

УДК 531.355

© 1990 г.

В. А. ПРИВАЛОВ, В. А. САМСОНОВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА, АВТОРОТИРУЮЩЕГО В ПОТОКЕ СРЕДЫ

Обсуждается задача об устойчивости перманентного вращения тела в потоке среды (режима авторотации). Специальная конструкция поверхности тела и гипотеза о квазистатическом воздействии среды позволили сформулировать, (следуя [1]), полную схему сил, в которую входят массовые, геометрические и аэродинамические характеристики. В рамках этой схемы удается проследить за влиянием указанных параметров как на сам режим авторотации, так и на его устойчивость. В частности, смоделирован так называемый момент Магнуса, неконсервативный характер которого оказывает заметное влияние на свойство устойчивости вращения тел в среде. Вопросы авторотации на разных уровнях¹ подробности моделирования обсуждались в [2, 3].

1. Математическая модель движения. Закрепим динамически симметричное тело в некоторой точке O оси симметрии и поместим его в поток однородной среды, скорость V которого постоянна по величине и направлению.

Предположим, что воздействие среды на тело сосредоточено на четырех лопастях, расположение которых на теле обеспечивает его авторотацию — перманентное вращение вокруг оси симметрии, и исследуем устойчивость этого движения.

Будем считать, что распределенная система сил, действующих на j -ю лопасть, эквивалентна равнодействующей R_j , приложенной в фиксированной точке O_j (центре давления) j -ой лопасти. Вектор R_j представим в виде суммы двух взаимноперпендикулярных составляющих: W_j — силы лобового сопротивления и Y_j — аналога подъемной силы.

Через $-V_j$ обозначим вектор скорости точки O_j относительно набегающего потока. Тогда вектора W_j и Y_j запишем в виде

$$W_j = \frac{1}{2} \rho c_x(\alpha_j) S V_j V_j$$
$$Y_j = \frac{1}{2} \rho c_y(\alpha_j) S (V_j \times n_j) \times V_j / \cos \alpha_j$$

где ρ — плотность среды, S — характерная площадь лопасти, $c_x(\alpha)$, $c_y(\alpha)$ — безразмерные аэродинамические коэффициенты сопротивления и подъемной силы, являющиеся функциями текущего значения угла атаки α . Углом атаки α_j j -ой лопасти назовем угол между некоторой плоскостью, жестко связанной с этой лопастью и вектором V_j . (Положение этой плоскости удобно выбирать так, чтобы коэффициент $c_y(\alpha)$ подъемной силы обращался в ноль при нулевом значении угла атаки, а коэффициент $c_x(\alpha)$ принимал значение, близкое к своему минимуму.) Нормаль n_j в точке O_j к этой плоскости и вектор V_j образуют плоскость угла атаки α_j .

Полагая размер лопасти заметно меньше характерного размера тела, пренебрежем моментом сил воздействия среды относительно точки O_j . Разместим лопасти таким образом, чтобы точки O_j оказались в плоскости,

¹ Сарычев В. А., Мирер С. А., Янковский И. В. Авторотационное движение твердого тела на струнном подвесе: Препринт № 169. М.: ИП Мат. АН СССР, 1988. 36 с.; Сарычев В. А., Мирер С. А., Янковский И. В. Исследование одной формы авторотационного движения тела на струнном подвесе: Препринт № 190. М.: ИП Мат. АН СССР, 1987. 30 с.

ортогональной оси симметрии тела, на расстоянии r от этой оси и образовали вершины квадрата.

Для скорости V_j имеем

$$V_j = V - \omega \times r_j \quad (1.1)$$

где ω — угловая скорость тела, а r_j — радиус-вектор точки O_j относительно неподвижной точки O .

Сумма $W_j + Y_j$ сил воздействия среды, приложенных к j -ой лопасти, создает момент M_j относительно точки O :

$$M_j = \frac{1}{2} \rho c_x(\alpha_j) S V_j \{ (r_j \times n_j) V_j k(\alpha_j) / \cos \alpha_j + (r_j \times V_j) [1 - k(\alpha_j) \operatorname{tg} \alpha_j] \} \quad (1.2)$$

$$k(\alpha_j) = c_y(\alpha_j) / c_x(\alpha_j)$$

где $k(\alpha_j)$ — аэродинамическое качество j -ой лопасти.

Подобную структуру имеет, например, аэродинамическое воздействие на лопасти бумеранга [4, 5]. Тем же способом, в частности, можно описывать аэродинамическое воздействие на элементы купола вращающегося парашюта или лопасти оперения вращающейся противогравидовой ракеты.

Косвенным обоснованием применимости использования принятой модели воздействия среды служит следующее соображение. Различие между скоростями разных точек лопасти имеет порядок ωd , где d характерный размер лопасти. В то же время сами эти скорости имеют порядок ωr_j , где $r_j \gg d$. Поэтому дополнительными силами, порожденными различиями между скоростями точек лопасти, можно пренебречь.

Ориентацию тела определим с помощью углов φ , θ , γ ; φ и θ — углы Крылова, характеризующие положение оси симметрии тела в системе координат, вращающейся с угловой скоростью γ относительно координатной оси, проходящей через точку O и параллельной вектору V .

Для описания движения воспользуемся системой $Oxyz$, оси которой являются главными центральными осями инерции тела. Углы φ , θ и γ выберем так, чтобы ось Oz совпала с осью симметрии тела, а центры давления O_j оказались в координатных плоскостях xOz и yOz . Тогда для момента количества движения G относительно точки O , векторов n_j и r_j имеем выражения

$$G = I A \omega_x + m A \omega_y + n C \omega_z \quad (1.3)$$

$$r_j = l r \cos \psi_j + m r \sin \psi_j + n z \quad (1.4)$$

$$n_j = -l \cos \beta \sin \psi_j + m \cos \beta \cos \psi_j + n \sin \beta \quad (1.5)$$

Здесь A и C — экваториальный и полярный моменты инерции тела, l , m , n — единичные вектора по осям Ox , Oy , Oz , ψ_j — угол принимающий значения для $j=1, 2, 3, 4$ соответственно значения $\psi_1=0$, $\psi_2=\pi/2$, $\psi_3=\pi$, $\psi_4=-\pi/2$ и определяющий положение точек O_j , z — проекция на ось Oz каждого из векторов r_j , β — угол между нормалью n_j и плоскостью xOy , то есть угол разворота j -ой лопасти относительно соответствующей оси, ω_x , ω_y , ω_z проекции угловой скорости ω на оси Ox , Oy , Oz . Они соответственно равны

$$\omega_x = \theta' - \gamma' \sin \varphi, \quad \omega_y = \gamma' \cos \varphi \sin \theta + \varphi' \cos \theta \quad (1.6)$$

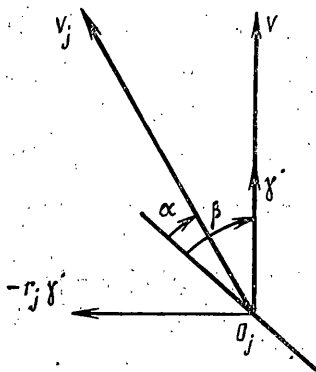
$$\omega_z = \gamma' \cos \varphi \cos \theta - \varphi' \sin \theta$$

2. Установившееся вращение. Рассмотрим вращение тела с угловой скоростью γ относительно оси Oz симметрии тела, параллельной вектору V скорости невозмущенного потока. Для углов, определяющих ориентацию оси симметрии, будем иметь

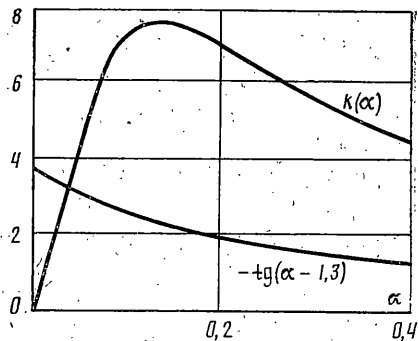
$$\varphi = \varphi' = 0, \quad \theta = \theta' = 0 \quad (2.1)$$

В этом случае модули скоростей $-V_j$ всех точек O_j относительно потока и углы α_j соответственно одинаковы между собой и равны V_0 и α . Для них имеют место кинематические соотношения (фиг. 1):

$$r \gamma' = -V_0 \sin(\alpha - \beta), \quad V = V_0 \cos(\alpha - \beta) \quad (2.2)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

В результате подстановки в формулу (1.2) для вектора момента M_j выражений (1.4), (1.4), (1.5) для V_j , r_j , n_j и преобразований с учетом (1.6, 2.1, 2.2) получим, что проекции M_x , M_y , M_z суммарного момента сил воздействия среды соответственно равны

$$M_x=0, \quad M_y=0, \quad M_z=2\rho c_x(\alpha)SVV_0[k(\alpha)+\operatorname{tg}(\alpha-\beta)]r$$

Если, кроме того, $\alpha=\alpha_0$ удовлетворяет уравнению

$$k(\alpha_0)+\operatorname{tg}(\alpha_0-\beta)=0 \quad (2.3)$$

то суммарный момент равен нулю. Углу α_0 соответствует постоянное значение угловой скорости $\dot{\gamma}=\dot{\gamma}_0$:

$$r\dot{\gamma}_0=-V \operatorname{tg}(\alpha_0-\beta) \quad (2.4)$$

Производная от момента количества движения G при значениях параметров, удовлетворяющих (2.1), (2.4) также равна нулю. Отсюда, в силу теоремы об изменении момента количества движения следует, что перманентному вращению с угловой скоростью $\dot{\gamma}_0$ относительно оси симметрии параллельной вектору V , соответствует решение

$$\varphi=\varphi^*=0, \quad \theta=\theta^*=0, \quad \dot{\gamma}=\dot{\gamma}_0 \quad (2.5)$$

уравнений движения тела относительно неподвижной точки O .

3. Устойчивость по отношению к возмущениям угловой скорости. Для анализа устойчивости вращений (2.5) составим уравнение возмущенного движения и линеаризуем их. Для этого проведем линеаризацию и преобразование выражения (1.2) для моментов внешних сил и производной от момента количества движения (1.3). В результате исходные уравнения распадутся на систему уравнений движения оси симметрии тела и уравнение вращения относительно этой оси, которое имеет вид

$$C\Delta\dot{\gamma}''=-2r^2\rho S c_x(\alpha_0)\Delta\dot{\gamma}[1+k'(\alpha_0)\cos^2(\alpha_0-\beta)]$$

где $\Delta\dot{\gamma}=\dot{\gamma}-\dot{\gamma}_0$ приращение угловой скорости $\dot{\gamma}$ по сравнению с ее стационарным значением $\dot{\gamma}_0$, $k'(\alpha_0)$ производная по α от функции $k(\alpha)$ в точке $\alpha=\alpha_0$. Полученное уравнение описывает вращение тела относительно его оси симметрии, как если бы эта ось сохраняла свою ориентацию параллельной вектору V . Угловая скорость $\dot{\gamma}$ асимптотически стремится к стационарному значению $\dot{\gamma}_0$, если

$$1+k'(\alpha_0)\cos^2(\alpha_0-\beta)>0 \quad (3.1)$$

Геометрический смысл этого условия состоит в том, что в точке пересечения кривых $k(\alpha)$ и $-\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, соответствующей решению уравнения (2.3), угол наклона касательной к графику функции $k(\alpha)$ должен быть больше угла наклона касательной к графику функции $-\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$. Типичное поведение функции $k(\alpha)$ для плоской пластинки и график функции $-\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$ представлены на фиг. 2. На участке роста функции $k(\alpha)$, в том

числе при $\alpha = \alpha_0$, обеспечивающем максимум качества $k(\alpha)$, условие (3.1) выполняется. Оно может нарушиться на интервале, где $k(\alpha)$ убывает.

4. Устойчивость равновесия оси симметрии. Для удобства введения безразмерных параметров в качестве независимой переменной используем угол γ поворота тела относительно оси симметрии $\gamma = \gamma_0 t$. При этом уравнение малых движений оси тела приобретает структуру

$$\lambda'' + \lambda'(D + iG) + \lambda(\Pi + iN) = 0 \quad (4.1)$$

где $\lambda = \varphi + i\theta$ комплексная величина, определяющая отклонение оси симметрии от положения равновесия (2.1)

$$\begin{aligned} D &= k(\alpha_0)\Omega[2 + \xi k(\alpha_0) + Xz^2/r^2] \\ G &= 2 - C/A - [3k(\alpha_0) - c_x'(\alpha_0)/c_x(\alpha_0)]\Omega k(\alpha_0)z/r \\ \Pi &= -1 + C/A - [3k(\alpha_0) - c_x'(\alpha_0)/c_x(\alpha_0)]\Omega k(\alpha_0)z/r + X\Omega z/r \\ N &= \Omega\{\xi[1 + k^2(\alpha_0)] + Xk(\alpha_0)z^2/r^2\} \\ \xi &= [c_x(\alpha_0)c_x'(\alpha_0) + c_y(\alpha_0)c_y'(\alpha_0)]/[c_x^2(\alpha_0) + c_y^2(\alpha_0)] \\ \Omega &= 2\rho r^3 S c_x(\alpha_0)[1 + k^2(\alpha_0)]^{3/2}/A k^2(\alpha_0) \\ X &= 2 - k(\alpha_0)\operatorname{tg}(\alpha_0) + k'(\alpha_0)\cos^2(\alpha_0 - \beta) \end{aligned}$$

Уравнение в форме (4.1) можно интерпретировать как уравнение движения материальной точки единичной массы, которая находится под действием сил, линейно зависящих от координат и скоростей. При этом силы имеют самую общую структуру, то есть, представляют собой суперпозицию диссипативных сил $-D\lambda'$, гироскопических $-G\lambda'$, позиционных потенциальных $-\Pi\lambda$ и позиционных неконсервативных $-N\lambda$. Нетрудно видеть, что аэродинамические характеристики вносят заметный вклад в коэффициенты указанных сил. В частности, только от них зависит коэффициент N , который определяет обобщенную силу типа момента Магнуса.

Условием асимптотической устойчивости тривиального решения уравнения (4.1) является выполнение системы неравенств

$$D > 0 \quad (4.2)$$

$$D(D\Pi + GN) - N^2 > 0 \quad (4.3)$$

5. Влияние эффектов Магнуса. Некоторые общие свойства устойчивости движения (2.5) можно выявить при $z=0$, т. е. когда неподвижная точка O тела лежит в плоскости, проведенной через центры O_1 давления лопастей. Неравенство (4.3) можно преобразовать к виду

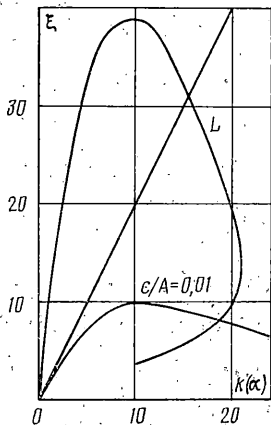
$$(D - N)[D(C/A - 1) + N] > 0.$$

Непустое множество значений параметров, обеспечивающих устойчивость, будет в случае, если они удовлетворяют системе неравенств

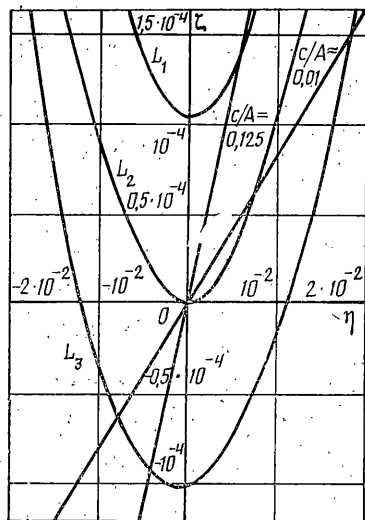
$$D - N > 0, \quad D(C/A - 1) + N > 0 \quad (5.1)$$

Совокупность этих условий является более жесткой, чем условие (4.2). На плоскости D, N неравенства (5.1) ограничивают область устойчивости частью, лежащей в правой полуплоскости ниже прямой $N=D$ и выше прямой $N=D(1-C/A)$. Второе из условий (5.1) содержит отношение C/A моментов инерции. При $C/A=0$ условия (5.1) противоречивы и, таким образом, область устойчивости исчезает. При $C/A=1$ соответствующим участком границы области устойчивости является ось абсцисс $N=0$. Наиболее широкая область устойчивости при предельно максимальном значении $C/A=2$, уравнение границы имеет вид $N=-D$. Таким образом, главным параметром, способным вызвать нарушение условий (5.1) является коэффициент N силы Магнуса $-N\lambda$. Это и есть одно из проявлений эффектов Магнуса.

Построим область устойчивости на плоскости аэродинамических параметров $k(\alpha)$, ξ при фиксированных значениях C/A . Участку границы



Фиг. 3



Фиг. 4

$N=D$ на плоскости D , N соответствует прямая $\xi=2k(\alpha)$, а участку $N=(1-C/A)D$ соответствует кривая $\xi=2k(\alpha)(1-C/A)/[1+k^2(\alpha)C/A]$. Область устойчивости расположена в правой полуплоскости $k(\alpha)$, ξ между этими линиями. На фиг. 3 представлена область устойчивости для $C/A=0,01$.

Конкретным аэродинамическим функциям $c_x(\alpha)$ и $c_y(\alpha)$ на плоскости $k(\alpha)$, ξ соответствует кривая L . Если изменять β , то будет меняться установившееся значение угла атаки α_0 и точка M , соответствующая на плоскости $k(\alpha_0)$, ξ установившемуся движению (2.5), пробежит всю кривую L . Типичное расположение линии L на плоскости $k(\alpha)$, ξ представлено на фиг. 3, где использованы характеристики $c_x(\alpha)$ и $c_y(\alpha)$ конкретного профиля. Анализ расположения линии L относительно области устойчивости может дать информацию о возможных сменах поведения тела для различных значений угла разворота β лопастей. Из сопоставления видно, что часть линии L лежит выше прямой $\xi=2k(\alpha)$ и, таким образом, находится вне области устойчивости. Эта часть соответствует значениям углов β и α_0 , близким к нулю, и малому значению $k(\alpha_0)$. С ростом β и, соответственно α_0 , точка M перемещается по линии L , переходит за прямую $\xi=2k(\alpha)$ и попадает в область устойчивости. Таким образом, установившееся движение (2.5) асимптотически устойчиво, если аэродинамическое качество на этом режиме достаточно велико. При дальнейшем увеличении угла атаки точка M , перемещаясь по линии L , может пересечь другую часть границы области устойчивости в результате нарушения второго из условий (5.1). Это произойдет тем раньше, чем меньше отношение моментов инерции C/A .

6. Характер потери устойчивости. Характер потери устойчивости при переходе через разные участки границы области устойчивости различны. Для его анализа перейдем в уравнение (4.1) к невращающейся системе координат путем замены $\lambda=\mu \exp(-i\gamma)$. Здесь μ — новая комплексная переменная, определяющая положение оси симметрии. Для μ получим уравнение $\mu'' + \mu'(D - iC/A) + i\mu(N - D) = 0$.

Пусть параметры $k(\alpha)$ и ξ таковы, что соответствующая точка на плоскости $k(\alpha)$, ξ лежит вне области устойчивости вблизи участка границы $\xi=2k(\alpha)$. Связь между ними можно представить в виде $\xi=2k(\alpha)+\epsilon$, где ϵ — малая положительная величина. Уравнение для μ принимает вид

$$\mu'' + \mu'(D - iC/A) + i\mu\epsilon D = 0$$

Анализ этого уравнения позволяет сделать вывод о том, что для системы с параметрами вблизи этого участка собственное движение, подобное

прямой быстрой эйлеровой прецессии затухает и потеря устойчивости происходит в результате развития обратной медленной прецессии.

Для параметров вблизи другой части границы области устойчивости μ удовлетворяет уравнению

$$\mu'' + \mu'(D - iC/A) - i\mu DC/A = 0.$$

Корни соответствующего характеристического уравнения равны $-D$ и iC/A . Таким образом, для системы с параметрами вне области устойчивости вблизи этого участка границы, устойчивость движения (2.5) нарушается в результате развития прямой быстрой (эйлеровой) прецессии.

В экспериментах с вращающимся парашютом в аэродинамической трубе [6, 7] наблюдалась потеря равновесия его оси симметрии. В одних условиях происходило развитие прямой быстрой прецессии, а в других — обратной. Это наводит на мысль о качественном подобии поведения рассматриваемого авторотирующего тела и вращающегося парашюта.

7. Влияние моментов инерции. Проведем анализ условий (4.3) в случае, когда неподвижная точка O не лежит в плоскости, проведенной через центры давления O_j . Будем считать, что условие (4.2) выполняется.

Введем обозначения: $\eta = (D - N)/D$, $\xi(\eta) = \eta^2 + \{\eta\Omega k(\alpha) [3k(\alpha) - c_x'(\alpha)/c_x(\alpha)] - X\Omega\}z/r$. Неравенство (4.3) эквивалентно соотношению $\eta C/A > \xi(\eta)$. Построим область устойчивости на плоскости параметров η , ξ . Конкретным функциям $c_x(\alpha)$, $c_y(\alpha)$ и фиксированным значениям z/r и $\rho r^3 S/A$ на этой плоскости соответствует кривая. На фиг. 4 представлены кривые L_1 , L_2 , L_3 для аэродинамических характеристик $c_x(\alpha)$, $c_y(\alpha)$ для [8] лопастей в виде плоской круглой шайбы и соответственно трех значений $z/r = 0, 0, 1$, $z/r = 0$, $z/r = -0, 01$. Угол атаки α изменялся от нуля до $0, 4$. Увеличение установившегося значения угла α атаки приводит к монотонному росту величины η . При этом соответствующая точка на плоскости η , ξ перемещается по одной из кривых. Условие (4.3) выполняется для установившихся движений, которым соответствуют точки линий L , лежащие ниже прямой $\xi = \eta C/A$ на плоскости η , ξ .

При $z/r = 0$ кривая L_2 представляет собой параболу $\xi(\eta) = \eta^2$. Нарушение условий устойчивости происходит в точках пересечения параболы и прямой $\xi = \eta C/A$. Одна из этих точек всегда совпадает с началом координат и ее положение не зависит от величины C/A . Координаты η , ξ второй точки пересечения растут с ростом C/A . Следовательно, растет максимально допустимое из соображений устойчивости, установившееся значение угла α_0 атаки, и таким образом, область устойчивости расширяется.

Отрицательному значению $z/r = -0, 01$ соответствует кривая L_1 , лежащая выше L_2 . Здесь напомним, что в силу выбора системы отсчета, при $z < 0$ в установившемся движении (2.5) неподвижная точка O лежит ниже по течению потока, чем плоскость, содержащая центры давления O_j . В рассматриваемом случае интервал допустимых значений α_0 целиком укладывается в соответствующий интервал при $z/r = 0$. Таким образом, с уменьшением z/r область устойчивости становится уже. Расширить допустимый интервал углов α_0 можно увеличивая отношение C/A . При этом минимальное значение α_0 уменьшается и стремится к значению при котором $N - D = 0$.

Положительному значению $z/r = 0, 01$ соответствует линия L_3 . При одном и том же значении C/A интервал допустимых углов α_0 шире, чем в предшествующих случаях. Здесь можно отметить еще одно отличие. Увеличение отношения C/A приводит к росту абсцисс обеих точек пересечения прямой $\xi = \eta C/A$ и кривой L_3 . Отсюда видно, что установившемуся движению (2.5), для которого $D - N > 0$ можно обеспечить устойчивость путем увеличения C/A , и наоборот, если $D - N < 0$, то с ростом C/A соответствующее установившееся движение может стать неустойчивым.

Таким образом, характер влияния отношения C/A моментов инерции на размер области устойчивости может быть двояким. Он зависит от знака разности $D - N$ коэффициентов диссипативных и неконсервативных сил.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Локшин Б. Я., Привалов В. А., Самсонов В. А. Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. М.: Изд-во МГУ, 1986. 86 с.
2. Борисенок И. Т., Жириков Г. Г. Математическая модель движения вращающегося парашюта в аэродинамической трубе // Некоторые задачи динамики осесимметричного твердого тела. М.: Изд-во МГУ, 1980. С. 5-14.
3. Борисенок И. Т., Жириков Г. Г. Прецессионное движение вращающегося парашюта // Парашюты и пронизаемые тела. М.: Изд-во МГУ, 1980. С. 84-95.
4. Магнус К. Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974. 526 с.
5. Hess F. The Aerodynamics of boomerangs // Scient. Amer. 1968. V. 219. No. 5. P. 124-136.
6. Гувернюк С. В., Фалушин М. П., Фещенко С. А. Исследование движения вращающегося парашюта // Парашюты и пронизаемые тела. М.: Изд-во МГУ, 1980. С. 34-44.
7. Левушкин А. Н., Макшин А. А., Фещенко С. А. Измерение аэродинамических характеристик секторного вращающегося парашюта // Некоторые задачи динамики управляемого твердого тела. М.: Изд-во МГУ, 1983. С. 32-37.
8. Flachsbarf O. Messungen an ebenen und gewölbten Platten. Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen // hrsg. von L. Prandtl und A. Betz. München; Berlin. 1932. V. 4.

Москва

Поступила в редакцию
17.I.1989