\sigma_{\beta} \quad (2.4)$$

Справедливы теоремы

Теорема 1. Если площадка $d\sigma_{\beta}$ является собственным вектором тензора T_{β}^{β} , то ее образ $d\sigma_{\alpha}$ при отображении конфигураций $\beta \rightarrow \alpha$ является собственным вектором тензора T_{α}^{α} , причем

$$T_{\alpha} = d\beta/d\alpha (w_{\beta} - T_{\beta}) \quad (\alpha \neq \beta) \quad (2.5)$$

Доказательство. Умножая первое соотношение (2.3) на $d\sigma_{\beta}$ слева, получаем

$$d\sigma_{\beta} \cdot T_{\alpha}^{\beta} \cdot (\nabla_{\beta} \otimes x_{\alpha})^T = d\sigma_{\beta} w_{\beta} - d\sigma_{\beta} \cdot T_{\beta}^{\beta} \quad (2.6)$$

Тогда из (2.3), (2.4), (1.1) справедливо

$$d\sigma_{\alpha} \cdot T_{\alpha}^{\alpha} = \frac{d\beta}{d\alpha} (w_{\beta} - T_{\beta}) d\sigma_{\alpha}$$

что доказывает теорему!

Теорема 2. Если площадка $d\sigma_{\beta}$ является собственным вектором тензора $[T_{\beta}^{\beta}]_{\beta}$, то ее образ $d\sigma_{\alpha}$ при отображении конфигураций $\beta \rightarrow \alpha$ является собственным вектором тензора $[T_{\alpha}^{\alpha}]_{\alpha}$, причем ($\alpha \neq \beta$):

$$T_{\alpha}^{\sigma} = (d\beta/d\alpha)^{\sigma\beta\pm} ([w_{\beta}]_{\beta} - T_{\beta}^{\sigma} - (T_{\alpha}^{\beta})^{\sigma\beta\pm} : [\nabla_{\beta} \otimes x_{\alpha}]_{\beta}) \quad (2.7)$$

Доказательство. Записывая равенство (2.6) в скачках, с учетом (2.4) получаем

$$d\sigma_{\beta} \cdot (T_{\alpha}^{\beta})^{\sigma\beta\pm} \cdot [\nabla_{\beta} \otimes x_{\alpha}]_{\beta}^T + d\sigma_{\beta} \cdot [T_{\alpha}^{\beta}]_{\beta} \cdot ((\nabla_{\beta} \otimes x_{\alpha})^T)^{\sigma\beta\mp} = ([w_{\beta}]_{\beta} - T_{\beta}^{\sigma}) d\sigma_{\beta}$$

Тогда из (1.8), (1.1) и соотношения $d\sigma_\beta \cdot [T_\alpha^\beta]_\beta = d\sigma_\alpha \cdot [T_\alpha^\alpha]_\alpha$ справедливо

$$d\sigma_\alpha \cdot [T_\alpha^\alpha]_\alpha = \left(\frac{d\beta}{d\alpha} \right)^{\partial\beta/\partial\alpha} ([w_\beta]_\beta - T_\beta^\sigma - (T_\alpha^\beta)^{\partial\beta/\partial\alpha} : [\nabla_\beta \otimes x_\alpha]_\beta) d\sigma_\alpha$$

что доказывает теорему.

Заметим, что при доказательствах никак не использовались сведения о физических свойствах материала.

3. Для процесса квазистатического изотермического деформирования тела произвольной реологии, состоящего из одних и тех же материальных частиц и не содержащего сингулярных поверхностей, первое и второе начала термодинамики можно записать в виде

$$dA = dW + d\Phi, \quad d\Phi \geq 0 \quad (3.1)$$

где dA — работа поверхностных и массовых сил, W — свободная энергия тела, $d\Phi$ — диссипация энергии. Объемная плотность в χ диссипации, отнесенной к единице времени, называется «удельной диссипативной функцией» [16], а массовая плотность — «внутренней диссипацией» [17]. Второе начало термодинамики в рассматриваемом процессе сводится к неравенству Планка $d\Phi \geq 0$. Для упругого тела $d\Phi = 0$.

Предполагая изотермичность и квазистатичность перехода $\chi \rightarrow \chi + \delta\chi$, пренебрегая в дальнейшем для сокращения записей массовыми силами и учитывая (3.1), запишем для тела B вариационное уравнение энергии в виде

$$\int_{\partial\chi} dt_x^{\partial\chi} \cdot \delta x_\chi^{\partial\chi} = \delta E_B + \delta E_B^\sigma \quad (3.2)$$

$$\delta E_B = \delta E_{B^+} + \delta E_{B^-} \quad (3.3)$$

Здесь δE_B (соответственно δE_{B^+} и δE_{B^-}) означает сумму диссипации энергии и приращения свободной энергии в объеме тела B (соответственно B^+ и B^-) при варьировании; через δE_B^σ обозначены аналогичные энергетические изменения для сингулярной поверхности σ . Примем, что δE_B^σ определяется изменением площади σ как в κ , так и в χ , т. е.

$$\delta E_B^\sigma = \int_{\sigma_\kappa} e_\kappa^\sigma \delta d\sigma_\kappa + \int_{\sigma_\chi} e_\chi^\sigma \delta d\sigma_\chi \quad (3.4)$$

$$\delta d\sigma_\alpha = -2H_\alpha d\sigma_\alpha \cdot D x_\alpha^\sigma + \nabla_\alpha^\sigma \cdot (I_\alpha^\sigma \cdot D x_\alpha^\sigma), \quad 2H_\alpha = -I_\alpha^\sigma : \nabla_\alpha^\sigma \otimes n_\alpha \quad (3.5)$$

где $\delta d\sigma_\alpha$ — виртуальное приращение соответствующих элементов площади, $2H_\alpha$ — средняя кривизна поверхности σ_α . Для целей настоящей работы достаточно предположить, что коэффициенты e_α^σ , имеющие смысл плотностей поверхностной энергии, являются заданными постоянными характеристиками материала.

Для произвольного подтела $B^* \subset B$, не содержащего сингулярной поверхности, вариационное уравнение энергии имеет вид

$$\delta E_{B^*} = \int_{\partial\chi^*} dt_x^{\partial\chi^*} \cdot \delta x_\chi^{\partial\chi^*} + \int_{\partial\kappa^*} w_\kappa ds_\kappa^{\partial\kappa^*} \cdot D x_\kappa^{\partial\kappa^*} \quad (3.6)$$

Второй интеграл в правой части (3.6) представляет собой вклад в δE_{B^*} потока свободной энергии вследствие наращивания B^* окружающими материальными частицами. Введенные в п. 1 векторные поля $D x_\alpha^{\partial\alpha^*}$ свяжем соотношением

$$D x_\kappa^{\partial\kappa^*} = \delta x_\kappa^{\partial\kappa^*} + D x_\kappa^{\partial\kappa^*} \cdot (\nabla_\kappa \otimes x_\kappa) \quad (3.7)$$

Вектор $D x_\kappa^{\partial\kappa^*}$, очевидно, соединяет пространственный образ материальной точки $x_\kappa^{\partial\kappa^*}$ до варьирования с пространственным образом материальной точки $x_\kappa^{\partial\kappa^*} + D x_\kappa^{\partial\kappa^*}$ после варьирования.

Тензоры T_κ^χ и T_κ^* из (2.3) имеют сходную (с точностью до перестановки пространственного χ и материального κ индексов) структуру. Тен-

зор T_x^x можно трактовать как плотность потока импульса в области физического пространства, занятого в актуальном состоянии частицами тела. Для однородного упругого тела тензор T_x^x можно также интерпретировать как плотность потока импульса, но уже в области «материального» пространства, совпадающей с отсчетной конфигурацией κ . Не останавливаясь на этом вопросе подробнее, отметим, что некоторые частные случаи дуализма между T_x^x и T_x^x в упругой среде рассматривались в [19]. С другой стороны векторы $T_x^x \cdot D\mathbf{x}_x^{\partial x^*}$ и $T_x^x \cdot D\mathbf{x}_x^{\partial x^*}$ представляют собой плотности (квазистатических) потоков энергии, соответственно, через пространственную ∂x^* и материальную $\partial \kappa^*$ границы подтела B^* . Это следует из балансового соотношения

$$\delta E_{B^*} = \int_{\partial x^*} ds_x^{\partial x^*} \cdot T_x^x \cdot D\mathbf{x}_x^{\partial x^*} + \int_{\partial \kappa^*} ds_x^{\partial \kappa^*} \cdot T_x^x \cdot D\mathbf{x}_x^{\partial \kappa^*} \quad (3.8)$$

получаемого из уравнения (3.6) с помощью (2.3), (3.7). Отмеченный пространственно-материальный дуализм тензоров T_x^x и T_x^x позволяет нам называть их, соответственно, пространственным и материальным (статическими) тензорами энергии-импульса.

4. Выбирая последовательно в (3.8) в качестве подтела B^* части B^+ и B^- тела B и складывая получающиеся соотношения, приведем вариационное уравнение энергии (3.2) к виду

$$\sum_{\alpha=\kappa, \chi} \int_{\sigma_\alpha} d\sigma_\alpha (\mathbf{n}_\alpha \cdot [T_\alpha^\alpha \cdot D\mathbf{x}_\alpha]_\alpha + 2e_\alpha^\sigma H_\alpha Du_\alpha) = 0 \quad (4.1)$$

При выводе учтены соотношения (1.2), (1.11), (1.12), (3.3)–(3.5) и без ограничения общности предположено, что во внутренних точках σ_α $\mathbf{I}_\alpha^\sigma \cdot D\mathbf{x}_\alpha^\sigma = 0$.

Виртуальные перемещения примыкающих друг к другу вдоль σ участков границ частей B^+ и B^- характеризуются четырьмя векторными полями $D\mathbf{x}_\alpha^{\partial \alpha^\pm}$. Для однозначности примем, что в одной из конфигураций α отображение $\sigma_\alpha \rightarrow \sigma_\alpha + \delta\sigma_\alpha$ осуществляется (во внутренних точках σ_α) нормальным к $\partial \alpha^\pm$ полем $D\mathbf{x}_\alpha^{\partial \alpha^\pm}$. С учетом (1.12) имеем при $\alpha \neq \beta$:

$$D\mathbf{x}_\alpha^{\partial \alpha^\pm} = Du_\alpha \mathbf{n}_\alpha, \quad D\mathbf{x}_\beta^{\partial \beta^\pm} = Du_\beta \mathbf{n}_\beta + \mathbf{I}_\beta^\sigma \cdot D\mathbf{x}_\beta^{\partial \beta^\pm} \quad (4.2)$$

Тогда соотношение (4.1) записывается в форме принципа возможных перемещений

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma_\beta} d\sigma_\beta (\mathbf{n}_\beta \cdot [T_\beta^\beta]_\beta \cdot \mathbf{n}_\beta + 2e_\beta^\sigma H_\beta) Du_\beta + \int_{\sigma_\beta} d\sigma_\beta \mathbf{n}_\beta \cdot [T_\beta^\beta]_\beta \cdot \mathbf{I}_\beta^\sigma \cdot \langle D\mathbf{x}_\beta \rangle_\beta + \\ & + \int_{\sigma_\beta} d\sigma_\beta \mathbf{n}_\beta \cdot \langle T_\beta^\beta \rangle_\beta \cdot \mathbf{I}_\beta^\sigma \cdot [D\mathbf{x}_\beta]_\beta + \int_{\sigma_\alpha} d\sigma_\alpha (\mathbf{n}_\alpha \cdot [T_\alpha^\alpha]_\alpha \cdot \mathbf{n}_\alpha + 2e_\alpha^\sigma H_\alpha) Du_\alpha = 0 \quad (4.3) \end{aligned}$$

Таким образом при выборе (4.2), обеспечивающем выполнение априорных ограничений (4.13), существенными вариациями являются: Du_α , Du_β , $\mathbf{I}_\beta^\sigma \cdot [D\mathbf{x}_\beta]_\beta$, $\mathbf{I}_\beta^\sigma \cdot \langle D\mathbf{x}_\beta \rangle_\beta$ — всего 6 скалярных функций точек на σ . Если все эти функции произвольны и независимы, то σ естественно назвать свободной сингулярной поверхностью (с локальным массообменом). Другие типы сингулярных поверхностей можно моделировать, накладывая различные связи на существенные вариации.

Не приводя здесь полного анализа типов поверхностей, ограничимся исследованием следующей ситуации. Пусть все существенные вариации являются независимыми друг от друга функциями, а векторная функция $\mathbf{I}_\beta^\sigma \cdot \langle D\mathbf{x}_\beta \rangle_\beta$ к тому же произвольна. Различные частные случаи этой ситуации определяются степенью произвольности вариаций Du_κ , Du_χ и $\mathbf{I}_\beta^\sigma \cdot [D\mathbf{x}_\beta]_\beta$. Рассмотрим следующие случаи:

$$\begin{aligned}
1, a: & \quad Du_x - \text{произвольна}, & 1, e: & \quad Du_x = g_x \delta l_x, & 1, c: & \quad Du_x = 0 \\
2, a: & \quad Du_x - \text{произвольна}, & 2, e: & \quad Du_x = g_x \delta l_x, & 2, c: & \quad Du_x = 0 \quad (4.4) \\
3, a: & \quad I_\beta^\sigma \cdot [Dx_\beta]_\beta - \text{произвольна}, & 3, e: & \quad I_\beta^\sigma \cdot [Dx_\beta]_\beta = I_\beta^\sigma \cdot g \delta l, \\
& & 3, c: & \quad I_\beta^\sigma \cdot [Dx_\beta]_\beta = 0
\end{aligned}$$

Здесь g_x, g_x, g — заданные функции точек на σ ; $\delta l_x, \delta l_x, \delta l$ — произвольные параметры вариации, не зависящие от точек на σ .

Из принципа (4.3), используя (1.12), получаем условия для каждого из случаев

$$\begin{aligned}
1, a: & \quad n_x \cdot [T_x^*]_x \cdot n_x + 2e_x^\sigma H_x = 0 \\
1, e: & \quad \langle Dx_x \rangle \cdot n_x = g_x \delta l_x, & \int_{\sigma_x} d\sigma_x (n_x \cdot [T_x^*]_x \cdot n_x + 2e_x^\sigma H_x) g_x = 0 \\
1, c: & \quad \langle Dx_x \rangle \cdot n_x = 0 \\
2, a: & \quad n_x \cdot [T_x^*]_x \cdot n_x + 2e_x^\sigma H_x = 0 \\
2, e: & \quad \langle Dx_x \rangle_x \cdot n_x = g_x \delta l_x, & \int_{\sigma_x} d\sigma_x (n_x \cdot [T_x^*]_x \cdot n_x + 2e_x^\sigma H_x) g_x = 0 \\
2, c: & \quad \langle Dx_x \rangle_x \cdot n_x = 0 \\
3, a: & \quad n_\beta \cdot [T_\beta^\beta]_\beta \cdot I_\beta^\sigma = 0, \quad n_\beta \cdot \langle T_\beta^\beta \rangle_\beta \cdot I_\beta^\sigma = 0 \\
3, e: & \quad n_\beta \cdot [T_\beta^\beta]_\beta \cdot I_\beta^\sigma = 0, & I_\beta^\sigma \cdot [Dx_\beta]_\beta = I_\beta^\sigma \cdot g \delta l, & \int_{\sigma_\beta} d\sigma_\beta n_\beta \cdot \langle T_\beta^\beta \rangle_\beta \cdot I_\beta^\sigma \cdot g = 0 \\
3, c: & \quad n_\beta \cdot [T_\beta^\beta]_\beta \cdot I_\beta^\sigma = 0, & I_\beta^\sigma \cdot [Dx_\beta]_\beta = 0
\end{aligned} \quad (4.5)$$

Для рассмотренной ситуации каждый тип сингулярной поверхности σ будем характеризовать набором из трех букв $(a, a, a), (a, a, e), \dots, (c, c, c)$, где на первом месте стоит буква, отвечающая частному случаю из первой строки (4.4), на втором — из второй строки, на третьем — из третьей. Так символ (a, a, a) обозначает, очевидно, свободную сингулярную поверхность. Всего условия (4.5) включают в себя $3^3 = 27$ типов σ . Если в наборе, обозначающем тип σ , на некотором месте стоит буква q , то она заменяет собой любую из букв a, e, c . Сингулярная поверхность, известная в механике сплошной среды как контактный разрыв, представит в наших обозначениях символом (c, q, q) .

Из (1.13), (4.5) следует, что в терминах $Dx_\alpha^{\partial\alpha\pm}, T_\alpha^\alpha$ для каждого типа σ существует восемь скалярных условий (условие типа $1, e$ в (4.5) считается за одно). Согласно теореме 1 п. 2 условие $3, a$ в (4.5) эквивалентно любому из двух нижеследующих

$$n_x \cdot (T_x^*)^{\partial x \pm} \cdot I_x^\sigma = 0, \quad n_x \cdot (T_x^*)^{\partial x \pm} \cdot I_x^\sigma = 0 \quad (4.6)$$

Точно так же, из теоремы 2 п. 2 следует, что первые условия в $3, e$ и $3, c$ эквивалентны одному из

$$n_x \cdot [T_x^*]_x \cdot I_x^\sigma = 0, \quad n_x \cdot [T_x^*]_x \cdot I_x^\sigma = 0 \quad (4.7)$$

Таким образом, в условиях (4.5) для отмеченных случаев выбор индекса β произволен ($\beta = x$ или $\beta = \chi$).

Условия (4.5) получены без конкретизации определяющих соотношений материала и характера его анизотропии. Они остаются справедливыми и в случае непрерывно распределенной в B^+ и B^- неоднородности материала.

5. Пусть $\delta E_{B^*} = 0$ для любого подтела $B^* \subset B$, состоящего из одних и тех же частиц ($Dx_x^{\partial x *} = 0$), не содержащего сингулярной поверхности и произвольно перемещающегося при варьировании как жесткое целое.

Тогда из (3.8) в $B \setminus (\sigma \cup \partial B)$ справедливы соотношения

$$\nabla_{\alpha} \cdot \mathbf{T}_{\alpha}^{\alpha} = 0, \quad \mathbf{T}_{\alpha}^{\alpha} = (\mathbf{T}_{\alpha}^{\alpha})^T \quad (5.1)$$

в которых следует положить $\alpha = \chi$. Также из принципов инвариантности можно показать, что в случае однородного упругого материала тела B выполняется первое равенство (5.1) при $\alpha = \chi$, а в случае изотропного упругого материала — второе равенство (5.1) при $\alpha = \chi$. Как следствие (2.3), в случае изотропного упругого материала симметричны 4 тензора: \mathbf{T}_{χ}^{χ} , \mathbf{T}_{χ}^{χ} , $(\nabla_{\chi} \otimes \mathbf{x}_{\chi})^T \cdot \mathbf{T}_{\chi}^{\chi} \cdot (\nabla_{\chi} \otimes \mathbf{x}_{\chi})^T$, $(\nabla_{\chi} \otimes \mathbf{x}_{\chi})^T \cdot \mathbf{T}_{\chi}^{\chi} \cdot (\nabla_{\chi} \otimes \mathbf{x}_{\chi})^T$.

6. Сингулярную поверхность σ можно интерпретировать как перегородку ξ нулевой массы и толщины (но энергоемкую!) в теле B . В различных конкретных случаях ξ имеет дополнительные свойства: (a, a, q) : ξ — проницаемая, нежесткая (фиг. 2, а); (a, c, q) : ξ — проницаемая, жесткая (фиг. 2, б); (c, a, q) : ξ — непроницаемая, нежесткая (фиг. 2, в); (c, c, q) : ξ — непроницаемая, жесткая (фиг. 2, г); (q, q, a) : ξ — гладкая; (q, q, c) : ξ — шероховатая. (При переходе через проницаемую перегородку материал может менять свои физические свойства.)

Для каждой сингулярной поверхности σ существует дуальная поверхность, у которой ограничения на вариации положения Du_{χ} по пространству и Du_{χ} по материалу взаимно заменены по сравнению с таковыми у σ . Так, в рамках множества поверхностей, определяемого условиями (4.4), дуальными друг другу являются типы (a, b, q) и (b, a, q) , (a, c, q) и (c, a, q) и т. д. Поверхности типа (a, a, q) , (b, b, q) , (c, c, q) тождественным образом дуальны самим себе. Предлагаемый способ классификации основан на материально-пространственной симметрии сплошной среды и принципиально отличается от способов, ориентированных на приложения. В частности, он отличается от предложенного¹ способа классификации, согласно которому противопоставляется граница фазового перехода (т. е. общий случай $Du_{\chi} \neq 0$, $Du_{\chi} \neq 0$) контактному разрыву между нереагирующими веществами (т. е. частному случаю $Du_{\chi} \neq 0$, $Du_{\chi} = 0$).

Отметим следующий факт. На поверхности контактного разрыва (c, a, q) не требуется выполнения какого-либо условия на нормальную составляющую $\mathbf{n}_{\chi} \cdot [\mathbf{T}_{\chi}^{\chi}]_{\chi} \cdot \mathbf{n}_{\chi}$. На дуальной поверхности типа (a, c, q) не требуется выставлять («традиционное») условие на $\mathbf{n}_{\chi} \cdot [\mathbf{T}_{\chi}^{\chi}]_{\chi} \cdot \mathbf{n}_{\chi}$, что ранее не отмечалось. Условия равновесия поверхности типа (c, c, q) не включают в себя ни то, ни другое условия.

7. Если игнорировать энергозатраты на σ

$$\delta E_{\sigma}^{\sigma} = 0 \quad (e_{\chi}^{\sigma} = 0, e_{\chi}^{\sigma} = 0) \quad (7.1)$$

то из соотношений (4.5) для поверхности типа (a, a, c) , вдоль которой, очевидно, не происходит разрыва смещений материальных точек, получим однородные условия

$$\mathbf{n}_{\chi} \cdot [\mathbf{T}_{\chi}^{\chi}]_{\chi} = 0, \quad \mathbf{n}_{\chi} \cdot [\mathbf{T}_{\chi}^{\chi}]_{\chi} = 0 \quad (7.2)$$

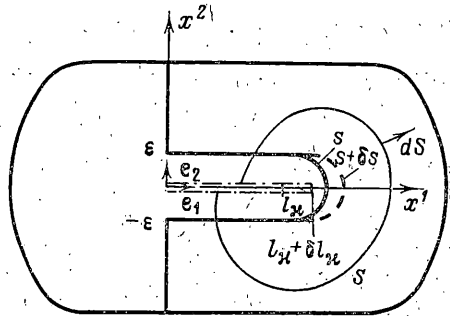
Эти соотношения были фактически получены Эшелби в [3] в качестве приложения общей теории тензора энергии-импульса в упругой среде к изучению мартенситных превращений. Видимо эта работа не привлекла внимания исследователей, так как впоследствии, без ссылок на [3], однородные условия (7.2) неоднократно и различными способами выводились в работах фазового направления ([10, 12, 13] и др.). Поверхность типа (a, a, c) получила название границы когерентного фазового перехода. Приближенный характер однородных условий на межфазной границе констатировался лишь в немногих работах, например, [9] и, особенно четко, в [14], где исследовались фазовые переходы в более сложных, чем упругая, средах.

В работах фазового направления в рамках модели упругого тела изучались и некоторые другие типы σ . Так, свободная сингулярная поверхность (a, a, a) (названная в [10] поверхностью фазового перехода с про-

¹ Гринфельд М. А. Гетерогенные системы с поверхностями фазовых переходов (применение вариационных принципов). Дис. д-ра ф.-м. н.: М., 1983. 320 с.

скальзыванием) исследовалась в [10, 12]². Поверхность типа (b, a, c) при $g_{\kappa} \equiv 1$ рассматривалась в [11]. Во всех этих случаях неявно предполагалась справедливость условия (7.1).

Причиной пренебрежения энергетикой двумерного континуума σ в работах фазового направления является, по-видимому, буквальный перенос в механику сплошной среды обычно (и обоснованно) принимающегося в физике предположения о малости поверхностной энергии твердого тела по сравнению с его объемной энергией. Речь здесь идет о свободной («истинной») поверхностной энергии. Даже при таком понимании поверхностной энергии, она может играть заметную роль при больших кривизнах ($|H_{\alpha}| \rightarrow \infty$) поверхности σ . Однако необходимость учета энергозатрат на σ при континуальном подходе, на наш взгляд, лежит грубо и кроется в феноменологическом способе описания физических свойств материала.



Фиг. 3

Рассмотрим поверхность типа (b, q, a) и ограничимся для простоты двумерным случаем. В плоской области κ введем декартову систему координат x^1, x^2 с ортами e_1, e_2 . Кривая σ_{κ} при $|x^2| > \epsilon$ состоит из отрезков $x^1 = 0$, а при $0 < x^1 < l_{\kappa}$ — из отрезков $x^2 = \pm \epsilon$, соединенных полуокружностью s радиуса ϵ . Кривая $\sigma_{\kappa} + \delta \sigma_{\kappa}$ отличается от σ_{κ} лишь тем, что вместо s заканчивается полуэллипсом $s + \delta s$ с полуосями ϵ и $\epsilon + \delta l_{\kappa}$ (фиг. 3). Переходя к пределу при $\epsilon \rightarrow 0$, из соотношений 1, 2 и 3, а в (4.5) с учетом того, что H_{κ} стремится к δ -функции Дирака с носителем в точке $x^1 = l_{\kappa}, x^2 = 0$, получаем

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\sigma} d\sigma_{\kappa} \cdot T_{\kappa}^{\kappa} \cdot e_1 \delta l_{\kappa} = 2e_{\kappa}^{\sigma} \delta l_{\kappa} \quad (7.3)$$

При этом части кривых σ_{κ} и $\sigma_{\kappa} + \delta \sigma_{\kappa}$ при $x^1 > 0$ стягиваются в разрезы (штрих-пунктирная линия на фиг. 3), длиной, соответственно, l_{κ} и $l_{\kappa} + \delta l_{\kappa}$ вдоль x^1 (трещина длиной l_{κ} , варьируемая на δl_{κ}). Для однородного упругого материала из первого соотношения (5.1) при $\alpha = \kappa$, 3, а в (4.5) и (7.3) можно показать, что

$$\int_S dS \cdot T_{\kappa}^{\kappa} \cdot e_1 = 2e_{\kappa}^{\sigma} \quad (7.4)$$

где S — произвольный контур в κ^+ , начинающийся и заканчивающийся на берегах трещины и охватывающий ее кончик ($x^1 = l_{\kappa}$; фиг. 3). Интеграл в левой части (7.4) является обобщением на конечные деформации инвариантного J -интеграла [6], используемого в линейной механике хрупкого разрушения для оценки плотности поверхностной энергии e_{κ}^{σ} при реальном продвижении трещины. Как показывают многочисленные эксперименты e_{κ}^{σ} на 3–4 порядка превышает плотность истинной поверхностной энергии твердого тела (см., например, [7]). Концепция Ирвина — Орвана, которая считается надежной интерпретацией, объясняет этот факт пластической работой, совершаемой у края трещины и не учитываемой в рамках модели упругого тела.

Обобщение упомянутой концепции на случай сингулярной поверхности σ представляется довольно прозрачным. Вблизи σ , в первую очередь в местах ее искривленности, в поле внешних напряжений развиваются большие остаточные деформации. Например, в окрестности фазовой границы на микроуровне наблюдается интенсивное перемещение атомов и

² См. указ. публ. с. 94.

дислокаций. Диссипацию энергии, связанную с этими процессами, трудно описать с помощью обзорных феноменологических моделей поведения материала в объеме и менее всего возможно с помощью упругой модели. Соответствующие энергозатраты (намного превышающие изменение истинной поверхностной энергии σ) следует «приписать» самой сингулярной поверхности. Изменения δE_B^σ , определенные таким образом, совершенно необходимо учитывать при анализе устойчивости равновесия σ , особенно по отношению к короткопериодным и негладким пространственным возмущениям.

В работах фазового направления считается, что однородные условия типа (7.2) являются обобщением условий фазового равновесия в жидкостях на случай, когда хотя бы одна из фаз является (негидростатически напряженным) твердым телом. По-видимому, это не так. Вследствие $e_x^\sigma = 0$ однородные условия справедливы лишь для твердых тел без прочности (с нулевым сопротивлением распространению трещин). В таких телах при растяжении будет наблюдаться неустойчивое распространение трещин. Более того, трещины могут развиваться и в негидростатически сжатых телах ([20, 8]). Единственным состоянием, в котором может наблюдаться устойчивое равновесие гладкой фазовой границы, является состояние гидростатического сжатия, что возвращает нас к случаю жидких фаз. Негидростатически напряженное твердое тело с равновесной сингулярной поверхностью характеризуется не только условием $\text{div } T_x^\sigma \neq 0$, но и условием $e_x^\sigma \neq 0$.

Приведем несколько комментариев к работе. Термин «тензор энергии-импульса», пришедший из теории поля в конце 50-х годов, составлен из слов, которые лежат в понятийной основе механики. Предлагаемые в настоящей работе эпитеты пространственный и материальный призваны лишь отразить дуализм между тензорами T_x^σ и T_x^μ . С недавних пор в работах фазового направления тензоры T_x^σ/ρ_α и $(\nabla_x \otimes x)^\top T_x^\mu \cdot (\nabla_x \otimes x)^\top / \rho_\alpha$ (обозначения наши) стали именоваться ([10, 12] и др.) «тензорами химического потенциала». Такая терминология, призванная обслуживать лишь узкую область приложений, мешает видеть, что условия на тензор T_x^σ возникают и при движениях поверхностей и линий относительно частиц среды в процессах; весьма далеких от химии.

Результаты работы автоматически переносятся на квазистатические изэнтропические процессы. В этом случае w_α имеет смысл не плотности свободной, а плотности внутренней энергии на единицу объема в конфигурации α . Результаты остаются справедливыми и для динамических (изотермических или изэнтропических) процессов в нестареющих телах, если придать виртуальным перемещениям $Dx_\alpha^{0\pm}$ смысл соответствующих виртуальных скоростей, а под w_α понимать сумму плотностей кинетической и свободной (для изотермических процессов) или внутренней (для изэнтропических процессов) энергий. Вообще говоря, в объемную часть энергетических изменений δE_B в (3.2) может входить функционал невязки [13]. Это обстоятельство не отражается на получаемых результатах вследствие того, что мы принимаем постулат аддитивности (3.3).

При выборе отсчетной конфигурации x предполагается, что в актуальном состоянии тело доступно наблюдению (в частности, известны функции $\rho_x^{0\pm}$). Нетрудно построить множество K допустимых x удовлетворяющих (1.5), (1.6). Важно, что выбор x производится до варьирования, поэтому при заданной конфигурации x для поверхностей любых типов множества K совпадают между собой. Если известно, что тело B достигло актуального состояния из некоторого несингулярного начального состояния x° за счет движения поверхности σ определенного типа, то законен вопрос о принадлежности x° множеству K . Ответ утвердительный лишь для сингулярных поверхностей типа (q, q, c) .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эшлби Дж. Континуальная теория дефектов // Континуальная теория дислокаций. М.: Изд-во иностр. лит-ры. 1963. 247 с.
2. Eshelby J. D. The force on an elastic singularity // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1951. V. 244. No. 877. P. 87–112.
3. Eshelby J. D. Energy relations and the energy-momentum tensor in continuum mechanics // Inelastic behaviour of solids. N. Y.: McGraw-Hill, 1970. P. 77–115.
4. Eshelby J. D. The elastic energy-momentum tensor // J. Elasticity. 1975. V. 5. No. 3–4. P. 321–335.
5. Hill R. Energy-momentum tensors in elastostatics: some reflections on the general theory // J. Mech. Phys. Solids. 1986. V. 34. No. 3. P. 305–317.
6. Райс Дж. Математические методы в механике разрушения // Разрушение. М.: Мир, 1975. Т. 2. С. 204–335.
7. Качанов Л. М. Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 311 с.

8. Кондауров В. И., Мухамедиев Ш. А., Никитин Л. В., Рыжак Е. И. Механика разрушения горных пород. М.: Ин-т физики Земли, 1987. 218 с.
9. Robin P.-Y. F. Thermodynamic equilibrium across a coherent interface in a stressed crystal // Amer. Mineralogist. 1974. V. 59. No. 11-12. P. 1286-1298.
10. Гринфельд М. А. О гетерогенном равновесии нелинейно-упругих фаз в тензорах химического потенциала // Вопросы нелинейной механики сплошной среды. Таллинн: Валгус, 1985. С. 33-47.
11. Гринфельд М. А. Фазовые переходы с предписанным семейством поверхностей превращения // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283. № 2. С. 341-345.
12. Трускиновский Л. М. О тензоре химического потенциала // Геохимия. 1983. № 12. С. 1730-1744.
13. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 447 с.
14. Кондауров В. И., Никитин Л. В. Фазовые переходы первого рода в упруговязкопластической среде // Изв. АН СССР: МТТ. 1986. № 4. С. 130-139.
15. Гиббс Дж. В. Термодинамика. Статистическая механика. М.: Наука, 1982. 584 с.
16. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
17. Трудсделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
18. Дубровин Б. А., Нозиков С. П., Фоменко А. Г. Современная геометрия. М.: Наука, 1979. 759 с.
19. Chadwick P. Applications of an energy-momentum tensor in non-linear elastostatics // J. Elasticity. 1975. V. 5. No. 3-4. P. 249-258.
20. Никитин Л. В., Одинцов В. Н. Образование протяженных сомкнутых трещин отрыва в хрупких горных породах // Докл. АН СССР. 1987. Т. 294. № 4. С. 814-817.

Москва

Поступила в редакцию
4.IV.1988