

УДК 531.38

© 1990 г.

В. П. ЛЕГЕЗА

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ШАРА В ПОЛОСТИ ТРЕХОСНОГО ЭЛЛИПСОИДА И ИХ ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

На основе неголономной механики Аппеля получены динамические уравнения движения однородного тяжелого шара без скольжения в полости неподвижного трехосного эллипсоида. Выполнен численный анализ изучаемого движения для конкретного набора начальных данных и параметров системы.

1. Постановка задачи, геометрические и кинематические соотношения.

В последнее время появилось значительное число виброзащитных устройств, эффект виброзащиты которых основан на использовании специальных грузоопорных узлов, реализующих неголономные связи путем обеспечения относительных движений несомых тел с качением без скольжения по опорным поверхностям несущих тел [1]. Среди указанного класса грузоопорных узлов следует выделить перспективные амортизирующие устройства «шар в полости трехосного эллипсоида», которые рассматриваются в настоящей статье.

Конструктивные особенности изучаемых грузоопорных узлов привели к необходимости рассмотрения самостоятельной неголономной задачи о движении однородного шара в полости неподвижного трехосного эллипсоида без скольжения под действием собственной силы тяжести. Особенность задачи заключается в выборе поверхности трехосного эллипсоида, не обладающей ни осевой, ни центральной симметрией, которые рассматривались ранее (сфера, горизонтальный и вертикальный цилиндры, вертикальный конус, параболоид [2–6]).

Вывод уравнений движения шара будем проводить с привлечением неголономной механики Аппеля. Приведем некоторые геометрические соотношения, необходимые для дальнейших преобразований.

Запишем уравнение поверхности эллипсоида в декартовых координатах (фиг. 1):

$$(x/a)^2 + (y/b)^2 + [(z-c)/c]^2 = 1, \quad (z < c) \quad (1.1)$$

Используя уравнение (1.1), определим выражения для единичной нормали \mathbf{n} к внутренней поверхности эллипсоида, а также ее первой производной $\dot{\mathbf{n}}$

$$\mathbf{n} = -(x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k})/Q \quad (1.2)$$

$$\dot{\mathbf{n}} = \dot{n}_x \mathbf{i} + \dot{n}_y \mathbf{j} + \dot{n}_z \mathbf{k} \quad (1.3)$$

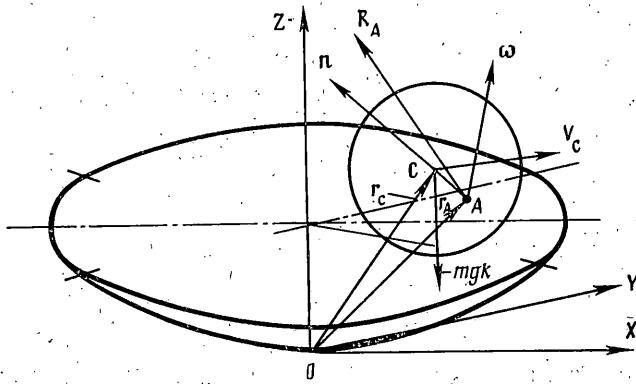
$$x_1 = x/a^2, \quad y_1 = y/b^2, \quad z_1 = (z-c)/c^2$$

$$\dot{n}_x = x_1 D_Q - \dot{x}_1 / Q, \quad \dot{n}_y = y_1 D_Q - \dot{y}_1 / Q$$

$$\dot{n}_z = z_1 D_Q - \dot{z}_1 / Q, \quad Q = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{1/2} \quad (1.4)$$

$$D_Q = (x_1 \dot{x}_1 + y_1 \dot{y}_1 + z_1 \dot{z}_1) / Q^3$$

Введем следующие обозначения: $\mathbf{V}_c = (x_c, y_c, z_c)$ — скорость центра $\mathbf{C} = (x_c, y_c, z_c)$ шара, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ — угловая скорость шара, $\mathbf{r}_A = (x, y, z)$ — радиус-вектор точки A контакта шара и эллипсоида, R — радиус шара.



Фиг. 1

Очевидно, что r_A и r_C связаны между собой следующим геометрическим соотношением:

$$r_C - r_A = Rn \quad (1.5)$$

Для определения производных, входящих в соотношения (1.4) продифференцируем уравнение (1.5). В результате получим уравнение в матричной форме

$$H \cdot [x', y', z']^T = V_C^T \quad (1.6)$$

где матрица H имеет вид

$$H = \begin{bmatrix} 1 - \frac{R}{Qa^2} + \frac{Rx_1^2}{Q^3a^2} & \frac{Rx_1y_1}{Q^3b^2} & \frac{Rx_1z_1}{Q^3c^2} \\ \frac{Rx_1y_1}{Q^3a^2} & 1 - \frac{R}{Qb^2} + \frac{Ry_1^2}{Q^3b^2} & \frac{Ry_1z_1}{Q^3c^2} \\ \frac{Rx_1z_1}{Q^3a^2} & \frac{Ry_1z_1}{Q^3b^2} & 1 - \frac{R}{Qc^2} + \frac{Rz_1^2}{Q^3c^2} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Ограничения на изменение скорости точки A шара, вызванное отсутствием проскальзывания, описывается следующими кинематическими соотношениями

$$V_A = 0 \Rightarrow V_C \omega \times Rn \quad (1.8)$$

или в скалярном виде

$$\begin{aligned} x_c' &= (y_1 \omega_z - z_1 \omega_y) R/Q, & y_c' &= (z_1 \omega_x - x_1 \omega_z) R/Q \\ z_c' &= (x_1 \omega_y - y_1 \omega_x) R/Q \end{aligned}$$

разований определим выражения для x_1', y_1', z_1' :

С использованием соотношений (1.6) и (1.8) после некоторых преоб-

$$\begin{aligned} x_1' &= \alpha \Delta^{-1} a^{-2} [y_1 \omega_z - z_1 \omega_y + \alpha (z_1 \omega_y b^{-2} - y_1 \omega_z c^{-2}) + \beta Q y_1 z_1 \omega_n (b^{-2} - c^{-2})] \\ y_1' &= \alpha \Delta^{-1} b^{-2} [z_1 \omega_x - x_1 \omega_z + \alpha (x_1 \omega_z c^{-2} - z_1 \omega_x a^{-2}) + \beta Q x_1 z_1 \omega_n (c^{-2} - a^{-2})] \\ z_1' &= \alpha \Delta^{-1} c^{-2} [x_1 \omega_y - y_1 \omega_x + \alpha (y_1 \omega_x a^{-2} - x_1 \omega_y b^{-2}) + \beta Q x_1 y_1 \omega_n (a^{-2} - b^{-2})] \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\alpha = R/Q = Q^2 \beta, \quad \omega_n = \omega \cdot n$$

$$\Delta = (1 - \beta c^{-2} a^{-2}) (1 - \alpha b^{-2}) + \beta a^{-2} b^{-2} c^{-2} (c^2 - b^2) (a^2 - b^2) y_1^2$$

2. Вывод динамических уравнений движения шара. Приступим к выводу динамических уравнений движения шара в полости эллипсоида на основе неголономной механики Аппеля. Запишем в общем виде функцию S — энергию ускорений для данной задачи

$$S = m [(x_c'')^2 + (y_c'')^2 + (z_c'')^2] / 2 + J (\omega_x'^2 + \omega_y'^2 + \omega_z'^2) / 2 \quad (2.1)$$

где m — масса шара, J — момент инерции однородного шара.

Определим x_c'' , y_c'' , z_c'' с привлечением однократно продифференцированного соотношения (1.8):

$$\begin{aligned} x_c'' &= \alpha(y_1 \dot{\omega}_x - z_1 \dot{\omega}_y) + H_x, & y_c'' &= \alpha(z_1 \dot{\omega}_x - x_1 \dot{\omega}_z) + H_y \\ z_c'' &= \alpha(x_1 \dot{\omega}_y - y_1 \dot{\omega}_x) + H_z \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} H_x &= R(\dot{\omega}_y n_z - \dot{\omega}_z n_y), & H_y &= R(\dot{\omega}_z n_x - \dot{\omega}_x n_z) \\ H_z &= R(\dot{\omega}_x n_y - \dot{\omega}_y n_x) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Подставим полученные выражения (2.2) для V_c' в (2.1) и выделим ту часть энергии ускорений S^* , которая зависит только от вторых производных неголономных координат $\dot{\omega}_x$, $\dot{\omega}_y$, $\dot{\omega}_z$:

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{1}{2} [J + m\alpha^2 (y_1^2 + z_1^2)] \dot{\omega}_x^2 + \frac{1}{2} [J + m\alpha^2 (x_1^2 + z_1^2)] \dot{\omega}_y^2 + \\ &+ \frac{1}{2} [J + m\alpha^2 (x_1^2 + y_1^2)] \dot{\omega}_z^2 - m\alpha^2 y_1 z_1 \dot{\omega}_y \dot{\omega}_z - \\ &- m\alpha^2 x_1 z_1 \dot{\omega}_x \dot{\omega}_z - m\alpha^2 x_1 y_1 \dot{\omega}_x \dot{\omega}_y + m\alpha (H_x z_1 - H_y x_1) \dot{\omega}_z + \\ &+ m\alpha (H_z x_1 - H_x z_1) \dot{\omega}_y + m\alpha (H_y z_1 - H_z y_1) \dot{\omega}_x \end{aligned} \quad (2.4)$$

Введем квазикоординаты π_x , π_y , π_z , где $\pi_x = \dot{\omega}_x$, $\pi_y = \dot{\omega}_y$, $\pi_z = \dot{\omega}_z$. Запишем выражение элементарной работы δA , рассматривая движение шара под действием силы тяжести

$$\delta A = -mg \delta z_c \quad (2.5)$$

Выражение для δz_c определим, воспользовавшись раскрытым векторным произведением (1.8):

$$\begin{aligned} \delta x_c &= \alpha(y_1 \delta \pi_z - z_1 \delta \pi_y), & \delta y_c &= \alpha(z_1 \delta \pi_x - x_1 \delta \pi_z) \\ \delta z_c &= \alpha(x_1 \delta \pi_y - y_1 \delta \pi_x) \end{aligned} \quad (2.6)$$

С другой стороны, выражение для элементарной работы в вариациях квазикоординат имеет следующий вид

$$\delta A = P_x \delta \pi_x + P_y \delta \pi_y + P_z \delta \pi_z \quad (2.7)$$

Используя уравнения (2.7) и (2.5) и последнее уравнение системы (2.6), получим выражение для обобщенных сил (правых частей уравнений Аппеля):

$$P_x = \alpha g m y_1, \quad P_y = -\alpha g m x_1, \quad P_z = 0 \quad (2.8)$$

Запишем уравнения Аппеля

$$\partial S^* / \partial \dot{\omega}_x = P_x, \quad \partial S^* / \partial \dot{\omega}_y = P_y, \quad \partial S^* / \partial \dot{\omega}_z = P_z \quad (2.9)$$

Выполнив дифференцирование (2.4) в соответствии с (2.9) получим

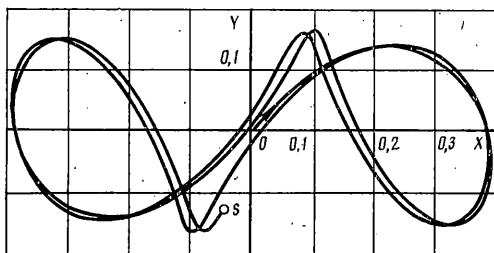
$$\begin{aligned} \partial S^* / \partial \dot{\omega}_x &= [J + m\alpha^2 (y_1^2 + z_1^2)] \dot{\omega}_x - m\alpha^2 x_1 y_1 \dot{\omega}_y - m\alpha^2 x_1 z_1 \dot{\omega}_z + \\ &+ m\alpha (H_y z_1 - H_z y_1) = P_x \\ \partial S^* / \partial \dot{\omega}_y &= [J + m\alpha^2 (x_1^2 + z_1^2)] \dot{\omega}_y - m\alpha^2 x_1 y_1 \dot{\omega}_x - \\ &- m\alpha^2 y_1 z_1 \dot{\omega}_z + m\alpha (H_z x_1 - H_x z_1) = P_y \\ \partial S^* / \partial \dot{\omega}_z &= [J + m\alpha^2 (x_1^2 + y_1^2)] \dot{\omega}_z - m\alpha^2 x_1 z_1 \dot{\omega}_x - \\ &- m\alpha^2 y_1 z_1 \dot{\omega}_y + m\alpha (H_x y_1 - H_y x_1) = P_z \end{aligned} \quad (2.10)$$

После проведения некоторых преобразований над (2.10) получим систему уравнений для определения $\dot{\omega}_x$, $\dot{\omega}_y$, $\dot{\omega}_z$:

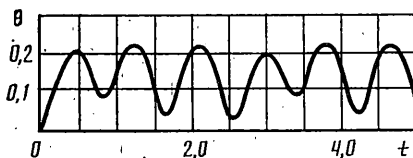
$$T \cdot [\dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z]^T = \mathbf{B}^T \quad (2.11)$$

где матрица T имеет вид

$$T = \begin{bmatrix} J + m\alpha^2 (y_1^2 + z_1^2) & -m\alpha^2 x_1 y_1 & -m\alpha^2 x_1 z_1 \\ -m\alpha^2 x_1 y_1 & J + m\alpha^2 (x_1^2 + z_1^2) & -m\alpha^2 y_1 z_1 \\ -m\alpha^2 x_1 z_1 & -m\alpha^2 y_1 z_1 & J + m\alpha^2 (x_1^2 + y_1^2) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

а элементы вектора-столбца \mathbf{B}^T определяются следующими выражениями:

$$b_1 = m\alpha [(H_z + g)y_1 - H_y z_1], \quad b_2 = m\alpha [H_x z_1 - (H_z + g)x_1] \quad (2.13)$$

$$b_3 = m\alpha (H_y x_1 - H_x y_1)$$

Выразим ω_x^* , ω_y^* , ω_z^* из (2.11) с использованием (2.3), (2.12) и (2.13):

$$\omega_x^* = J^* [\omega_n n_x^* + g y_1 / (RQ)], \quad \omega_y^* = J^* [\omega_n n_y^* - g x_1 / (RQ)] \quad (2.14)$$

$$\omega_z^* = J^* \omega_n n_z^*, \quad J^* = mR^2 (J + mR^2)^{-1} = 5/7$$

Таким образом, система (2.14) совместно с системой (1.9) дает полное описание движения однородного тяжелого шара без скольжения по внутренней поверхности трехосного эллипсоида.

Рассматриваемая задача допускает интеграл энергии, так как движение, а следовательно и система, консервативны. Этот интеграл имеет вид

$$J\omega^2 + mR^2\omega_r^2 + 2mgz_c = \text{const}, \quad \omega_r^2 = \omega^2 - \omega_n^2 \quad (2.15)$$

3. Численные результаты. Интегрирование полученной системы (1.9), (2.14) дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами проводилось численно с использованием метода Рунге — Кутты четвертого порядка. Для этой цели составлены алгоритмы и программа, которая дает возможность определять геометрические, кинематические, угловые характеристики изучаемого движения, а также реакцию неголономной связи \mathbf{R}_A .

Интегрирование выполнено для следующего варианта начальных значений переменных $x=y=z=0$, $\omega_x = -2c^{-1}$, $\omega_y = -\omega_x$, $\omega_z = 20 c^{-1}$.

Параметры динамической системы выбирались такими: $R=0,2$ м, $a=-1$ м, $b=0,4$ м, $c=0,2$ м, $mg=2,62$ кН.

Характер движения шара иллюстрируется проекцией на плоскость XOY следа шара (X и Y — в м) на эллипсоидальной поверхности (фиг. 2). Точка S — точка окончания интегрирования. Из графика следует, что на поверхности эллипсоида существует кривая, расположенная над начальным положением шара, выше которой его движение не осуществляется. Этот вывод следует также из интеграла сохранения энергии (2.15).

На фиг. 3 показано изменение угла нутации Θ (рад) между нормалью \mathbf{n} и вертикалью OZ во времени $t(c)$. Численные исследования показали, что увеличение начальной угловой скорости вращения шара ω_n приводит к уменьшению периода нутации и к снижению верхней границы Θ .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Легеза В. П.* Построение и численный анализ динамики механической системы с грузопорными узлами, реализующими неголономные связи // Тез. докл. Всесоюз. конф. по нелинейным колебаниям механических систем. Горький: Изд-е Горьк. ун-та, 1987. Ч. 2. С. 8-10.
2. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 520 с.
3. *Добронравова В. В.* Основы механики неголономных систем. М.: Высш. шк., 270 с.
4. *Сумбатов А. С.* О законе изменения кинетического момента шара, катающегося по неподвижной поверхности // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 5. С. 867-869.
5. *Бычков Ю. П.* О движении тела вращения, ограниченного сферой, на сферическом основании // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 5. С. 934-935.
6. *Фуфаев Н. А.* Шар на вращающейся плоскости и на вращающейся сфере // Тез. докл. на 3-м Республ. совещ. по пробл. динамики твердого тела. Донецк: ин-т прикл. математики и механики АН УССР, 1981. С. 53-54.

Киев

Поступила в редакцию
2.XI.1988