

УДК 531.8

© 1990 г.

В. Н. ПОЛОЦКИЙ

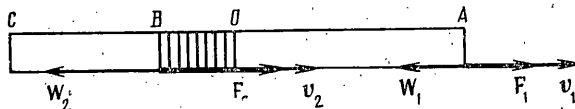
## О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ТЕЛ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ В МЕХАНИКЕ СОЕДИНЕННОГО ПОЕЗДА

Предложена модель соединенного поезда в виде системы взаимодействующих тел, имеющих переменную массу. Получены уравнения движения, приводящиеся в простейших случаях к нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка. Возникающие в системе колебания исследованы аналитически в линейной и нелинейной постановке, рассмотрены различные режимы движения соединенного поезда.

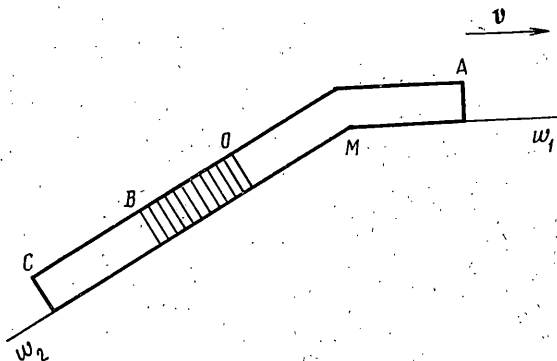
**1. Введение.** Наиболее традиционная область приложения методов механики тел переменной массы — ракетодинамика. Существует другая группа задач, где используются те же методы — это так называемые задачи о движении цепей [1, 2]. Настоящая работа посвящена анализу движения соединенного поезда, который из-за большой жесткости конструкций вагонов и наличия зазоров в межвагонных соединениях может рассматриваться как цепочка твердых тел, движущихся друг относительно друга в пределах, допускаемых зазорами. Построенная на основе такого рассмотрения модель поезда в виде системы тел переменной массы допускает приближенное аналитическое исследование. Численное исследование ее также намного проще, чем для традиционных моделей продольной динамики поезда [3, 4]. Предлагаемая модель является, естественно, более грубой, чем вышеуказанные, однако ее можно использовать для анализа распределения нагрузок между локомотивами, приближенной оценки ударных взаимодействий и выбора режима ведения.

Впервые методы динамики тел переменной массы были применены к механике поезда в [5] для исследования процесса трогания. Затем эти методы использовались для анализа процессов торможения в [6]. В указанных работах процесс «перцепца» вагонов, формализованный как непрерывное изменение массы продолжался короткое время и его направление легко определялось из качественных соображений. Отличительной особенностью соединенного поезда, в котором локомотивы рассредоточены по длине состава, является наличие в нем частей, каждую из которых ведет «свой» локомотив; эти части разделены точками, усилие в которых равно нулю — «нулевыми точками». В этих точках в течение всего времени движения может происходить «перцепец» вагонов, который формализуется как изменение масс частей и служит основой для использования методов динамики тел переменной массы.

**2. Постановка задачи. Основные уравнения.** Рассмотрим движение соединенного поезда с локомотивами в голове и второй половине состава в режиме тяги, не фиксируя расположение ведомого локомотива и считая, что часть силы тяги он расходует на подталкивание (фиг. 1). Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  соответствуют расположению головного локомотива, ведомого локомотива и хвосту состава. Точка  $O$  разделяет растянутую ( $AO$ ) и сжатую (показана штриховой) части состава (группа вагонов  $OB$  и  $BC$  — образуют одну часть поезда,  $OA$  — другую). Каждая из частей рассматривается как твердое тело. Наличие зазоров в межвагонных соединениях допускает их движение с различными скоростями, что приводит к перцепцу вагонов, т. е. к изменению массы частей.



Фиг. 1



Фиг. 2

Введем обозначения:  $m_1$  и  $m_2$  — массы первой ( $OA$ ) и второй ( $CO$ ) частей поезда;  $v_1$  и  $v_2$  — скорости частей поезда;  $F_1$  и  $F_2$  — силы тяги первого и второго локомотивов;  $W_1$  и  $W_2$  — силы сопротивления движению первой и второй частей;  $\delta$  — величина зазора в межвагонном соединении,  $m_0$  — масса вагона;  $M$  — масса поезда.

При  $v_1 > v_2$  происходит выбор сжатого зазора перед первым вагоном части  $CO$  и присоединение массы от  $CO$  к  $OA$ . Тогда, записывая закон изменения количества движения для  $AO$  и присоединяемой массы  $\Delta m$ , получаем

$$(m_1 + \Delta m)(v_1 + \Delta v_1) = m_1 v_1 + \Delta m v_2 + (F_1 - W_1) \Delta t$$

Силы, связанные с ударным взаимодействием [2] в точке  $O$  оказываются внутренними и не входят в уравнение.

Для оставшейся части поезда получаем

$$(m_2 - \Delta m)(v_2 + \Delta v_2) = (m_2 - \Delta m)v_2 + (F_2 - W_2) \Delta t$$

Переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , что соответствует крупномасштабному рассмотрению, при котором можно считать присоединение вагонов — непрерывным процессом (характерные расстояния много больше длины вагона, характерные времена — времена выбора зазора), получаем

$$m_1 dv_1/dt + (v_1 - v_2) dm_1/dt = F_1 - W_1$$

$$m_2 dv_2/dt = F_2 - W_2 \quad (2.1)$$

При  $v_2 > v_1$  происходит сжатие растянутого зазора за последним вагоном части  $OA$  и присоединение массы от  $OA$  к  $CO$ . Тогда записывая закон изменения количества движения для  $CO$  и присоединяющейся массы, затем для оставшейся части поезда, имеем

$$(m_2 + \Delta m)(v_2 + \Delta v_2) = m_2 v_2 + \Delta m v_1 + (F_2 - W_2) \Delta t$$

$$(m_1 - \Delta m)(v_1 + \Delta v_1) = (m_1 - \Delta m)v_1 + (F_1 - W_1) \Delta t$$

При  $\Delta t \rightarrow 0$  получаем

$$m_1 dv_1/dt = F_1 - W_1 \quad (2.2)$$

$$m_2 dv_2/dt + (v_2 - v_1) dm_2/dt = F_2 - W_2$$

Постоянство массы поезда в целом дает

$$m_1 + m_2 = M, \quad dm_2/dt = -dm_1/dt \quad (2.3)$$

Для замыкания системы уравнения (2.1), (2.3) или (2.2), (2.3) необходимо соотношение, связывающее изменение массы частей с их относительной скоростью

$$m_0/(dm_1/dt) = \delta/(v_1 - v_2) \quad (2.4)$$

Приведенным соотношениям можно придать симметричный вид

$$\begin{aligned} m_1 dv_1/dt &= F_1 - W_1^{-1/2} (v_1 - v_2 + |v_2 - v_1|) dm_1/dt \\ m_2 dv_2/dt &= F_2 - W_2^{-1/2} (v_2 - v_1 + |v_1 - v_2|) dm_2/dt \\ m_1 + m_2 &= M, \quad dm_1/dt = \delta^{-1} m_0 (v_1 - v_2) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Полученная система уравнений относительно переменных  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $v_1$ ,  $v_2$  позволяет с некоторой степенью приближения исследовать движение соединенного поезда. Область ее применения ограничивается сделанными допущениями: вагоны считаются абсолютно твердыми, а удар при «перепеце» — неупругим; переход к непрерывному перетеканию массы позволяет правильно описывать процессы, захватывающие большое число вагонов; в поезде не должно возникнуть более двух движущихся друг относительно друга частей.

На основе уравнений (2.5) ниже будут рассмотрены следующие задачи: движение по постоянному профилю в случае равной загрузки локомотивов ( $F_1 = F_2$ ) и переезд с подъема на площадку (или с площадки на подъем). Рассмотрено также движение соединенного поезда с постоянной скоростью через «бугор» — с подъема на спуск. При переходе головного локомотива в режим торможения (для поддержания постоянной скорости) в поезде образуются три части и для описания движения требуется вывод уравнений, обобщающих систему (2.5).

**3. Движение по постоянному профилю с постоянной скоростью.** Переменные массы частей поезда в (2.5) зададим с помощью переменной  $s$ , определяющей относительную длину (или массу):

$$m_1 = M(1-s), \quad m_2 = Ms \quad (3.1)$$

Считая, что скорости частей поезда достаточно близки (а скорость центра масс постоянна), можно пренебречь зависимостью сил сопротивления движению от скорости, тогда, обозначая через  $w$  удельное сопротивление на рассматриваемом подъеме, имеем

$$W_1 = m_1 w = M(1-s)w, \quad W_2 = m_2 w = Ms w \quad (3.2)$$

Для равномерного движения центра масс поезда необходимо выполнение условия  $F_1 + F_2 = W_1 + W_2$ , не определяющего распределение усилий между локомотивами. Рассмотрим случай равномерной загрузки локомотивов

$$F_1 = F_2 = \frac{1}{2}(W_1 + W_2) \quad (3.3)$$

С учетом сделанных допущений система (2.5) приводится к виду

$$2(1-s)dv_1/dt = 2w(s^{-1/2}) + (v_1 - v_2 + |v_1 - v_2|) ds/dt \quad (3.4)$$

$$2s dv_2/dt = 2w(\frac{1}{2} - s) - (v_2 - v_1 + |v_2 - v_1|) ds/dt \quad (3.5)$$

$$ds/dt = -m_0(M\delta)^{-1}(v_1 - v_2) \quad (3.6)$$

Величину  $M\delta/m_0$ , имеющую смысл суммарного зазора, обозначим через  $\Delta$ . Тогда, домножая (3.4) и (3.5) соответственно на  $s$  и  $(1-s)$  и складывая, а затем исключая  $(v_1 - v_2)$ , при помощи (3.6) приходим к нелинейному уравнению второго порядка

$$s(1-s) \frac{d^2 s}{dt^2} + \left(\frac{1}{2} - s\right) \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{ds}{dt} \left| \frac{ds}{dt} \right| + \frac{w}{\Delta} \left(s - \frac{1}{2}\right) = 0 \quad (3.7)$$

Уравнение (3.7) описывает в системе координат связанной с поездом зависимость положения точки  $O$  (разделяющей сжатую и растянутую части) от времени. Одним из его решений является состояние равновесия:

при  $s(0) = 1/2$ ,  $(ds/dt)_{t=0} = 0$  получаем  $s(t) = 1/2$ , т. е. «нулевая точка», расположенная в начальный момент в середине состава и имеющая нулевую скорость, останется там во все время движения.

Рассмотрим случай, когда кратковременное нарушение условия (3.2) («бугор» или «яма» на постоянном участке профиля), или у условия (3.3) (сброс тяги на одном из локомотивов) привели к возникновению начальных условий  $s(0) \neq 1/2$ ,  $(ds/dt)_{t=0} \neq 0$ .

Для оценки поведения нулевой точки необходимо исследовать уравнение (3.5). Введем отклонение от положения равновесия  $z = s - 1/2$  и запишем уравнение в квазилинейной [7] форме

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{4w}{\Delta} z + \left( z^2 - \frac{1}{4} \right) \left( \frac{4wz^3}{\Delta} - z \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{dz}{dt} \left| \frac{dz}{dt} \right| \right) \quad (3.8)$$

Решение уравнения (3.8) в линейном приближении представляет собой гармонические колебания

$$z = c \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (3.9)$$

частота колебаний определяется параметрами  $w$  и  $\Delta$ :

$$\omega_0 = 2(w/\Delta)^{1/2} \quad (3.10)$$

При  $\delta = 0,05$  м,  $N = M/m_0 = 100$  (число вагонов),  $w = 0,11$  м/с<sup>2</sup> получаем  $\Delta = 5$  м, и, в силу (3.10),  $\omega_0 = 0,3$  с<sup>-1</sup>, т. е.  $T = 21$  с.

Нелинейный характер уравнений (3.8) проявляется в изменении амплитуды  $c$  и частоты  $\omega$ , для оценки которых можно воспользоваться методом усреднения [7].

Переходя к безразмерному времени  $\tau = \omega_0 t$  и вводя замену переменных  $z = c \cos u$ ,  $dz/dt = -c \sin u$ , преобразуем уравнение (2.6) к следующему виду

$$\frac{dc}{d\tau} = \Phi(c, u) = \frac{c^3 \cos^3 u - c^3 \cos u \sin^2 u - 0,5c^2 \sin u |\sin u|}{0,25 - c^2 \cos^2 u} \sin u \quad (3.11)$$

$$\frac{du}{d\tau} = 1 - \Psi(c, u) = 1 + \frac{c^3 \cos^3 u - c^3 \cos u \sin^2 u - 0,5c^2 \sin u |\sin u|}{c^2 \cos^2 u - 0,25} \cos u$$

Укороченное уравнение для амплитуды имеет вид

$$\frac{dc}{d\tau} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(c, u) du = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 u \sin u}{\cos^2 u - 0,25c^{-2}} du \quad (3.12)$$

Вычисляя интеграл в правой части получаем

$$\frac{dc}{d\tau} = -\frac{1}{2\pi} \left( 2 + \frac{1-4c^2}{2c} \ln \left| \frac{1-2c}{1+2c} \right| \right) \quad (3.13)$$

Для малых значений  $c$  можно получить решение в явном виде (при  $N = 100$ , колебаниям, охватывающим  $\pm 20$  вагонов соответствует значение безразмерной амплитуды  $c = 0,2$ ). Разлагая (3.13) в ряд по степеням  $c$  и сохраняя члены до  $c^3$  получаем

$$dc/d\tau = -8c^2/(3\pi) \quad (3.14)$$

откуда

$$c(\tau) = 3\pi c(0) [3\pi + 8\tau c(0)]^{-1} \quad (3.15)$$

Укороченное уравнение для фазы соответствующее (3.12) имеет вид

$$\frac{du}{d\tau} = 1 - \frac{1}{2\pi c} \int_0^{2\pi} \Psi(c, u) du = 1 - \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 u (2 \cos^2 u - 1)}{\cos^2 u - 0,25c^{-2}} du$$

Вычисляя интеграл в правой части, получаем

$$du/d\tau = 1 - 1/2 [(1-4c^2)^{1/2} - 1 + 2c^2] c^{-2} (1-4c^2)^{-1/2} \quad (3.16)$$

Разлагая, как и выше, в ряд по степеням  $c$  и сохраняя члены до  $c^3$ , получаем

$$du/d\tau = 1 + 2c^2 \quad (3.17)$$

откуда следует формула для частоты колебаний, уточняющая соотношение (3.10) и определяющая с учетом (3.15) явную зависимость частоты от времени

$$\omega = \omega_0(1 + 2c^2) \quad (3.18)$$

Соотношения (3.15) и (3.18) уточняют (3.9) и дают представление о характере решения уравнения (3.8): движение нулевой точки представляется собой затухающее колебание около среднего положения, амплитуда колебаний медленно убывает в соответствии с (3.15), а частота несколько превышает  $\omega_0$  и медленно убывает в соответствии с (3.18).

Полученные соотношения можно использовать для оценки величины усилий в межвагонных соединениях, которые существенно зависят [3] от относительной скорости движения вагонов. В соответствии с (3.6), (3.9), (3.10) получаем  $(v_1 - v_2) \sim 2c(w\Delta)^{1/2}$ . Для использованных выше значений  $w = 0,11$  м/с<sup>2</sup>,  $\Delta = 5$  м,  $c = 0,2$  получаем  $(v_1 - v_2) \sim 0,3$  м/с (к таким относительным скоростям приводит отклонение нулевой точки на 20 вагонов в 100-вагонном составе на подъеме 10%).

Знание закономерностей движения нулевой точки позволяет ответить на вопрос о возможности достижения ею точки  $B$  (фиг. 2), где расположен ведомый локомотив, оценить величину возникающих ударных взаимодействий и целесообразность расположения этого локомотива в той или иной точке состава.

**4. Переезд с подъема на площадку.** Рассмотрим соединенный поезд, имеющий скорость  $v_0$  и расположенный в начальный момент непосредственно перед переломом (точка  $M$ ) профиля (фиг. 2),  $w_2$  — удельное сопротивление движению точки  $M$ ,  $w_1$  — после точки  $M$ ,  $w_2 > w_1 > 0$ .

Если определить силы тяги локомотивов в соответствии с

$$F_1 = W_1, \quad F_2 = W_2 \quad (4.1)$$

то нетрудно видеть, что система (2.5) имеет решение

$$v_1 = v_2 = v_0 = \text{const}, \quad m_1 = m_2 = \text{const}. \quad (4.2)$$

Этот случай соответствует неподвижному положению точки 0 относительно состава. Из (4.1) и (4.2) следует, что в этом случае силы тяги должны быть кусочно-линейными функциями времени;

$$F_1 = \begin{cases} 1/2 M w_2 + (w_1 - w_2) M L^{-1} v_0 t, & t \leq L / (2v_0) \\ 1/2 M w_1, & t > L / (2v_0) \end{cases} \quad (4.3)$$

$$F_2 = \begin{cases} 1/2 M w_2, & t \leq L / (2v_0) \\ 1/2 M w_2 + (w_1 - w_2) M L^{-1} v_0 (t - L / (2v_0)), & L / (2v_0) < t \leq L / v_0 \\ 1/2 M w_1, & t > L / v_0 \end{cases}$$

Более интересным с точки зрения применения методов динамики тел переменной массы является случай равномерной загрузки локомотивов (3.3). Считая, что скорости частей поезда  $v_1$  и  $v_2$  мало отличаются от  $v_0$ , при  $0 \leq t \leq L / v_0$  приближенно получаем

$$\begin{aligned} W_1 + W_2 &= M(w_2 + (w_1 - w_2)v_0 t / L) \\ F_1 = F_2 &= 1/2 M(w_2 + (w_1 - w_2)v_0 t / L) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Качественное отличие способа управления (3.3) от (4.1) состоит в том, что при проезде перелома профиля (точка  $M$ ) сопротивление движению  $W_1$  — уменьшается, а сила тяги  $F_1$  в соответствии с (4.4), уменьшается медленнее, чем в соответствии с (4.3), что приводит к возрастанию скорости  $v_1$ . Возникающая относительная скорость  $(v_1 - v_2)$  приводит к перетеканию массы (перцепу вагонов) от второй части поезда к первой.

Воспользовавшись заменой переменных (3.1), преобразуем систему (2.5) к виду, аналогичному (3.4)–(3.6), и затем к уравнению второго порядка, аналогичному (3.7):

$$s(1-s)\frac{d^2s}{dt^2} + \left(\frac{1}{2} - s\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{ds}{dt}\left|\frac{ds}{dt}\right| + \frac{W_2 - W_1}{2\Delta M} = 0 \quad (4.5)$$

Силы сопротивления движению  $W_1$  и  $W_2$  зависят от относительного расположения точек  $M$  и  $O$  (фиг. 2). Обозначив через  $T^*$  момент их совпадения и заменяя  $v_1$  на  $v_0$  в силу их близости получаем

$$m_1(T^*) = Mv_0T^*/L \quad (4.6)$$

Тогда для  $W_1$  и  $W_2$  выполняются следующие соотношения:

$$W_1 = \begin{cases} w_1ML^{-1}v_0t + w_2(m_1(t) - ML^{-1}v_0t), & t \leq T^* \\ w_1m_1(t), & t > T^* \end{cases} \quad (4.7)$$

$$W_2 = \begin{cases} m_2(t)w_2, & t \leq T^* \\ w_2m_2(t) + (w_1 - w_2)(m_2(t) - ML^{-1}(L - v_0t)), & T^* < t \leq L/v_0 \\ m_2(t)w_1, & t > L/v_0 \end{cases}$$

Подставляя (4.7) в (4.5) и вводя переменную  $y = 1/2 - s$ , с учетом начальных условий  $s(0) = 1/2$ ,  $(ds/dt)_{t=0} = 0$  получаем на начальном этапе движения (при  $t < T^*$ ) соотношения, описывающие процесс перецепа:

$$\left(y^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{w_2}{\Delta} + y\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{dy}{dt}\left|\frac{dy}{dt}\right| + \frac{w_2 - w_1}{2\Delta L}v_0t = 0 \quad (4.8)$$

$$y \geq v_0t/L - 1/2 \quad (4.9)$$

$$y(0) = 0, \quad (dy/dt)_{t=0} = 0 \quad (4.10)$$

Линеаризуя как и выше (4.8) и вводя параметры

$$\omega = 2(w_2/\Delta)^{1/2}, \quad \lambda = v_0/L, \quad \gamma = (w_2 - w_1)/w_2 \quad (4.11)$$

получаем

$$d^2y/dt^2 + \omega^2y - 1/2\omega^2\lambda\gamma t = 0 \quad (4.12)$$

$$y > \lambda t - 1/2, \quad y(0) = (dy/dt)_{t=0} = 0$$

Решение уравнения имеет вид

$$y = 1/2\lambda\gamma(t - \omega^{-1}\sin\omega t) \quad (4.13)$$

Кривая (4.13) расположена вблизи опорной прямой  $y = 1/2\lambda\gamma t$ . Момент времени  $T^*$  характеризуется пересечением прямой  $y = \lambda t - 1/2$  с кривой (4.13). Этот момент близок к  $T^+$ , определяемому пересечением прямых  $y = \lambda t - 1/2$  и  $y = \lambda\gamma t/2$  (фиг. 3):

$$T^+ = [\lambda(2 - \gamma)]^{-1} \quad (4.14)$$

Момент  $T^+$  всегда существует, поскольку в силу наложенных ограничений  $w_2 > w_1 > 0$  и, следовательно,  $\gamma < 1$ .

Решение для  $t > T^*$  строится аналогично: подставляя выражения для  $W_1$  и  $W_2$  из (4.7) в (4.5) получаем

$$(W_2 - W_1)(2\Delta M)^{-1} = -w_1\Delta^{-1}y + (w_2 - w_1)(2\Delta)^{-1}(1 - \lambda t)$$

и уравнение (3.5) приводится к виду

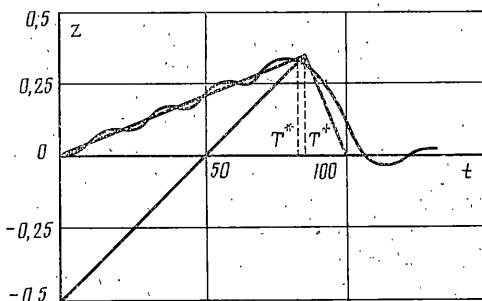
$$d^2y/dt^2 + \omega^2(1 - \gamma)y - 1/2\gamma\omega^2(1 - \lambda t) = 0 \quad (4.15)$$

Решение этого уравнения содержит, как и (4.12), линейный и колебательный члены, амплитуда  $A$  и фаза  $\varphi$  определяются начальными условиями, заданными в момент

$$y(t) = 1/2(1 - \gamma)^{-1}(1 - \lambda t)\gamma + A \sin[\omega(1 - \gamma)^{1/2}t + \varphi] \quad (4.16)$$

Соприжение кривых (4.13) и (4.16) достаточно громоздкое и здесь не приводится.

Соотношения (4.13) и (4.16), показывая, что движение нулевой точки  $O$  представляет собой сумму систематического смещения (с постоянной скоростью) и колебаний. В линейном приближении колебания являются гармоническими, их частота, как и в пункте 2 определяется равенством  $\omega = 2(w/\Delta)^{1/2}$ , где  $w = w_2$  при  $t < T^*$  и  $w = w_1$  при  $t > T^*$ . К моменту окончания переезда (приблизительно  $T^* = \lambda^{-1}$ ) точка  $O$  оказывается в возмущенном положении  $y(T^*) \neq 0$ ,  $(dy/dt)_{t=T^*} \neq 0$ . Далее процесс описывается соотношениями п. 3.



Фиг. 3

Полученные результаты позволяют оценить величину смещения точки  $O$  при часто применяемом на практике синхронном управлении локомотивами и указать места расположения ведомого локомотива в составе, допустимые с точки зрения возникающих ударных воздействий.

Приведем в заключение характерные значения параметров (4.11). Для использованных в п. 3 значений  $\omega = 0,3 \text{ с}^{-1}$ , при  $v_0 = 15 \text{ м/с}$ ,  $w_1 = 0,02 \text{ м/с}^2$  получаем  $\lambda = 0,01 \text{ с}^{-1}$ ,  $\gamma = 0,8$ ,  $\omega(1-\gamma)^{-1} = 0,12 \text{ с}^{-1}$ . Кривые, соответствующие приведенным значениям параметров, изображены на фиг. 3.

**5. Равномерное движение через бугор.** Рассмотрим движение соединенного поезда с расположенным в хвосте ведомым локомотивом через перелом профиля пути, показанного на фиг. 4; удельное сопротивление движения до точки перелома  $M$  положительно:  $w_2 > 0$  (подъем), после точки  $M$ : отрицательно  $w_1 < 0$  (спуск).

Рассматривая закон управления (4.1) или (4.2) (можно рассматривать более общий случай, ограниченный лишь условием  $F_1 + F_2 = W_1 + W_2$ ) заключаем, что все результаты п. 4 сохраняют силу пока выполняется условие  $F_1(t) > 0$ . При нарушении этого условия, что соответствует переходу головного локомотива в режим торможения, вместо (2.5) следует рассматривать следующую систему:

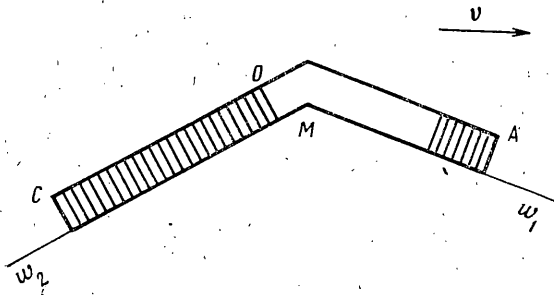
$$\begin{aligned} m_1 dv_1/dt &= F_1 - W_1 + \frac{1}{2}(v_2 - v_1 + |v_2 - v_1|) dm_1/dt \\ 2m_2 dv_2/dt &= -2W_2 + (v_1 - v_2 + |v_1 - v_2|) dm_1/dt + (v_2 - v_3 + |v_2 - v_3|) dm_3/dt \\ m_3 dv_3/dt &= F_3 - W_3 - \frac{1}{2}(v_3 - v_2 + |v_3 - v_2|) dm_3/dt \\ dm_1/dt &= -m_0 \delta^{-1} (v_1 - v_2) \\ dm_3/dt &= m_0 \delta^{-1} (v_3 - v_2), \quad m_1 + m_2 + m_3 = M \end{aligned} \quad (5.1)$$

Система (5.1) описывает поезд состоящий из трех частей: сжатых в голове и хвосте состава и растянутой — в середине состава, вблизи точки перелома профиля. Именно такая структура возникает в поезде, сжатом ведомым локомотивом с хвоста и растянутом с головы после перехода головного локомотива в режим торможения.

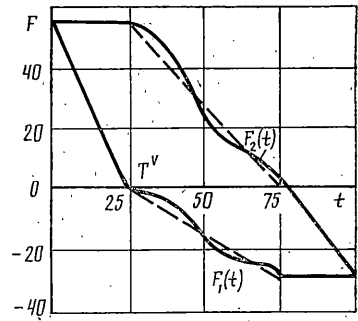
Рассмотрим случай, когда на начальном этапе движения силы локомотивов определяются в соответствии с (4.1), (4.3). Тогда переход в режим торможения (и к рассмотрению системы (5.1) происходит в момент  $T^*$ :

$$T^* = \frac{1}{2} w_2 L (w_2 - w_1)^{-1} v_0^{-1} \quad (5.2)$$

Определим силы тяги локомотивов, при  $t > T^*$  удовлетворяющие условию  $F_1(t) + F_2(t) = W_1 + W_2$  и гарантирующие постоянство скоростей локомотивов и равенство их друг другу. Для постоянства скоростей локомоти-



Фиг. 4



Фиг. 5

вов, а значит и содержащих их частей поезда необходимо выполнение условия (4.1). Тогда в силу системы (5.1) имеем

$$m_1 dv_1/dt = F_1 - W_1, \quad m_2 dv_2/dt = -W_2, \quad m_3 dv_3/dt = F_2 - W_3 \quad (5.3)$$

Обозначив через  $x$  и  $y$  — относительные длины соответственно первой и третьей частей, получаем

$$F_1 = xw_1M = W_1, \quad F_2 = yw_2M = W_2 \quad (5.4)$$

Тогда для силы сопротивления движению средней части получаем

$$W_2 = w_2M + (w_1 - w_2)Mv_0L^{-1}t - xw_1M - yw_2M$$

С учетом приведенных соотношений система (4.1) приобретает вид

$$\begin{aligned} v_1 = v_3 = v_0, \quad dx/dt &= (v_2 - v_0)/\Delta \\ dy/dt &= (v_0 - v_2)/\Delta \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$(1-x-y)dv_2/dt = -(w_2 + (w_1 - w_2)v_0L^{-1}t - xw_1 - yw_2)$$

Из последних двух уравнений получаем  $x+y = \text{const}$ . Поскольку в момент образования в поезде трех частей  $x=0$ ,  $y=1/2$ , получаем

$$y = 1/2 - x \quad (5.6)$$

Теперь систему (5.5) можно привести к уравнению второго порядка

$$d^2x/dt^2 = -2\Delta^{-1}(w_2 - w_1)x + 2\Delta^{-1}(w_2 - w_1)v_0L^{-1}(t - T^v) \quad (5.7)$$

Решение этого уравнения аналогично (4.13):

$$x = v_0L^{-1}(t - T^v) - v_0L^{-1}[2(w_2 - w_1)/\Delta]^{-1/2} \sin\{[2(w_2 - w_1)/\Delta]^{1/2}(t - T^v)\} \quad (5.8)$$

Используя (5.4) и (5.6) отсюда определяем  $F_1$  и  $F_2$ :

$$F_1 = xw_1M, \quad F_2 = (1/2 - x)w_2M \quad (5.9)$$

Получающиеся зависимости приведены на фиг. 5. В некоторый момент времени сжатая часть в хвосте поезда исчезает, с этого момента движение вновь можно описывать системой (2.5). Дальнейшие выкладки здесь не приводятся.

Разобранные примеры показывают эффективность применения методов механики тел переменной массы для исследования эволюции сжатых и растянутых частей в соединенном поезде, приближенной оценки величины возникающих взаимодействий и выбора режима ведения поезда.

Полученные уравнения движения приближенно исследованы аналитически. Проводилось сравнение этих результатов с вычислительным экспериментом, который проводился двумя способами. Первый способ состоял в численном решении полученных выше уравнений. Второй способ основывался на построении дискретной модели поезда в виде цепочки вагонов с зазорами между ними [8]. Подобная модель упоминается в [9] под названием квазидинамической. При выборе зазоров происходит неупругий удар, между соударениями поезд состоит из не взаимодействующих



частей. Эта модель представляет собой дискретный аналог рассмотренной выше. Конечноразностные соотношения, описывающие дискретную модель, соответствуют введенным дифференциальным уравнениям. Дискретная модель позволяет исследовать разнообразные режимы движения, типы профиля, не накладывая заранее ограничений на количество образующихся в поезде частей. Полученные в работе аналитические результаты полностью согласуются с результатами моделирования.

Автор выражает благодарность Л. А. Мугинштейну за обсуждение и М. Ю. Новодворскому за помощь в вычислительных экспериментах.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мецгерский И. В.* Работы по механике тел переменной массы. М.: Гостехиздат, 1952. 280 с.
2. *Пановко Я. Г.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1985. 287 с.
3. *Блохин Е. П., Манашкин Л. А.* Динамика поезда. М.: Транспорт, 1982. 222 с.
4. *Блохин Е. П., Манашкин Л. А., Стамблер Е. Л., Маслеева Л. Г.* Расчеты и испытания тяжеловесных поездов. М.: Транспорт, 1986. 263 с.
5. *Папкин Н. А.* Движение поезда в период трогания с места. Тр. МИИТ. 1970. Вып. 310. С. 63–72.
6. *Папкин Н. А., Бакман А. А.* Определение темпа нарастания силы тяги при трогании Тр. МИИТ. 1984. Вып. 758. С. 48–52.
7. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1974. 503 с.
8. *Мугинштейн Л. А., Полоцкий В. Н., Новодворский М. Ю.* Математическая модель соединенного поезда в виде групп вагонов с зазорами между ними. Вестник ВНИИЖТ. 1989. № 3. С. 13–18.
9. *Гарг В. К., Дуккипати Р. В.* Динамика подвижного состава. М.: Транспорт, 1988. 391 с.

Москва

Поступила в редакцию  
24.IV.1988