МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1990

УДК 531.8

И. В. НОВОЖИЛОВ, А. В. ПАНШИНА

КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ИЗБЫТОЧНОСТЬ КОНЕЧНОСТЕЙ И ЭНЕРГОЗАТРАТЫ ЧЕТЫРЕХНОГОЙ ХОДЬБЫ

Оптимизации энергозатрат шагающих аппаратов посвящена обширная литература (см., например [1], [1–3]). При этом кинематическая схема конечности обычно берется двухзвенной, трехшарнирной, что минимально возможным образом обеспечивает свободу выбора опорной точки относительно корпуса. Однако известно [2], [4, 5], что в скелете конечности животного выделяется до семи отдельных звеньев. Известно также [5, 6], что относительные размеры звеньев конечностей резко отличаются для «крупных» и «мелких» животных. Цель работы – установить связь этих особенностей строения конечностей животных с их энергозатратами на передвижение.

1. Математическая модель. Рассмотрим (фиг. 1) пространственную модель четырехногого шагающего аппарата или животного. Моделью учитываются три основных звена скелета конечности животных [5, 6]: плечо, предплечье, пястная кость — для грудной конечности; бедро, голень, стопа — для тазовой. Длины звеньев, отсчитывая от корпуса, обозначим через L_1, L_2, L_3. Левые переднюю и заднюю по ходу движения ноги обозначим нечетными номерами 1 и 3, правые — четными номерами 2 и 4. Верхнее звено соединяется с корпусом при помощи двухстепенного шарнира, как указано на фиг. 1. Друг с другом звенья соединяются в плоскости ноги одностепенными шарнирами. Размерами шарниров пренебрегаем. Опорная поверхность — горизонтальная плоскость. Нога опирается на нее в точке. Ноги к корпусу крепятся в вершинах прямоугольника длиною $2L$, шириною $2D$. На пересечении диагоналей прямоугольника лежит центр масс корпуса C. Ноги считаются безынерционными.

Введем неподвижную систему отсчета $OXYZ$, в которой описывается движение при данном наборе опорных ног. Ее оси X, Z лежат в опорной плоскости, ось X направлена по ходу движения, ось Z проходит через переднюю точку опоры ноги. Введем трехгранник главных центральных осей корпуса $CX_0Y_0Z_0$. Предположим, что его оси совпадают с осями симметрии прямоугольника точек крепления ног к корпусу.

Зададим положение корпуса координатами центра масс X_C, Y_C, Z_C и углами курса ψ, тангажа ϑ, крена γ между трехгранниками $X_0Y_0Z_0$ и XYZ.

Положение i-ой ноги зададим углом φ_{i0} между плоскостью ноги и сагиттальной плоскостью CX_0Y_0 корпуса. В плоскости ноги положение ее звеньев зададим углами φ_{i1}, φ_{i2}, φ_{i3} (фиг. 1), которые отсчитываются от нисходящих перпендикуляров к линии пересечения плоскости ноги с опорной плоскостью.

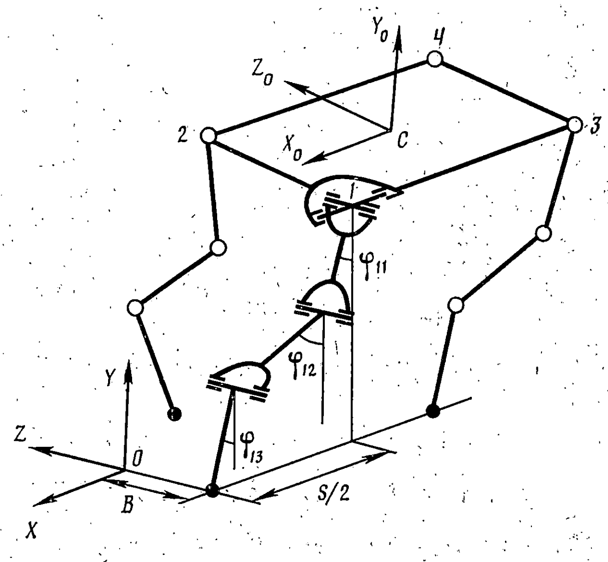
Далее будут рассматриваться только двухопорные аллюры — иноходь и рысь. При этом в качестве программного может быть выбрано движение [7]:

$$X_C^{\cdot}=V,\quad Y_C=H,\quad Z_C=0,\quad \psi=\vartheta=0 \tag{1.1}$$

---

[1] *Белецкий В. В., Болотин Ю. В.* Энергетика пространственной двуногой ходьбы: Препринт № 118. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР. 1981. 28 с.; *Охоцимский Д. Е., Платонов А. К., Лапшин В. В.* Исследование энергетики движения шестиногого шагающего аппарата: Препринт № 96. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР. 1981. 27 с.

[2] *Коток В. С.* К вопросу о кинематике суставов задней конечности млекопитающих // Структура и биомеханика скелетно-мышечной и сердечно-сосудистой систем позвоночных: Тез. докл. Респ. конф. Киев, 1984, Киев: Наук. думка, 1984. С. 57–59.



Фиг. 1

В [7—10] [3] показано, что можно организовать «жесткое» управление по рассогласованиям от (1.1), которое реализует это программное движение с любой точностью. При этом задачу можно рассматривать в полуобратной постановке, считая (1.1) сервосвязями, наложенными на систему.

Рассмотрим установившееся циклическое движение двухопорными аллюрами иноходь и рысь. Считаем, что смена опорных ног происходит мгновенно. Обозначим через S длину шага (перемещение центра масс C за время шага). Постановка каждой ноги производится с продольным выносом $S/2$ относительно точки крепления к корпусу и боковым выносом B относительно оси OX (фиг. 1).

Уравнения движения системы по сервосвязям (1.1) составим в форме уравнений количества движения и кинетического момента.

Для движения иноходью, в фазе опоры на односторонние, например, $i=1$, 3, ноги, имеем

$$
\begin{aligned}
&0=R_{1X}+R_{3X},\quad 0=R_{1Y}+R_{3Y}-Mg,\quad 0=R_{1Z}+R_{3Z}\\
&M\mathrm{P}^2\gamma^{\cdot\cdot}=B(R_{1Y}+R_{3Y})-H(R_{1Z}+R_{3Z})\\
&0=-B(R_{1X}+R_{3X})-R_{1Z}(L-X_1)+R_{3Z}(L+X_1)\\
&0=R_{1Y}(L-X_1)-R_{3Y}(L+X_1)+(R_{1X}+R_{3X})Y_1\\
&X_1=-S/2+VT,\quad Y_1=H-D\gamma
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по времени T; R_{iX}, R_{iY}, R_{iZ} — проекции реакции i-ой ноги в опорной точке; X_1, Y_1 — координаты точки подвеса ноги $i=1$ в системе XYZ; M — масса корпуса; P — его центральный радиус инерции относительно оси CX_0; угол γ считается малым.

Система (1.2) статически не определена. Поскольку движение корпуса происходит с постоянной продольной скоростью, то естественно доопределить (1.2) условием

$$R_{1X}=R_{3X}=0 \tag{1.3}$$

Перейдем в (1.2), (1.3) к безразмерным величинам (g — ускорение свободного падения).

$$t=T/T_*,\quad x=X/L_*,\ldots,\quad l_i=L_i/L_*,\ldots,\quad \rho=\mathrm{P}/L_*$$

$$s=S/L_*,\quad d=D/L_*,\quad h=H/L_*,\quad b=B/L_*,\quad v=V/V_*,\quad r_{1X}=R_{1X}/R_*,\ldots$$

$$T_*=(L/g)^{1/2},\quad L_*=L,\quad R_*=Mg,\quad V_*=L_*/T_*$$

[3] *Новожилов И. В.* Управление ногой шагающего аппарата в фазе опоры // Биомеханика: Тр. Рижск. н.-и. ин-та травмотологии и ортопедии. 1975. Т. 13. С. 634–639.

Получим из (1.2), (1.3):

$$\gamma''=b/\rho^2, \quad r_{1Y}=(1-s/2+vt)/2, \quad r_{3Y}=(1+s/2-vt)/2 \tag{1.4}$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по безразмерному времени t.

По первому уравнению из (1.4) легко построить периодическое по γ движение, которое обеспечивается при смене пары опорных ног через время шага $t_0=T_0/T_*$. Это движение реализуется, если для опорной пары $i=1$, 3 начальными условиями будут

$$\gamma_0=0, \quad \gamma_0'=-bs/2v\rho^2 \tag{1.5}$$

Движение рысью, в фазе опоры на диагональные ($i=1$, 4) ноги, описывается уравнениями

$$\begin{gathered} 0=r_{1X}+r_{4X}, \quad 0=r_{1Y}+r_{4Y}-1, \quad 0=r_{1Z}+r_{4Z} \\ \rho^2\gamma''=b(r_{1Y}-r_{4Y})-h(r_{1Z}+r_{4Z}) \\ 0=b(-r_{1X}+r_{4X})-r_{1Z}(1+s/2-vt)+r_{4Z}(1-s/2+vt) \\ 0=r_{1Y}(1+s/2-vt)-r_{4Y}(1-s/2+vt)+y_1(r_{1X}+r_{4X}) \\ y_1=h-d\gamma \end{gathered} \tag{1.6}$$

Доопределим систему (1.6) условием вида (1.3). Тогда из (1.6) получим

$$\begin{gathered} \gamma''=b(-s/2+vt)/\rho^2 \\ r_{1Y}=(1-s/2+vt)/2, \quad r_{4Y}=(1+s/2-vt)/2 \end{gathered} \tag{1.7}$$

Движение по γ — периодическое, если для опорной пары $i=1$, 4 начальными условиями будут

$$\gamma_0=bs^2/(24v^2\rho^2), \quad \gamma_0'=0 \tag{1.8}$$

Обозначим через Q_{ij} момент управления в j-ом шарнире i-ой ноги, приняв здесь такую же индексацию, как для введенных выше φ_{ij}. Моменты управления переносимыми ногами равны нулю, т. к. ноги безынерционные. Введем безразмерные величины $q_{ij}=Q_{ij}/MgL$. Их выражения могут быть получены из уравнений квазистатического равновесия для безынерционных опорных ног. Для малых γ получим в случае:
иноходи ($i=1$, 3):

$$\begin{gathered} q_{i0}=r_{iY}(d-b) \\ q_{i1}=-r_{iY}(l_1\sin\varphi_{i1}+l_2\sin\varphi_{i2}+l_3\sin\varphi_{i3})\times \\ \times(\cos\varphi_{i0}-\gamma\sin\varphi_{i0}) \\ q_{i2}=-r_{iY}(l_2\sin\varphi_{i2}+l_3\sin\varphi_{i3})(\cos\varphi_{i0}-\gamma\sin\varphi_{i0}) \\ q_{i3}=-r_{iY}l_3\sin\varphi_{i3}(\cos\varphi_{i0}-\gamma\sin\varphi_{i0}) \end{gathered} \tag{1.9}$$

для рыси ($i=1$, 4)

$$\begin{gathered} q_{10}=r_{1Y}(d-b), \quad q_{40}=-r_{4Y}(d-b) \\ q_{i1}=-r_{iY}(l_1\sin\varphi_{i1}+l_2\sin\varphi_{i2}+l_3\sin\varphi_{i3})\times \\ \times(\cos\varphi_{i0}-\gamma\sin\varphi_{i0}) \\ q_{i2}=-r_{iY}(l_2\sin\varphi_{i2}+l_3\sin\varphi_{i3})(\cos\varphi_{i0}-\gamma\sin\varphi_{i0}) \\ q_{i3}=-r_{iY}l_3\sin\varphi_{i3}(\cos\varphi_{i0}-\gamma\sin\varphi_{i0}) \end{gathered} \tag{1.10}$$

Удельные энергозатраты E на один шаг в процессе установившейся ходьбы будем оценивать линейной комбинацией двух общепринятых [1—

3] функционалов

$$E=k_sE_s+k_dE_d \qquad (1.11)$$

$$E_s=\int_0^{T_0}\sum_{i,j}Q_{ij}^2\,dT,\qquad E_d=\int_0^{T_0}\sum_{i,j:Q\omega>0}Q_{ij}\omega_{ij}\,dT \qquad (1.12)$$

k_s, k_d — весовые коэффициенты статической E_s и динамической E_d составляющих энергозатрат; $T_0=S/V$ — время шага; ω_{ij} — относительная угловая скорость звеньев в j-ом шарнире i-ой ноги. При вычислении E_d вместо $Q_{ij}\omega_{ij}<0$ берется нуль, что соответствует «приводу без рекуперации».

Подставим в (1.12) явные выражения для ω_{ij}. Перейдем к безразмерным величинам, приняв дополнительно $e_d=E_d/E_{d*}$, $e_s=E_s/E_{s*}$, $e=E/E_{d*}$. Здесь $E_{d*}=MgL$, $E_{s*}=M^2g^{3/2}L^{5/2}$. Предположим, что массовая плотность η животных не зависит от их размеров. Тогда $E_{d*}=\eta gL^4$, $E_{s*}=\eta^2g^{3/2}L^{17/2}$ и выражения (1.11), (1.12) примут вид

$$e=k_d(e_d+\varepsilon\varkappa e_s) \qquad (1.13)$$

$$\varepsilon=E_{s*}/E_{d*}=\eta g^{1/2}L^{9/2},\quad \varkappa=k_s/k_d$$

$$e_d=\int_0^{t_0}\sum_{i,j:q\omega>0}[q_{i0}(\varphi_{i0}'-\gamma')+q_{i1}\varphi_{i1}'+q_{i2}(\varphi_{i2}'-\varphi_{i1}')+q_{i3}(\varphi_{i3}'-\varphi_{i2}')]\,dt,$$

$$e_s=\int_0^{t_0}\sum_{i,j}q_{ij}^2\,dt \qquad (1.14)$$

Коэффициент ε геометрического подобия сильно зависит от размеров животного. При изменении L от 0,35 м (характерный размер собаки, косули) до 1,7 м (характерный размер слона) величина ε возрастает на три — четыре десятичных порядка. Коэффициент $\varkappa$ определяется физиологией мышц, учитывает отступления от геометрического подобия для различных животных и т. д. Примем допущение о том, что зависимость коэффициента $\varkappa$ от L более слабая, чем у коэффициента ε. Предположим, что в рассматриваемом диапазоне изменения L критерий (1.11) универсален для животных всех размеров и не может быть сведен к одному из его слагаемых — k_dE_d или k_sE_s. Отсюда вытекает, что энергетика мелких животных (собака, косуля,...) оценивается, главным образом, динамической частью критерия, а крупных (бык, слон,...) — его статической частью.

Следует заметить, что для антропоморфной модели двуногой ходьбы в [1] показано, что при больших скоростях движения существен учет инерционности ног. Оценка этого обстоятельства для массинерционных характеристик конечностей мелких животных требует дополнительного исследования.

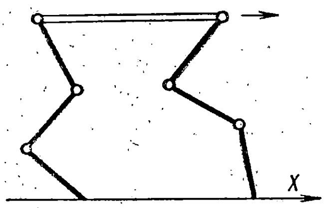
2. Доопределение кинематической избыточности. Выражения для ψ_{jj}', входящие в (1.14), и φ_{ij}, входящие в (1.9), (1.10), вычисляются следующим образом. Составим соотношения, связывающие координаты центра масс корпуса с φ_{ij}

$$\begin{aligned} x_C&=-1-l_1\sin\varphi_{i1}-l_2\sin\varphi_{i2}-l_3\sin\varphi_{i3}\\ y_C&=h=d\gamma+(l_1\cos\varphi_{i1}+l_2\cos\varphi_{i2}+l_3\cos\varphi_{i3})\times\\ &\quad\times(\cos\varphi_{i0}-\gamma\sin\varphi_{i0})\\ z_C&=0=d-b-(l_1\cos\varphi_{i1}+l_2\cos\varphi_{i2}+l_3\cos\varphi_{i3})(\sin\varphi_{i0}+\gamma\cos\varphi_{i0}) \end{aligned} \qquad (2.1)$$

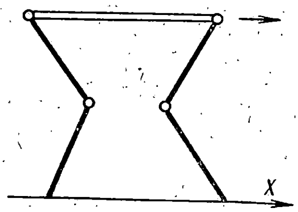
Здесь x_C, y_C, z_C берутся на сервосвязях (1.1), γ определяется по (1.4) или (1.7) с начальными условиями (1.5) или (1.8).

Система трех уравнений (2.1) не определена относительно четырех неизвестных φ_{ij} ($j=0$, 1, 2, 3). Доопределим ее по данным эксперимента с животными на подвижной дорожке — тредбане, который проводился в Институте зоологии им. И. И. Шмальгаузена АН УССР[4] [6].

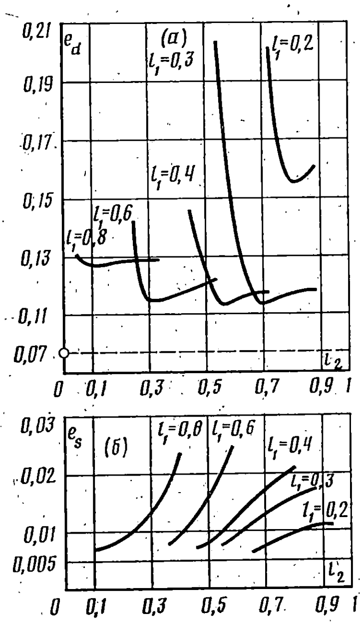
[4] См. указ. публ. с. 60 *Коток В. С.*



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

При анализе механограмм было принято предположение о параллельности позвоночника опорной плоскости. Анализ показал, что время t_0 опорной фазы передней конечности может быть разбито на четыре временных интервала: $[0,\ t_1]$, протяженностью менее 10% от t_0. На этом интервале среднее звено движется поступательно в своей плоскости. Движение здесь доопределяется условием $\varphi_{i2}'=0$; $[t_1,\ t_2]$, протяженностью 30—80% от t_0. На этом интервале угол между верхним и нижним звеном не меняется $\varphi_{i1}'=\varphi_{i3}'$; $[t_2,\ t_3]$, протяженностью 10—50% от t_0. На этом интервале не меняется угол между двумя нижними звеньями $\varphi_{i2}'=\varphi_{i3}'$; $[t_3,\ t_0]$, протяженностью менее 10% от t_0, для которого $\varphi_{i1}'=0$.

Для задней конечности выявляются следующие интервалы: $[0,\ t_1]$, протяженностью 20—50% от t_0, для которого $\varphi_{i1}'=0$; $[t_1,\ t_2]$, протяженностью 30—80% от t_0, для которого $\varphi_{i1}'=\varphi_{i3}'$; $[t_2,\ t_0]$, протяженностью 0—50% от t_0, для которого $\varphi_{i2}'=0$.

Продифференцируем (2.1), дополним одним из доопределяющих условий и разрешим относительно φ_{ij}'. В зависимости от способа доопределения получим следующие выражения:

$$\varphi_{i0}'=-\gamma'\left[1-(-1)^i d\sin\varphi_{i0}/(l_1\cos\varphi_{i1}+ +l_2\cos\varphi_{i2}+l_3\cos\varphi_{i3})\right]\quad (i=1,2,3,4) \tag{2.2}$$

Для $\varphi_{i2}'=0$:

$$\begin{aligned}\varphi_{i1}'&=(\pm d\gamma'\cos\varphi_{i0}\cos\varphi_{i3}+v\sin\varphi_{i3})/[l_1\sin(\varphi_{i1}-\varphi_{i3})]\\ \varphi_{i3}'&=(\mp d\gamma'\cos\varphi_{i0}\cos\varphi_{i1}+v\sin\varphi_{i1})/[l_3\sin(\varphi_{i3}-\varphi_{i1})]\end{aligned} \tag{2.3}$$

Для $\varphi_{i1}'=\varphi_{i3}'$:

$$\begin{aligned}\varphi_{i1}'=\varphi_{i3}'&=(v\sin\varphi_{i2}\mp d\gamma'\cos\varphi_{i0}\cos\varphi_{i2})/[l_1\sin(\varphi_{i1}-\\ &\quad-\varphi_{i2})+l_3\sin(\varphi_{i3}-\varphi_{i2})]\\ \varphi_{i2}'&=[-v(l_1\sin\varphi_{i1}+l_3\sin\varphi_{i3})\pm d\gamma'\cos\varphi_{i0}(l_1\cos\varphi_{i1}+\\ &\quad+l_3\cos\varphi_{i3})]/[l_2(l_1\sin(\varphi_{i1}-\varphi_{i2})+l_3\sin(\varphi_{i3}-\varphi_{i2}))]\end{aligned} \tag{2.4}$$

Для $\varphi_{i2}'=\varphi_{i3}'$:

$$\begin{gathered}\varphi_{i2}'=\varphi_{i3}'=(v\sin\varphi_{i1}\mp d\gamma'\cos\varphi_{i0}\cos\varphi_{i1})/[l_2\sin(\varphi_{i2}-\\-\varphi_{i1})+l_3\sin(\varphi_{i3}-\varphi_{i1})]\\ \varphi_{i1}'=[-v(l_2\sin\varphi_{i2}+l_3\sin\varphi_{i3})\pm d\gamma'\cos\varphi_{i0}(l_2\cos\varphi_{i2}+\\+l_3\cos\varphi_{i3})]/[l_1(l_2\sin(\varphi_{i2}-\varphi_{i1})+l_3\sin(\varphi_{i3}-\varphi_{i1}))]\end{gathered} \tag{2.5}$$

Для $\varphi_{i1}'=0$:

$$\begin{gathered}\varphi_{i2}'=(\mp d\gamma'\cos\varphi_{i0}\cos\varphi_{i3}+v\sin\varphi_{i3})/[l_2\sin(\varphi_{i2}-\varphi_{i3})]\\ \varphi_{i3}'=(\mp d\gamma'\cos\varphi_{i0}\cos\varphi_{i2}+v\sin\varphi_{i2})/[l_3\sin(\varphi_{i3}-\varphi_{i2})]\end{gathered} \tag{2.6}$$

В (2.3)—(2.6) верхний знак при иноходи соответствует ногам с индексами $i=1$, 3, при рыси — ноге с $i=1$; нижний знак отвечает при движении рысью ноге с $i=4$.

Для каждого варианта доопределения и для каждой ноги получается система дифференциальных уравнений по φ_{ij} вида (2.2)—(2.6). Начальные условия по φ_{i1}, φ_{i2}, φ_{i3} задают начальную конфигурацию трехзвенной ноги в ее плоскости. Соотношения (1.4), (1.5), (1.9) для иноходи и (1.7), (1.8), (1.10) для рыси совокупно с уравнениями (1.14), (2.2)—(2.6) образуют замкнутую систему соотношений, позволяющую проводить оценку энергозатрат.

Поставленная задача многопараметрична. При численном анализе часть параметров фиксировалась: $d=0{,}5$, $b=0{,}5$, $h=0{,}8$, $s=0{,}6$, $v=2{,}2$. Варьировались относительные длины звеньев ног l_1, l_2, l_3; начальные условия по φ_{ij} определяющие конфигурацию ноги; параметры t_1, t_2, t_3 кинематического доопределения.

3. Численное моделирование. Конфигурация трехзвенной ноги определяется углом $\varphi_{i1}(0)$ в момент начала опоры и величиной $\operatorname{sign}(\varphi_{i2}-\varphi_{i3})$. При $\operatorname{sign}(\varphi_{i2}-\varphi_{i3})=1$ нога имеет изгиб нижнего сустава вперед, а при $\operatorname{sign}(\varphi_{i2}-\varphi_{i3})=-1$ — назад. При счете величина $\varphi_{i1}(0)$ варьировалась в диапазоне $-50°-70°$ с шагом 5°.

Анализ результатов счета на ЭВМ показал, что энергетически предпочтительными конфигурациями ног являются конфигурации, изображенные на фиг. 2. В момент начала опоры передней ноги угол φ_{i1} должен находиться в пределах $-15°-\ -45°$, нижний сустав в течение всей опорной фазы изогнут вперед. В момент начала опоры задней ноги φ_{i1} должен находиться в пределах 30°—60°, нижний сустав в течение всей опорной фазы изогнут назад. Такая конфигурация уменьшает e_s до 50%, а e_d — до 100% по сравнению с другими конфигурациями, когда нижний сустав изогнут противоположным образом (фиг. 2), а $\varphi_{i1}(0)$ принимает любые значения из взятого диапазона.

Уменьшение функционалов e_s и e_d происходит за счет уменьшения величин моментов (1.9), (1.10). В свою очередь, это объясняется уменьшением плеч вертикальных опорных реакций относительно шарниров при перемещении в течение шага центра тяжести C от задних ног к передним.

Заметим, что подобную конфигурацию ног имеют животные с латерально расположенной плоскостью ног [4—6].

Полученный результат справедлив, как показал счет, при любых соотношениях длин звеньев l_1, l_2, l_3 и параметров t_1, t_2, t_3. Поэтому при последующем варьировании параметров l_i и t_i конфигурация ног бралась такой, как на фиг. 2.

При варьировании параметров t_i диапазоны их изменения брались в соответствии с [6]. Шаг изменения параметров выбирался таким, чтобы каждый диапазон содержал несколько точек. Численный счет показал, что значения t_i, минимизирующие энергозатраты, зависят от величин l_i и $\varphi_{i1}(0)$. Поэтому при последующем варьировании l_i, $\varphi_{i1}(0)$ для каждого набора этих величин проводилась оптимизация e_d и e_s по t_i. Такая оптимизация дает для e_d выигрыш до 100%, для e_s — до 20% по отношению к худшему сочетанию параметров t_i в рассматриваемом диапазоне.

При варьировании l_i общая длина ноги должна обеспечивать возможность постановки ноги в заданную опорную точку. Кроме того, не допускается вырождение, при котором суставы выпрямляются: угол $|\varphi_{i2}-\varphi_{i3}|$ удерживается в пределах 100—140°, длина среднего звена l_2 не обращается в ноль. Допускается обращение в ноль величин l_1, l_3, что дает разные конфигурации двухзвенных ног. Варьирование l_i производится с шагом 0,05.

Параметрическая оптимизация e_d по l_1, l_2, l_3 показала, что динамический функционал принимает минимальные значения при $l_1=0{,}35$, $l_2=0{,}35$, $l_3=0{,}4$ для передних ног и при $l_1=0{,}35$, $l_2=0{,}4$, $l_3=0{,}3$ для задних ног.

Оптимизация статического функционала показала, что величина e_s монотонно уменьшается с уменьшением l_3. В пределе это приводит к модели двухзвенной ноги.

Двухзвенная модель кинематически определена. При этом отпадает необходимость оптимизации по t_i. Вычисления для нее проводились в силу уравнений (1.4), (1.5), (1.9) для иноходи и (1.7), (1.8), (1.10) для рыси совокупно с (1.14), (2.1), где либо $l_1=0$, либо $l_3=0$.

Варьировались все возможные конфигурации передних и задних ног. Счет показал, что оптимальной и для e_d, и для e_s является конфигурация, изображенная на фиг. 3. При этом достигается выигрыш по сравнению с другими конфигурациями для e_d – до 10–25%, для e_s – до 10–20%. Видно, что конфигурация фиг. 3 получается из фиг. 2 предельным переходом $l_3 \to 0$, что для e_s уже оговаривалось.

Результаты параметрической оптимизации по l_1, l_2 двухзвенной модели (фиг. 3) приведены для движения иноходью на фиг. 4. Для движения рысью результаты качественно не отличаются. На фиг. 4, *а* штриховкой обозначено минимальное значение e_d, полученное выше при оптимизации трехзвенной ноги. Из фиг. 4, *б* следует, что величина e_s уменьшается с общим выпрямлением и укорочением ноги.

Сделаем выводы: добавление третьего звена позволяет уменьшить величину e_d до 40% при движении иноходью и до 30% при движении рысью по сравнению с минимальным по l_1, l_2 значением e_d для двухзвенной ноги. При оптимальных для e_d значениях l_1, l_2, l_3 функционал e_s увеличивается на 10–25% по сравнению с двухзвенным случаем, оптимизированным по l_1, l_2. Уменьшить величину e_s для трехзвенной ноги по сравнению с двухзвенным случаем не удается.

В п. 1 был сделан вывод о преобладании в суммарных энергозатратах (1.13) динамической части e_d при движении модели аппарата с размерами, характерными для мелких животных, и о преобладании статической части e_s – для крупных.

Сравним результаты численного счета с данными сравнительно-анатомического анализа конечностей наземных позвоночных [5, 6]. У косули как представителя мелких быстробегающих животных соотношение длин сегментов, начиная с верхнего, для передних ног равно 30 : 35,5 : 44,5, а для задних ног – 30,1 : 38,1 : 31,8. У слона для обеих ног – 1 : 0,6 : 0,13.

Видно, что результаты анализа энергозатрат от l_1, l_2, l_3 качественно согласуются с данными биометрии. Минимизация e_d происходит при длинах l_i, характерных для косули, а уменьшение e_s происходит при относительном укорочении нижнего звена и общем выпрямлении ноги, что характерно для слона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белецкий В. В.* Двуногая ходьба. Модельные задачи динамики и управления. М.: Наука. 1984. 286 с.
2. *Белецкий В. В., Лавровский Э. К.* Модельная задача двуногой ходьбы // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 2. С. 156–165.
3. *Калинин В. В.* О выборе походки четырёхного шагающего аппарата // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 2. С. 51–58.
4. *Гамбарян П. П.* Бег млекопитающих. Л.: Наука. 1972. 334 с.
5. *Gray J.* Animal locomotion. L.: Weidenfeld, 1968. 479 p.
6. *Манзий С. Ф., Мороз В. Ф.* Морфо-функциональный анализ грудных конечностей млекопитающих. Киев: Наук. думка, 1978. 134 с.
7. *Зацепин М. Ф., Новожилов И. В.* Управление аллюрами четырехногой ходьбы // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 5. С. 60–66.
8. *Новожилов И. В.* Управление пространственным движением двуногого шагающего аппарата // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 4. С. 47–53.
9. *Паншина А. В.* Разделение движений в динамике четырехного шагающего аппарата // Науч. тр. Моск. энергет. ин-та. 1985. № 77. С. 68–75.
10. *Болотин Ю. В., Новожилов И. В.* Управление походкой двуногого шагающего аппарата // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 3. С. 47–52.

Москва

Поступила в редакцию 22.II.1989