МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1990

УДК 531.44

В. В. НИКОЛЬСКИЙ, Ю. П. СМИРНОВ

ДИНАМИКА СИСТЕМ С МНОГОВАРИАНТНЫМИ МОДЕЛЯМИ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТРУЩИХСЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

В предположении точечного взаимодействия твердых тел и статической определимости реакций связей при произвольной нагрузке записаны уравнения движения механической системы с сухим трением для произвольного варианта контакта тел. Наличие исчезающе малых зазоров обеспечивает нагружение в каждый момент не более m точек контакта при общем их числе $2m$. Сформулированы и обоснованы условия существования такого рода связей и условия малого трения, последние являются необходимыми условиями устойчивости движения, под которой понимается ограниченность, конечность реакций при конечных заданных силах. Показано, что в условиях малого трения решение задачи движения существует и единственно.

1. Допущения. Математическое описание движения системы базируется на следующих положениях: 1) тела системы абсолютно твердые, кроме, возможно, поверхностей контакта; 2) контакт между телами приводится к точечному, причем обеспечивается статическая определимость реакций при произвольных нагрузках на систему; 3) зазоры в кинематических парах пренебрежимо малы; 4) положение точек контакта не зависит от интенсивности нагрузки; 5) на нагруженных поверхностях тел реакции направлены «в тело».

Комбинации связей в кинематических парах с исчезающе малыми зазорами дают возможность телам различным образом опираться друг на друга в зависимости от приложенных сил и состояния системы, при этом часть опорных точек нагружена, другая часть разгружена. Как только какая-либо связь выходит из работы, тут же вступает в действие другая связь, и число степеней свободы n и число статически определяемых реакций m не изменяются. Такие связи назовем вариантными, — это комбинации односторонних связей невырождающейся размерности, которые при произвольных нагрузках обеспечивают удержание тел и статическую определимость реакций [1—5].

Рассмотрим двусторонние вариантные связи, они реализуются четным числом поверхностей и точек контакта, вдвое большим числа статически определяемых реакций. У каждой точки контакта имеется точка-антипод. В парах антиподных точек в каждой момент может быть нагружена только одна точка. Каждой паре точек-антиподов ставится в соответствие собственный вариантный индекс i_k, принимающий значение $+1$ для одной точки и -1 для другой точки пары, k — номер пары точек опирания, $k=1,\dots,m$. Вариантные индексы будем располагать сверху-справа от соответствующих символов.

2. Уравнения движения системы с вариантными связями. Расчленяя систему на звенья, вводя избыточные координаты $q_{n+1},\dots,q_{n+m}$, отделяя обобщенные силы трения $\overset{0}{Q}_{\tau,i}$, $\overset{0}{Q}_{\tau,n+r}$ от обобщенных задаваемых сил Q_i^0, Q_{n+r}^0, можно записать уравнения движения в виде [2, 4—6]:

$$\ddot{q}_\sigma^{s} = -\sum_{\rho=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n}\left\{ \begin{matrix}\sigma\\ \rho\lambda\end{matrix} \right\}^0 \dot{q}_\rho \dot{q}_\lambda + \sum_{\rho=1}^{n} (A_{\sigma\rho}^{-1})^0 (\overset{0}{Q}_\rho + Q_{\tau,\rho}^{0s}) \qquad (\sigma=1,\dots,n) \tag{2.1}$$

$$\lambda_{n+r}^{s} = -\sum_{\sigma=1}^{n} \overset{0}{A}_{n+r,\sigma} \sum_{\rho=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \rho\lambda \end{matrix} \right\}^{0} \dot{q}_{\rho} \dot{q}_{\lambda} - \overset{0}{Q}_{n+r} +$$
$$+ \sum_{\sigma=1}^{n} \overset{0}{A}_{n+r,\sigma} \sum_{\rho=1}^{n} (\overset{-1}{A}_{\sigma\rho})^{0} (\overset{0}{Q}_{\rho} + \overset{0s}{Q}_{\tau,\rho}) - \overset{0s}{Q}_{\tau,n+r} +$$
$$+ \sum_{\sigma=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n} [\sigma, \rho; n+r]^{0} \dot{q}_{\sigma} \dot{q}_{\rho} \quad (r=1, \ldots, m).$$
$$(2.2)$$

Здесь A — матрицы инерционных коэффициентов, s — свернутое обозначение произвольного варианта опирания, т. е. произвольной комбинации значений вариантных индексов $s=(i_1, \ldots, i_m)$, λ — обобщенные реакции. Прямые и фигурные скобки есть символы Кристоффеля соответственно первого и второго рода. Верхний нуль означает, что избыточные координаты и производные от них по времени после составления соответствующих выражений следует обратить в нуль [6].

Из системы (2.2) исключены обобщенные ускорения, и если в (2.2) подставить выражения обобщенных реакций и сил трения из [5], то получим систему m уравнений для вычисления m нормальных реакций в предполагаемых нагруженными точках опирания в виде

$$\sum_{k=1}^{m} D_{rk}^{i_k} N_k = b_r \qquad (r=1, \ldots, m) \qquad (2.3)$$

Характерный элемент матрицы $D_{rk}^{i_k}$ имеет вид

$$D_{rk}^{i_k} = (\mathbf{v}_k^{i_k} + f_k^{i_k} \boldsymbol{\tau}_k^{i_k}) \frac{\partial \mathbf{r}_k^{i_k}}{\partial q_{n+r}} - \sum_{\sigma=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n} A_{n+r,\,\sigma}^{0} (A_{\sigma\rho}^{-1})^{0} f_k^{i_k} \boldsymbol{\tau}_k^{i_k} \frac{\partial \mathbf{r}_k^{i_k}}{\partial q_{\rho}}$$

а правая часть состоит из активных заданных и инерционных сил

$$b_r = \sum_{\sigma=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n} \overset{0}{A}_{n+r,\sigma} (\overset{-1}{A}_{\sigma\rho})^{0} \overset{0}{Q}_{\rho} + \sum_{\sigma=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n} [\sigma, \rho; n+r]^{0} \dot{q}_{\sigma} \dot{q}_{\rho} -$$
$$- \sum_{\sigma=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n} \overset{0}{A}_{n+r,\sigma} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \rho\lambda \end{matrix} \right\}^{0} \dot{q}_{\rho} \dot{q}_{\lambda} - \overset{0}{Q}_{n+r}$$

Здесь $\mathbf{r}_k^{i_k}$ — радиусы-векторы опорных точек, $\mathbf{v}_k^{i_k}$, $\boldsymbol{\tau}_k^{i_k}$ — нормальные и касательные орты к поверхностям связей в точках опирания, $f_k^{i_k}$ — коэффициенты трения. Элементы матрицы $D_{rk}^{i_k}$ содержат проекции нормалей, искаженные влиянием трения, и координаты точек контакта.

Система (2.3) охватывает 2^m вариантов опирания и ее решение должно предшествовать вычислению обобщенных ускорений $\ddot{q}_{\sigma}$ в случае с трением. Рассмотрим свойства двусторонних вариантных связей.

3. Условия удержания точек на связях и соблюдения порядка вариантной индексации. Коэффициенты системы уравнений (2.3), несущие всю информацию о связях системы, не могут быть совершенно произвольными, они должны подчиняться некоторым условиям. Свойства связей заключены в определителе системы (2.3) $\det(D_{rk}^{i_k})$, построенном из коэффициентов при неизвестных реакциях. При отсутствии трения этот определитель имеет вид

$$\det (D_{rk}^{i_k})_0 = \det (\mathbf{v}_k^{i_k} \partial \mathbf{r}_k^{i_k} / \partial q_{n+r})$$

Как в случае с трением, так и без трения, решение уравнений (2.3) существует для каждого возможного варианта опирания, если определитель в каждом варианте не равен нулю. Мало того, знак определителя для каждого возможного варианта должен быть одним и тем же при использовании вариантной формы 3 [5], так как в этой форме записи уравнений знаки нормальных реакций связаны с ориентацией координатных осей, определяются нагрузкой на систему и не зависят от варианта контакта. Это требование распространяется и на те миноры определителя, которые можно обращать в нуль при наличии трения в системе. Этим минорам соответствуют кинематические пары, их части и комбинации пар.

Условия на знаки определителя символически запишем так

$$\operatorname{sgn}\det(D_{rk}^{i_k\check{}})_0 = \text{const} \neq 0, \quad \operatorname{sgn} M_{01}\check{} = \text{const}_1 \neq 0$$

$$\ldots \tag{3.1}$$

$$\operatorname{sgn} M_{0l}\check{} = \text{const}_l \neq 0 \quad (s = 1, \ldots, 2^m)$$

Галочка показывает, что условия записаны для вариантной формы 3. Для вариантных форм 1 и 2 условия (3.1) имеют вид

$$i_1 i_2 \cdots i_m \operatorname{sgn}\det(D_{rk}^{i_k})_0 = \text{const} \neq 0, \quad s_1 \operatorname{sgn} M_{01} = \text{const}_1 \neq 0$$

$$\ldots$$

$$s_l \operatorname{sgn} M_{0l} = \text{const}_l \neq 0 \quad (s = 1, \ldots, 2^m) \tag{3.2}$$

так как в определитель и миноры M входят вариантные множители $i_1 i_2 \ldots i_m$, $s_1, \ldots, s_l$. Последние представляют произведения вариантных множителей столбцов, из которых составлены миноры.

Покажем, что условия (3.1) или тождественные им условия (3.2) делают набор односторонних связей удерживающим. Сообщим системе избыточные обобщенные перемещения δq_{n+r} и запишем выражения бесконечно малых перемещений точек контакта $e_k^{i_k}$ в направлении нормалей $\mathbf{v}_k^{i_k}$:

$$e_k^{i_k} = \sum_{r=1}^{m} \mathbf{v}_k^{i_k} \frac{\partial r_k^{i_k}}{\partial q_{n+r}} \delta q_{n+r} \quad (k = 1, \ldots, m) \tag{3.3}$$

Матрица коэффициентов этого преобразования получена транспонированием матрицы $D_{rk}^{i_k}$ с обращением в нуль всех коэффициентов трения. Все коэффициенты каждой строки оказываются умноженными на один и тот же вариантный множитель i_k. Поэтому соотношения (3.3) можно переписать так

$$e_k^{i_k} = i_k \sum_{r=1}^{m} (D_{rk}^{i_k\check{}})_0^T \delta q_{n+r} \quad (k = 1, \ldots, m) \tag{3.4}$$

Предположим, что перемещения всех точек контакта $e_k^{i_k}$ в выбранном произвольном варианте положительны и запишем неравенства

$$i_k \sum_{r=1}^{m} (D_{rk}^{i_k\check{}})_0^T \delta q_{n+r} \geqslant e_k^{i_k} \tag{3.5}$$

Для противоположного варианта контакта имеем

$$i_k' \sum_{r=1}^{m} (D_{rk}^{i_k'\check{}})_0^T \delta q_{n+r} \geqslant e_k^{i_k'} \quad (i_k' = -i_k) \tag{3.6}$$

Учитывая условия (3.1) можно показать, что при неотрицательных $e_k^{i_k'}$ неравенства (3.5) и (3.6) не удовлетворяют необходимым и достаточным условиям совместности [7]. Отсюда следует, что совокупность неравенств (3.5), (3.6) может быть удовлетворена только при нулевых перемещениях δq_{n+r}, $e_k^{i_k}$, $e_k^{i_k'}$. Положительные значения $e_k^{i_k}$ указывают на отрыв опор от соответствующих связей, отрицательные — на проникание сквозь поверхности связей. Нарушение условий (3.1) приведет к тому, что для некоторых вариантов в некоторых кинематических парах будет иметь место отрыв точек контакта от поверхностей и связи сделаются просто односторонними; либо будет нарушен порядок вариантной индексации и в точки-антиподы включены точки, которые могут нагружаться одновременно. Поэтому условия (3.1) названы условиями удержания точек контакта на связях и соблюдения порядка вариантной индексации.

4. Условия на зазоры. Выполнения условий (3.1) недостаточно для того, чтобы можно было осуществить любой предполагаемый вариант контакта тел. Вариантные связи можно реализовать при наличии исчезающе малых зазоров, устанавливая между ними некоторые соотношения. При строго нулевых зазорах некоторые точки-антиподы могут оказаться нагруженными одновременно и статическая определимость реакций не будет иметь места. При произвольных зазорах нагруженными в действительности могут оказаться не те точки, которые предполагаются нагруженными в вариантной модели. Чтобы действительный вариант контакта соответствовал модели, нужно обеспечить весьма малые положительные зазоры для предполагаемых ненагруженными точек контакта в каждом варианте опирания. Вычисление зазоров для двусторонних вариантных связей организуется следующим образом: некоторый вариант контакта принимается за основной, ему соответствуют нулевые значения перемещений δq_{n+r}, $e_{k0}^{i_k}$, $e_{k0}^{i'_k}$; задаются положительные зазоры для точек-антиподов основного варианта $\Delta_{k0}^{i'_k}>0$, зазоры для точек контакта основного варианта, естественно равны нулю $\Delta_{k0}^{i_k}=0$; чтобы перейти от основного варианта опирания к любому заданному, надо переместить те точки контакта (не совпадающие с точками основного варианта), которые будут работать в новом варианте, и перемещения эти взять из положительного набора зазоров $e_k^{i_k}=\Delta_{k0}^{i'_k}$; перемещения работающих точек контакта основного варианта равны нулю; из соотношений (3.4) вычислить обобщенные избыточные перемещения, переводящие систему от основного варианта к заданному; используя найденные значения δq_{n+r}, вычислить перемещения точек-антиподов заданного варианта контакта по формулам

$$e_k^{i_k'} = i_k' \sum_{r=1}^{m} (D_{rk}^{i'_k})_0^{\mathrm{T}} \delta q_{n+r} \quad (k=1,\ldots,m)$$

зазоры для точек-антиподов заданного варианта вычисляются как разности величин

$$\Delta_k^{i_k'} = (\Delta_{k0}^{i_k'}) - e_k^{i_k'} > 0 \quad (k=1,\ldots,m) \tag{4.1}$$

Вектор $(\Delta_{k0}^{i^*_k})$ представляет набор m элементов, взятый из объединения множеств $\Delta_{k0}^{i'_k}$ и $\Delta_{k0}^{i_k}=0$.

Зазоры во всех вариантах опирания системы с вариантными связями должны быть положительными. Появление отрицательных расчетных значений зазоров означает, что не все из намеченных точек опирания могут войти в контакт с поверхностями связей.

Вообще говоря, $2m$ точек контакта допускают $(2m)!$ вариантов опирания, среди которых имеются и статически неопределимые комбинации. Требование статической определимости и условия (3.1) и (4.1) обеспечивают возможность реализации 2^m вариантов контакта. Отсюда следует, что совокупность этих условий можно назвать условиями существования двусторонних вариантных связей и соблюдения порядка вариантной индексации.

5. Условия малого трения. В системе с малым трением естественно считать величины определителя и миноров близкими соответствующим им значениям системы без трения. Будем считать трение малым в какомлибо варианте контакта, если определитель имеет один и тот же знак как в случае с трением, так и без трения. Более точно условия малого трения определим так: в рассматриваемом варианте опирания трение мало, если при непрерывном переходе от системы с трением к системе без трения по произвольной траектории в m-мерном пространстве коэффициентов трения определитель $\det(D_{rk}^{i_k})$ и некоторые его миноры сохраняют свои знаки. Символически это можно записать так

$$\det(D_{rk}^{i_k})\det(D_{rk}^{i_k})_0>0 \tag{5.1}$$

$$M_1M_{01}>0$$

$$\cdots$$

$$M_lM_{0l}>0$$

Величина определителя $\det(D_{rk}^{i_k})_0$ пропорциональна объему m-мерного опорного параллелепипеда, построенного на нормальных ортах $\mathbf{v}_k^{i_k}$ в пространстве реакций. Трение отклоняет направления полных реакций от векторов $\mathbf{v}_k^{i_k}$ и объем параллелепипеда, построенного на этих направлениях, изменяется. Трение может изменить опорный параллелепипед настолько, что последний потеряет измерения или окажется «вывернутым наизнанку» по некоторым своим измерениям. Потеря измерения равносильна обращению в нуль определителя $\det(D_{rk}^{i_k})$, а «вывертывание параллелепипеда наизнанку» изменению знака $\det(D_{rk}^{i_k})$ по сравнению с $\operatorname{sgn}\det(D_{rk}^{i_k})_0$. При этом реакции и ускорения должны претерпевать разрыв на бесконечности с уменьшением коэффициентов трения в соответствующих вариантах, и могут иметь место парадоксы трения [8]. Отмеченные эффекты трения касаются как определителя $\det(D_{rk}^{i_k})$, так и соответствующих его миноров.

Для дальнейшего отметим следующее. Если записать с учетом трения неравенства, аналогичные (3.5) и (3.6), то вывод об их несовместности будет справедлив при соблюдении условий (3.1) и условий (5.1) во всех вариантах контакта. При невыполнении условий малого трения в некоторых вариантах неравенства вида (3.5), (3.6) сделаются совместными в соответствующих вариантах и двусторонние вариантные связи станут как бы неудерживающими, что приведет к парадоксам трения [8].

6. Условия малого трения и устойчивость движения системы. Покажем, что условия малого трения есть необходимые условия устойчивости движения системы с трением. Здесь рассматривается так называемая фрикционная неустойчивость, выражающаяся в появлении неограниченных по модулю реакций связей при конечных заданных силах, с отбрасыванием трения реакции становятся конечными. Анализ устойчивости движения проведем при следующих допущениях. Считаем, что связи системы имеют конечные жесткости $c_k^{i_k}$ в каждой точке опирания, поэтому избыточные координаты, которые при выводе уравнений (2.3) считались нулевыми, сделаются не равными нулю. Жесткости связей предполагаются весьма большими, а нагрузки конечными, отсюда следуют малые колебания связей, которые наложатся на основное движение системы. Ускорения этих колебательных движений выразим через нормальные реакции и получим систему m дифференциальных уравнений второго порядка относительно нормальных реакций. Далее составим характеристическое уравнение, из которого получим необходимые условия устойчивости движения системы.

Учитывая податливость связей, добавим в правую часть уравнений (2.2) слагаемые $\Sigma_k \overset{0}{A}_{n+r,n+k}\overset{s\cdot\cdot}{q}_{n+k}$. При этом вид уравнений (2.1) и остальных членов уравнений (2.2) не изменится, так как избыточные перемещения и скорости считаются весьма малыми. Далее обобщенные силы трения и реакции следует выразить через нормальные реакции формулами из [5]. Обобщенные избыточные ускорения также можно выразить через нормальные реакции, для чего сначала найдем соотношения между реакциями и избыточными перемещениями

$$N_k = -c_k^{i_k} \sum_{r=1}^{m} \mathbf{v}_k^{i_k} \frac{\partial \mathbf{r}_k^{i_k}}{\partial q_{n+r}} q_{n+r} \qquad (6.1)$$

Упругое перемещение k-той точки опирания складывается из проекций избыточных перемещений $(\partial \mathbf{r}_k^{i_k}/\partial q_{n+r}) q_{n+r}$ на направление нормали $\mathbf{v}_k^{i_k}$ и умножается на коэффициент жесткости $c_k^{i_k}$, суммирование ведется по всем избыточным перемещениям q_{n+r}. Затем соотношения (6.1) дифференцируются по времени, причем слагаемые, которые могут появиться в результате дифференцирования векторов $\mathbf{v}_k^{i_k}$ и $\mathbf{r}_k^{i_k}$, отбрасываются, поскольку избыточные скорости считаются малыми величинами. Далее соотношения разрешаются относительно избыточных ускорений

$$\ddot{q}^{s}_{n+r} = -\sum_{k=1}^{m} (D_{rk}^{i_k})_0^{-1} \ddot{N}_k / c_k^{i_k}$$

Подставляя все перечисленные величины в уравнения (2.2), получим систему m дифференциальных уравнений второго порядка относительно реакций N_k:

$$\sum_{\sigma=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} A^0_{n+r,\, n+k} (D_{rk}^{i_k})_0^{-1} \ddot{N}_k / c_k^{i_k} + \sum_{k=1}^{m} D_{rk}^{i_k} N_k = b_r \quad (r = 1, \ldots, m) \qquad (6.2)$$

Из (6.2) получим характеристическое уравнение

$$\det\left(\sum_{\sigma=1}^{m} A^0_{n+r,\, n+\sigma} \lambda^2 (D_{rk}^{i_k})_0^{-1} / c_k^{i_k} + D_{rk}^{i_k}\right) = 0$$

Нетрудно выписать два крайних члена характеристического уравнения: член с показателем λ в наибольшей степени

$$(c_1^{i_1} c_2^{i_2} \ldots c_m^{i_m})^{-1} \lambda^{2m} \det (A^0_{n+r,\, n+k}) \, [\det (D_{rk}^{i_k})_0]^{-1}$$

и свободный член $\det(D_{rk}^{i_k})$.

Коэффициенты жесткости $c_k^{i_k}$ есть существенно положительные величины. Определитель $\det(\overset{0}{A}_{n+r,n+k})$ порядка m является величиной положительной, поскольку кинетическая энергия представляет определенно положительную квадратичную форму. Умножим все члены характеристического уравнения на $\det(D_{rk}^{i_k})_0$. Тогда коэффициент при λ^{2m} окажется величиной положительной, а свободный член станет произведением определителей $\det(D_{rk}^{i_k})_0 \det(D_{rk}^{i_k})$. Это выражение должно быть также положительным, иначе избыточные движения нагруженных связей не будут колебательными. С трением произведение определителей для некоторых вариантов могут оказаться неположительными. Это значит, что колебательное движение нагруженных связей вырождается в апериодическое, реакции N_k неограниченно растут, а с ними вместе и силы трения, что приводит к самоторможению. Характеристические уравнения можно построить и для отдельных частей системы, размеры которых определяются кинематическими парами. Записывая условия положительности свободных членов для таких частей системы, получим в итоге условия (5.1). Это означает, что необходимое условие отсутствия апериодической неустойчивости имеет вид условий малого трения.

Примененный здесь способ составления характеристического уравнения был продемонстрирован на частном примере с подробным анализом устойчивости движения [9].

7. Критерии реализуемости движения. Движение в реализующемся варианте опирания должно удовлетворять следующим условиям: 1) условию отталкивания тел; для форм 1 и 2 это условие имеет вид [5] $N_k \geqslant 0$ $(k=1, \ldots, m)$; 2) условиям на знаки определителей системы без трения (3.1) или (3.2); 3) условиям на зазоры (4.1); 4) условиям малого трения (5.1). Возможно, существуют и другие критерии фрикционной устойчивости, пока не найденные.

8. Существование и единственность решения задачи динамики системы с вариантными связями. Уравнения (2.3) можно рассматривать как систему m уравнений для определения $2m$ реакций N_k с матрицей D_{rk}, имеющей размерность $m \times 2m$:

$$\sum_{k=1}^{2m} D_{rk} N_k = b_r \qquad (r=1, \ldots, m) \tag{8.1}$$

Решение этой системы производится повариантно, для чего в одном из возможных вариантов m реакций делаются нулями, другие m реакций определяются из системы (8.1). Последовательно перебирая варианты, можно вычислить реакции в каждом из них. Решение задачи должно удовлетворять критериям реализуемости, причем условие отталкивания распространяется на $2m$ реакций

$$N_k \geqslant 0 \quad (k=1, \ldots, 2m) \tag{8.2}$$

Для разрешающих соотношений (8.1) и (8.2) справедливо следующее утверждение: решение системы разрешающих соотношений существует и единственно для произвольных заданных сил b_r при выполнении условий (3.2), (4.1), (5.1) во всех возможных вариантах контакта.

Докажем существование. По разрешающей системе соотношений (8.1), (8.2) может быть построена соответствующая ей двойственная система [10]

$$\sum_{r=1}^{m} (D_{rk})^T \delta q_{n+r} \leqslant 0 \quad (k=1, \ldots, 2m) \tag{8.3}$$

$$\sum_{r=1}^{m} b_r \delta q_{n+r} > 0 \tag{8.4}$$

Согласно теореме Фаркаша [10] решение может иметь только одна из альтернативных систем: (8.1), (8.2) либо (8.3), (8.4). Соотношение (8.4) превращается в равенство, так как при соблюдении условий (3.2) и (5.1) для всех вариантов опирания связи являются удерживающими и потому избыточные перемещения равны нулю $\delta q_{n+r} = 0$ $(r=1, \ldots, m)$. Следовательно, альтернативная система (8.3), (8.4) несовместна, а исходная система (8.1), (8.2) разрешима. Существование доказано.

Докажем единственность. При выполнении условий (4.1) m-мерное пространство реакций разбивается на 2^m конусов. Конусы образуются m векторами-столбцами матрицы D_{rk}, принятыми за базисные. При отсутствии трения можно записать

$$\sum_{k=1}^{m} \nu_k^{i_k} \frac{\partial \mathbf{r}_k^{i_k}}{\partial q_{n+r}} X_k = \nu_t^{i_t'} \frac{\partial \mathbf{r}_t^{i_t'}}{\partial q_{n+r}} \quad (r=1, \ldots, m) \tag{8.5}$$

где X_k — есть компоненты разложения по векторам произвольного исходного базиса вектора произвольной антиподной точки. Каждый столбец имеет свой вариантный множитель i_k и так как $i_k' = -i_k$, то в разложении (8.5) компонента X_t окажется отрицательной, если соблюдены условия (3.2). Этот вывод справедлив и при малом трении во всех вариантах контакта. Отсюда следует, что пересечение 2^m конусов в m-мерном пространстве реакций не может быть телесным конусом [11], конусы могут иметь только общие грани и ребра.

Предположим теперь, что вектор нагрузки b_r находится внутри одного из конусов и потому имеет все положительные компоненты разложения N_k. Тогда, поскольку пересечение конусов не имеет внутренних точек, в любом другом конусе будет хотя бы одна отрицательная реакция, что и доказывает единственность. Если вектор b_r совпадает с гранью или ребром, то в некотором четном числе конусов некоторые реакции окажутся строго нулевыми, они соответствуют разгруженным точкам-антиподам. Другие реакции в соприкасающихся конусах окажутся положительными и равными. При этом имеем несколько одинаковых наборов реакций, что все равно означает единственность.

9. Свойства нормальных реакций и связанных с ними величин.

Свойство 1. Если задаваемые силы, состояние системы и ее параметры таковы, что в какой-либо точке опирания нормальная реакция оказывается строго равной нулю для какого-либо набора величин вариантных индексов, то нулю равна реакция и в точке-антиподе. Например, если $N_1(-i_2\ldots i_m)=0$, то и $N_1(+i_2\ldots i_m)=0$; если $N_2(i_1-\ldots i_m)=0$, то и $N_2(i_1+\ldots i_m)=0$. (Такое обозначение реакций используется здесь, чтобы подчеркнуть, что реакции являются функциями вариантных индексов).

Свойство 2. Если нагрузка, состояние и параметры системы таковы, что одна из реакций оказывается равной нулю для некоторой комбинации вариантных индексов, то значения других реакций равны между собой для обеих величин индекса реакции, равной нулю. Например, если $N_1\cdot(-i_2\ldots i_m)=N_1(+i_2\ldots i_m)=0$, то $N_2(-i_2\ldots i_m)=N_2(+i_2\ldots i_m)$, $N_3(-i_2\ldots i_m)=N_3(+i_2\ldots i_m)$, и так далее.

Свойство 3. При смене варианта опирания, несмотря на возможное различие в коэффициентах трения на разных поверхностях, реализующих связи, обобщенные силы трения и обобщенные ускорения ведут себя как непрерывные функции времени, состояния системы и активных сил, если выполняются условия (3.2), (5.1) для всех вариантов, задаваемые силы и коэффициенты трения непрерывны и в момент смены варианта опирания знаки относительных скоростей нигде не меняются.

Свойство 4. Перемена величины вариантного индекса меняет знак соответствующей этому индексу нормальной реакции, если реакция не равна нулю и выполняются условия (3.2), (4.1), (5.1) для всех вариантов контакта, а значения других индексов фиксируются. Например, $N_1(-i_2\ldots i_m)\,N_1(+i_2\ldots i_m)\leqslant 0$, $N_2(i_1-\ldots i_m)\,N_2(i_1+\ldots i_m)\leqslant 0, \ldots$.

Три первых свойства непосредственно вытекают из анализа единственности, причем свойство *3* есть следствие свойств *1* и *2*.

Докажем свойство *4*, имея в виду, что оно относится только к реакциям, записанным в вариантных формах *1* и *2*. Обратимся к уравнениям (2.3), считая в них трение отсутствующим. Между определителем $\det\cdot(D_{rk}^{i_k})_0$ системы, записанным в вариантных формах 1 и 2, и определителем $\det(D_{rk}^{i_k\smile})_0$ в форме 3 существуют зависимости (сравни условия (3.1) и (3.2)):

$$\det(D_{rk}^{i_k})_0=i_1i_2\cdots i_m\det(D_{rk}^{i_k\smile})_0,\quad \det(D_{rk}^{i_k\smile})_0=i_1i_2\cdots i_m\det(D_{rk}^{i_k})_0 \quad (9.1)$$

Условия (3.1) требуют, чтобы знак определителя $\det(D_{rk}^{i_k\smile})_0$ во всех возможных вариантах был одинаков. В таком случае из (9.1) следует, что знак определителя $\det(D_{rk}^{i_k})_0$ должен меняться с изменением величины любого вариантного индекса. Запишем выражение реакции $N_k=D_k/\det\cdot(D_{rk}^{i_k})_0$. Знак определителя $\det(D_{rk}^{i_k})_0$ зависит от всех вариантных множителей, а в определителе D_k, который строится из $\det(D_{rk}^{i_k})_0$ заменой соответствующего столбца вектором b_r, отсутствует вариантный индекс i_k, соответствующий номеру k реакции N_k. Все вариантные множители в числителе и в знаменателе можно сократить, за исключением множителя, который вытеснен столбцом нагрузки. Поэтому знак реакции зависит от вариантного индекса i_k, соответствующего номеру реакции k, чем и доказывается справедливость свойства 4 для систем без трения. При выполнении условий малого трения (5.1) для всех вариантов знак определитедля $\det(D_{rk}^{i_k})$ такой же, как и при отсутствии трения. Поэтому свойство 4 имеет место и для систем с малым трением во всех вариантах контакта.

Из свойства 4 вытекает алгоритм поиска реализующегося варианта, записываемый компактно в виде $i_k'=-i_k$, если $N_k<0$ $(k=1,\ldots,m)$. Здесь i_k — значения вариантных индексов для пробной попытки вычисления реакций, i_k' — значения вариантных индексов для следующей попытки. В алгоритм поиска должна быть включена проверка по условиям реализуемости.

10. О парадоксах трения. Установлены следующие проявления парадоксов трения.

1. Условие отталкивания не выполняется ни в одном из возможных вариантов опирания. Это есть парадокс невозможности движения, означающий динамическое самоторможение.

2. Условие отталкивания выполняется для одного или нескольких вариантов опирания и притом без нулевых реакций, условия малого трения не выполняются для этих вариантов. Имеем вновь самоторможение.

3. Условие отталкивания выполняется для нескольких вариантов контакта (без нулевых реакций), условия малого трения выполняются для одного из этих вариантов. В этом варианте движение может реализоваться.

4. Условие отталкивания выполняется для нескольких вариантов опирания (без нулевых реакций), и условия малого трения выполняются для нескольких из них. Здесь имеем многозначность, которую уже нельзя раскрыть с помощью принятых критериев, поскольку условия малого трения есть лишь необходимые условия устойчивости движения. В этом случае предлагается учитывать историю движения системы и выбирать тот вариант контакта, который имел место в момент, предшествующий рассмотрению.

Многозначность решений уравнений движения есть следствие многовариантности контактов тел. При многозначности максимальное число вариантов опирания, удовлетворяющих условию отталкивания, может достигнуть величины 2^l, l — число характерных миноров определителя $\det(D_{rk}^{i_k})$, которые при наличии трения могут сделаться нулевыми (в это число входит также и сам определитель).

Самоторможение проявляется по-разному в зависимости от условий движения. Это может быть удар, вызванный трением, при скачкообразном увеличении коэффициентов трения; или удар, сопровождающий смену вариантов опирания. Такого рода удары могут либо останавливать движение в некоторых кинематических парах, либо уменьшать относительные скорости звеньев. Удар с уменьшением скоростей снижает последующие инерционные нагрузки, и система получает возможность двигаться непрерывно, выбирая такой вариант опирания, в котором условия малого трения выполняются. Место, где происходит самоторможение, указывает соответствующий минор, меняющий знак, при переходе к системе без трения.

В системах с кинематическими парами, имеющими несколько степеней свободы, приведенные коэффициенты трения зависят от кинематических характеристик относительного движения тел. Самотормозящий удар в таких парах может менять кинематические характеристики относительного движения тел, не приводя их к полной остановке.

Выявленное при анализе самоторможение на определенных участках обобщенных координат приводит в реальном движении уже на некотором удалении от этих участков к плавной остановке звеньев, и система теряет какое-то число степеней свободы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Смирнов Ю. П.* Уравнения движения систем с неидеальными удерживающими связями // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 2. С. 63–71.
2. *Смирнов Ю. П.* Уравнения удара систем с трением // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 3. С. 36–44.
3. *Смирнов Ю. П.* Уравнения движения шарового гироскопа // Проблемы механики управляемого движения. Пермь: Пермск. ун-т. 1985. С. 137–143.
4. *Смирнов Ю. П.* О движении системы, стесненной удерживающими связями с трением // Прикл. механика. 1987. Т. 23. № 4. С. 80–86.
5. *Никольский В. В., Смирнов Ю. П.* О формах уравнений динамики системы с сухим трением // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 1. С. 15–22.
6. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
7. *Черников С. Н.* Линейные неравенства. М.: Физматгиз, 1968. 488 с.
8. *Пэнлеве П.* Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.
9. *Доброславский С. В.* Исследование устойчивости движения ползуна на упругих опорах по направляющим с сухим трением // Машиноведение. 1984. № 4. С. 14–20.
10. *Стренг Г.* Линейная алгебра и ее применения. М.: Мир, 1980. 454 с.
11. *Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М.* Методы оптимизации. М.: Наука, 1978. 351 с.

Тула

Поступила в редакцию
29.X.1987