УДК 531.38

А. И. ХОХЛОВ

О НЕКОТОРЫХ ОШИБОЧНЫХ УТВЕРЖДЕНИЯХ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Показано, что появившиеся в ряде публикаций сообщения об открытии новых случаев интегрируемости уравнений динамики твердого тела ошибочны, противоречат теореме Стеклова, устанавливающей необходимые и достаточные условия существования подобных случаев интегрируемости.

1. Системы уравнений

$$J_1\omega_1^{\cdot}=(J_2-J_3)\,\omega_2\omega_3+(E_{3i}\omega_2-E_{2i}\omega_3+N_{3i}\gamma_2-N_{2i}\gamma_3)\gamma_i \quad (1\ 2\ 3) \tag{1}$$

$$\gamma_1^{\cdot}=\omega_3\gamma_2-\omega_2\gamma_3$$

$$\begin{gathered} P_1^{\cdot}=(a_3-a_2)P_2P_3+(c_{i3}R_2-c_{i2}R_3)P_i+\\ +(c_{3i}P_2-c_{2i}P_3+b_{3i}R_2-b_{2i}R_3)R_i \quad (1\ 2\ 3)\\ R_1^{\cdot}=a_3P_3R_2-a_2P_2R_3+(c_{3i}R_2-c_{2i}R_3)R_i \end{gathered} \tag{2}$$

связаны обратимой заменой переменных и параметров и поэтому они математически изоморфны [1, 2] – при построении решений их не различают. В (1), (2) записаны лишь по два уравнения из шести. Символ (123) указывает, что остальные уравнения получаются циклической перестановкой индексов 1, 2, 3. По этим значениям выполняется суммирование, если буквенный индекс повторен в одночленном выражении.

Получив необходимые и достаточные условия существования дополнительного к имеющимся трем классическим четвертого квадратичного интеграла уравнений (2), Стеклов доказал [3, гл. IV], что такой интеграл имеется лишь в четырех случаях, и только в двух из них $(a_2-a_3)(a_3-a_1)(a_1-a_2)\neq 0$. Это случаи интегрируемости Клебша и Стеклова. Вследствие изоморфизма теорема Стеклова справедлива и для уравнений (1): при

$$(J_2-J_3)(J_3-J_1)(J_1-J_2)\neq 0 \tag{3}$$

четвертый квадратичный по ω_1, ω_2, ω_3, γ_1, γ_2, γ_3 однородный интеграл существует лишь в указанных двух случаях (в случае Клебша интеграл может быть представлен и в предложенной Тиссераном [4] форме).

Теорема Стеклова безупречна, поэтому противоречащие ей и приведенные без доказательств утверждения [5, 6] о существовании при условии (3) (и к тому же с дополнительными ограничениями $N_{ij}=0$) новых случаев интегрируемости уравнений (1) ошибочны. Не новы и решения [7] – это распространенные, вследствие изоморфизма на систему (1) частные случаи решений уравнений (2), полученные Стекловым [8] и Чаплыгиным [9]. Отметим, что ошибочность утверждений [5, 6, 7] можно обнаружить и без использования полной аналогии [1, 2], достаточно аналогии Колосова [10, с. 50].

В серии публикаций [11–14] использована замена переменных, смысл которой – переход к системе координат равномерно вращающейся по отношению к исходной (такая замена в частной задаче предложена в [4], а также в [15] для одной из общих задач динамики твердого тела). При этом в уравнениях и решениях появляется искусственно введенный дополнительный параметр – угловая скорость вращения системы координат. Автор работ [11–14] полагает, что он тем самым обобщил все решения классических задач динамики твердого тела. Бессодержательность такого «обобщения» очевидна.

В частности в [14] утверждается обобщение трех из шести приведенных в [5] случаев интегрируемости и замечается попутно, что остальные три ошибочны. Но с теоремой Стеклова эти утверждения не сопоставляются, хотя эта теорема автору работы [14] известна (монография [3] приведена в [14] в списке литературы).

2. Ошибочность сообщений [5, 6] об открытии новых случаев интегрируемости можно установить и не обращаясь к обширному исследованию [3].

Приведенные в [5] уравнения (4) и интегралы (7) автор при поисках четвертого интеграла подчинил ограничениям $x_0=y_0=z_0=0$, $b_1=b_2=b_3=0$. Для сокращения записи обозначим

$$\varepsilon HA_1^*=E_1,\ \varepsilon HA_2^*=E_2,\ \varepsilon HA_3^*=E_3 \tag{4}$$

$$A=J_1,\ B=J_2,\ C=J_3,\ p=\omega_1,\ q=\omega_2,\ r=\omega_3$$

и запишем упомянутые уравнения и интегралы работы [5] в виде

$$J_1\omega_1^{\cdot}=(J_2-J_3)\,\omega_2\omega_3+E_3\gamma_3\omega_2-E_2\gamma_2\omega_3 \quad (1\ 2\ 3) \tag{5}$$

$$\gamma_1^{\cdot}=\omega_3\gamma_2-\omega_2\gamma_3$$

$$h=J_1\omega_1^2+J_2\omega_2^2+J_3\omega_3^2 \tag{6}$$

$$l=2(J_1\omega_1\gamma_1+J_2\omega_2\gamma_2+J_3\omega_3\gamma_3)-E_1\gamma_1^2-E_2\gamma_2^2-E_3^2\gamma_3^2 \tag{7}$$

$$1=\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2 \tag{8}$$

Все квадратичные функции, которые в [5] объявлены интегралами, принадлежат классу

$$k=\alpha_1J_1\omega_1^2+\alpha_2J_2\omega_2^2+\alpha_3J_3\omega_3^2+\beta_1\gamma_1^2+\beta_2\gamma_2^2+\beta_3\gamma_3^2+ \\ +2(\sigma_1J_1\omega_1\gamma_1+\sigma_2J_2\omega_2\gamma_2+\sigma_3J_3\omega_3\gamma_3) \tag{9}$$

и следуют из (9) при конкретизации значений параметров α_i, β_i, σ_i.

Система (5) – частный случай системы, изученной Стекловым, и еще более частный случай системы, рассмотренной в [1, 2].

Если (9) – интеграл, то интегралом, очевидно, будет и линейная комбинация интегралов (6)–(9):

$$k-\alpha h-\sigma l-\beta(\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2) \tag{10}$$

Это надо учитывать при построении независимого четвертого интеграла.

Из определения интеграла системы уравнений следует, что его производная по времени $k^\bullet=\omega_i^\bullet\partial k/\partial\omega_i+\gamma_i^\bullet\partial k/\partial\gamma_i$ в силу уравнений (5) должна обратиться в нуль тождественно относительно ω_i, γ_i:

$$\begin{aligned}{}^1/_2k^\bullet=&(\alpha_1\omega_1+\sigma_1\gamma_1)[(J_2-J_3)\omega_2\omega_3+E_3\gamma_3\omega_2-E_2\gamma_2\omega_3]+\\ &+(\alpha_2\omega_2+\sigma_2\gamma_2)[(J_3-J_1)\omega_3\omega_1+E_1\gamma_1\omega_3-E_3\gamma_3\omega_1]+\\ &+(\alpha_3\omega_3+\sigma_3\gamma_3)[(J_1-J_2)\omega_1\omega_2+E_2\gamma_2\omega_1-E_1\gamma_1\omega_2]+\\ &+(\sigma_1J_1\omega_1+\beta_1\gamma_1)(\omega_3\gamma_2-\omega_2\gamma_3)+(\sigma_2J_2\omega_2+\beta_2\gamma_2)(\omega_1\gamma_3-\omega_3\gamma_1)+\\ &+(\sigma_3J_3\omega_3+\beta_3\gamma_3)(\omega_2\gamma_1-\omega_1\gamma_2)\equiv 0\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}&[(J_2-J_3)\alpha_1+(J_3-J_1)\alpha_2+(J_1-J_2)\alpha_3]\omega_1\omega_2\omega_3+\\ &+[(J_2-J_3)\sigma_1+(\alpha_2-\alpha_3)E_1+J_3\sigma_3-J_2\sigma_2]\omega_2\omega_3\gamma_1+\\ &+[(J_3-J_1)\sigma_2+(\alpha_3-\alpha_1)E_2+J_1\sigma_1-J_3\sigma_3]\omega_3\omega_1\gamma_2+\\ &+[(J_1-J_2)\sigma_3+(\alpha_1-\alpha_2)E_3+J_2\sigma_2-J_1\sigma_1]\omega_1\omega_2\gamma_3+\\ &+(E_2\sigma_3-E_3\sigma_2+\beta_2-\beta_3)\omega_1\gamma_2\gamma_3+(E_3\sigma_1-E_1\sigma_3+\beta_3-\beta_1)\omega_2\gamma_3\gamma_1+\\ &+(E_1\sigma_2-E_2\sigma_1+\beta_1-\beta_2)\omega_3\gamma_1\gamma_2\equiv 0\end{aligned}$$

и значит необходимые и достаточные условия существования у системы (5) интеграла вида (9) таковы

$$(J_2-J_3)\alpha_1+(J_3-J_1)\alpha_2+(J_1-J_2)\alpha_3=0 \tag{11}$$

$$(J_2-J_3)\sigma_1+(\alpha_2-\alpha_3)E_1+J_3\sigma_3-J_2\sigma_2=0 \quad (1\ 2\ 3) \tag{12}$$

$$E_2\sigma_3-E_3\sigma_2+\beta_2-\beta_3=0 \tag{13}$$

Ограничимся случаем (3) различных моментов инерции, который только и рассмотрен в [5] при поисках квадратичного интеграла. Общее решение линейного относительно α_1, α_2, α_3 однородного уравнения (11) содержит два произвольных параметра α и μ: $\alpha_1=\alpha+\mu J_1$ (123), и первые три слагаемые в (9) дадут

$$\alpha(J_1\omega_1^2+J_2\omega_2^2+J_3\omega_3^2)+\mu(J_1^2\omega_1^2+J_2^2\omega_2^2+J_3^2\omega_3^2)$$

Вследствие (10), не умаляя общности, можем положить $\alpha=0$. Если при этом и $\mu=0$, то в (9) не будет вторых степеней ω_i. В «интегралах», приводимых в [5], они есть. Поэтому полагаем $\mu\neq 0$. Можем положить $\mu=1$, записывая интеграл (9) в виде

$$k=J_1^2\omega_1^2+J_2^2\omega_2^2+J_3^2\omega_3^2+\beta_1\gamma_1^2+\beta_2\gamma_2^2+\beta_3\gamma_3^2+ \\ +2(\sigma_1J_1\omega_1\gamma_1+\sigma_2J_2\omega_2\gamma_2+\sigma_3J_3\omega_3\gamma_3) \tag{14}$$

тем самым полагая

$$\alpha_1=J_1,\ \alpha_2=J_2,\ \alpha_3=J_3 \tag{15}$$

Условия (12) принимают вид

$$(J_2-J_3)(\sigma_1+E_1)+J_3\sigma_3-J_2\sigma_2=0 \quad (1\ 2\ 3) \tag{16}$$

Их сумма

$$(J_2-J_3)(\sigma_1+E_1)+(J_3-J_1)(\sigma_2+E_2)+(J_1-J_2)(\sigma_3+E_3)=0 \tag{17}$$

линейное относительно σ_1+E_1, σ_2+E_2, σ_3+E_3 однородное уравнение имеет общее решение с двумя произвольными постоянными σ и n:

$$\sigma_1=\sigma-nJ_1-E_1 \quad (1\ 2\ 3) \tag{18}$$

Подставив эти значения в (16), получим

$$[E_1-n(J_2+J_3-J_1)]J_1=[E_2-n(J_3+J_1-J_2)]J_2=[E_3-n(J_1+J_2-J_3)]J_3 \tag{19}$$

Три величины E_1, E_2, E_3 связаны двумя соотношениями, и значит из (19) они определяются с произвольной постоянной $\varkappa$, которую здесь введем, обозначая общее значение входящих в равенства (19) величин через $-2\varkappa J_1J_2J_3$:

$$E_1=n(J_2+J_3-J_1)-2\varkappa J_2J_3,\ (1\ 2\ 3) \tag{20}$$

и из (18):

$$\sigma_1=\sigma-n(J_2+J_3)+2\varkappa J_2J_3,\ (1\ 2\ 3) \tag{21}$$

Остались условия (13). Их сумма

$$(\sigma_2-\sigma_3)E_1+(\sigma_3-\sigma_1)E_2+(\sigma_1-\sigma_2)E_3=0 \tag{22}$$

при подстановке значений (20), (21) сводится к условию $(J_2-J_3)(J_3-J_1)(J_1-J_2)\varkappa n=0$, и, вследствие (3):

$$\varkappa n=0 \tag{23}$$

Именно здесь и появляются две (и только две!) возможности:
либо

$$\varkappa=0 \tag{24}$$

либо

$$n=0 \tag{25}$$

Полученное из (22) условие (23) обеспечивает совместность уравнений (13), определяющих величины β_1, β_2, β_3. Появляющийся при этом произвольный параметр β в интеграле (14) несуществен (что следует из (10)).

В случае (24) из (20) следует $(J_2+J_3-J_1)^{-1}E_1=(J_3+J_1-J_2)^{-1}E_2=(J_1+J_2-J_3)^{-1}E_3$, что с учетом (4) и обозначений [5] $a_1=B+C-A$, $a_2=C+A-B$, $a_3=A+B-C$ совпадает с условием $a_1^{-1}A_1^*=a_2^{-1}A_2^*=a_3^{-1}A_3^*$, снабженным в [5] отметкой а). В последующей публикации [6] это условие (хотя и не отчетливо) связывается с решением Клебша.

В случае (25) величины (20) таковы $E_1=-2\varkappa J_2J_3$ (1 2 3), т. е. $J_1E_1=J_2E_2=J_3E_3$, или с учетом (4): $AA_1^*=BA_2^*=CA_3^*$. Это в [5] условие б), которое позже в [6] (и тоже не очень четко) связано с решением Стеклова.

Таким образом, необходимые и достаточные условия (11)–(13) приводят только к двум известным случаям. Других (вопреки утверждениям [5, 6]) нет! И значит, в публикациях [5, 6] то, что верно – не ново, а то, что ново – неверно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Орешкина Л. Н.* Изоморфизм двух задач механики // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291. № 5. С. 1080–1082.
2. *Орешкина Л. Н.* Объединение двух задач динамики твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 5. С. 36–43.
3. *Стеклов В. А.* О движении твердого тела в жидкости. Тип. Дарре. Харьков: 1893. 234 с.
4. *Tisserand F.* Sur les mouvements relatifs á la surface de la Terre // C. R. Acad. sci. 1872. V. LXXIV. N 62. P. 1567–1570.
5. *Лунев В. В.* Интегрируемые случаи в задаче о движении твердого тела с закрепленной точкой в поле сил Лоренца // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275. № 4. С. 824–826.
6. *Лунев В. В.* Гидродинамическая аналогия задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой в поле сил Лоренца // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276. № 2. С. 351–355.
7. *Лунев В. В.* Частные решения задачи о движении твердого тела с закрепленной точкой под действием моментов сил Лоренца // Докл. АН СССР. 1986. Т. 286. № 4. С. 836–839.
8. *Стеклов В. А.* О некоторых возможных случаях движения твердого тела в жидкости // Тр. Отделения физ. наук Об-ва любителей естествознания. 1895. Т. 7. № 2. С. 10–21.
9. *Чаплыгин С. А.* О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости // Собр. соч. М.; Л.: Гостехиздат. 1948. Т. 1. С. 194–311.
10. *Колосов Г. В.* О некотором видоизменении начала Гамильтона в применении к решению вопросов механики твердого тела. С.-Пб. 1903. 76 с.
11. *Яхья Х. М.* Новые решения задачи о движении гиростата в потенциальном и магнитном полях // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1985. № 5. С. 60–63.
12. *Яхья Х. М.* Об одном классе движений гиростата в ньютоновском, электрическом и магнитном полях // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1986. № 1. С. 89–90.
13. *Yehia H. M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces I. The equations of motion and their transformation // J. Méc. Théor. et Appl. 1986. V. 5. No. 5. P. 747–754.
14. *Yehia H. M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces II. A new form of the equations of motion of a rigid body in an ideal incompressible fluid // J. Méc. Théor. et Appl. 1986. V. 5. No. 5. P. 755–762.
15. *Мозалевская Г. В.* Об одной системе уравнений динамики твердого тела // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1988. Вып. 20. С. 41–46.

Донецк

Поступила в редакцию
20.V.1987