МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1990

УДК 531.55:521.2

О. Б. ШАГОВ

О ДВУХ ВИДАХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ЗЕМЛИ В ОСЦИЛЛЯТОРНОЙ ФОРМЕ

Рассматривается приведение уравнений движения к форме многомерного нелинейного осциллятора на основе применения преобразования вращения в четырехмерном гиперкомплексном пространстве и кинематических уравнений в параметрах Родрига – Гамильтона. На основе использования преобразования вращения с растяжением определяется связь градиента функции в трехмерном пространстве с градиентом функции в четырехмерном гиперкомплексном пространстве.

1. Кватернионный подход к описанию движения искусственного спутника Земли. Движение материальной точки, происходящее в ограниченной области пространства под воздействием силы гравитационного притяжения, величина которой обратно пропорциональна квадрату расстояния до притягивающего центра (кеплеровское движение) является периодическим. В этом случае в некоторых переменных уравнения движения имеют вид многомерного осциллятора. Примером могут служить уравнения движения в KS-переменных [1], которые определяют в трехмерном пространстве некоторый неинерциальный базис [2]. Приведение уравнений движения искусственного спутника Земли (ИСЗ) к осцилляторной форме дает возможность как аналитического изучения движения на основе хорошо разработанного математического аппарата анализа поведения возмущенного многомерного осциллятора, так и построения удобных с прикладной точки зрения численно-аналитических методов интегрирования уравнений движения ИСЗ.

Рассмотрим орбитальное движение ИСЗ как движение материальной точки под действием суммы сил различного характера: силы притяжения Земли, аэродинамических сил, управляющих воздействий и т. д. Для описания движения будем использовать систему координат $\mathbf{I}$, определяемую следующим образом: $OXYZ$ – неподвижная (абсолютная) система с началом в центре Земли. Ось OZ этой системы направлена по оси вращения Земли, ось OX лежит в плоскости экватора и направлена в точку весеннего равноденствия, ось OY дополняет систему координат до правой. Пусть $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ – радиус-вектор материальной точки в этой системе координат, $\mathbf{r}_0$ – единичный радиус-вектор, определяемый как $\mathbf{r}_0=\mathbf{r}/|\mathbf{r}|$.

Рассмотрим четырехмерное гиперкомплексное пространство $\mathbf{H}$, образованное гиперкомплексными единицами $\mathbf{1}$, $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$, причем, $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ формально совпадают с ортами трехмерного базиса $\mathbf{I}$, так что $\mathbf{i}_1$ соответствует OZ, $\mathbf{i}_2$ – OX, $\mathbf{i}_3$ – OY. Пусть в пространстве $\mathbf{H}$ задана операция вращения, определяемая единичным кватернионом $\boldsymbol{\lambda}$, которая орту $\mathbf{i}_2$ ставит в соответствие единичный вектор $\mathbf{r}_0=\boldsymbol{\lambda}\circ\mathbf{i}_2\circ\overline{\boldsymbol{\lambda}}$, где $\circ$ – знак кватернионного умножения [3], черта сверху обозначает сопряженный кватернион. В этом случае $\mathbf{r}_0$ является вторым ортом некоторого, неинерциального в общем случае базиса $\mathbf{E}$, и переход от базиса $\mathbf{I}$ к базису $\mathbf{E}$ определяется кватернионом $\boldsymbol{\lambda}$. Вследствие относительного движения базисов кватернион $\boldsymbol{\lambda}$ будет переменной величиной, удовлетворяющей кинематическому уравнению [3] $2d\boldsymbol{\lambda}/dt=\boldsymbol{\omega}_I\circ\boldsymbol{\lambda}$, где $\boldsymbol{\omega}_I$ – угловая скорость вращения базиса $\mathbf{E}$ относительно базиса $\mathbf{I}$. Для конкретного определения базиса $\mathbf{E}$ возможно либо задание направления еще одной оси (третья ось дополнит систему до правой), либо задание закона движения базиса $\mathbf{E}$ относительно второго орта — единичного радиус-вектора $\mathbf{r}_0$.

2. Уравнения движения в осцилляторной форме в компонентах кватерниона орбитального базиса. Определим первый неинерциальный базис $\mathbf{E}'(\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3')$ заданием первого орта, направленного по кинетическому моменту: $\mathbf{e}_1'=[\mathbf{r}\times\mathbf{V}]/|[\mathbf{r}\times\mathbf{V}]|$, второго орта — по радиус-вектору: $\mathbf{e}_2'=\mathbf{r}/|\mathbf{r}|$, третий определяется как $\mathbf{e}_3'=[\mathbf{e}_1'\times\mathbf{e}_2']$.

Пусть переход от базиса $\mathbf{I}$ к $\mathbf{E}'$ определяется кватернионом $\boldsymbol{\lambda}'$ с помощью операции вращения, которую запишем в виде $\mathbf{E}'=\boldsymbol{\lambda}'\circ\mathbf{I}\circ\bar{\boldsymbol{\lambda}}'$. Получим уравнения движения в осцилляторной форме в параметрах, описывающих движение базиса $\mathbf{E}'$. Базис $\mathbf{E}'$ вращается в инерциальном пространстве $\mathbf{I}$ с мгновенной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{I}'$, определяемой выражением:

$$\boldsymbol{\omega}_\mathrm{I}'=\mathbf{k}\rho^{-2}+(\mathbf{g}\cdot\mathbf{k})k^{-2}\mathbf{r} \tag{2.1}$$

где $\mathbf{k}=[\mathbf{r}\times\mathbf{V}]$ — кинетический момент на единицу массы, $k=|\mathbf{k}|$ — модуль кинетического момента, $\rho=|\mathbf{r}|$ — модуль радиус-вектора, $\mathbf{V}$ — скорость материальной точки, $\mathbf{g}$ — ускорения, действующие на материальную точку. Кинематическое уравнение движения базиса $\mathbf{E}'$ $2d\boldsymbol{\lambda}'/dt=\boldsymbol{\omega}_\mathrm{I}'\circ\boldsymbol{\lambda}'$ дополним соотношениями, определяющими изменение кинетического момента k, и модуля радиус-вектора ρ:

$$\begin{gathered}2d\boldsymbol{\lambda}'/dt=k\rho^{-2}\boldsymbol{\lambda}'\circ\mathbf{i}_1+\rho(\mathbf{g}\cdot\mathbf{e}_1')k^{-1}\boldsymbol{\lambda}'\circ\mathbf{i}_2\\ dk/dt=\rho(\mathbf{g}\cdot\mathbf{e}_3'),\quad d^2\rho/dt^2=k^2\rho^{-3}+(\mathbf{g}\cdot\mathbf{e}_2')\end{gathered} \tag{2.2}$$

Уменьшим порядок системы (2.2), вводя ненормированный кватернион $\boldsymbol{\mu}$, такой что $\boldsymbol{\lambda}'=\boldsymbol{\mu}/|\boldsymbol{\mu}|$ и $\|\boldsymbol{\mu}\|=|\boldsymbol{\mu}|^2=\boldsymbol{\mu}\circ\bar{\boldsymbol{\mu}}=\mu_0^2+\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2=k$. Первое уравнение системы (2.2) примет вид

$$2d\boldsymbol{\mu}/dt=k\rho^{-2}\boldsymbol{\mu}\circ\mathbf{i}_1+\rho(\mathbf{g}\cdot\mathbf{e}_1')k^{-1}\boldsymbol{\mu}\circ\mathbf{i}_2+\rho(\mathbf{g}\cdot\mathbf{e}_3')k^{-1}\boldsymbol{\mu} \tag{2.3}$$

Введем фиктивное время τ по формуле $d\tau={}^1/_2k\rho^{-2}dt$ и величину $\sigma=1/\rho$. Тогда уравнение (2.3), переписанное в фиктивном времени, и последнее уравнение системы (2.2) образуют систему уравнений

$$\begin{gathered}d\boldsymbol{\mu}/d\tau=\boldsymbol{\mu}\circ\mathbf{i}_1+(\mathbf{g}\cdot\mathbf{e}_3')|\boldsymbol{\mu}|^{-4}\sigma^{-3}\boldsymbol{\mu}+(\mathbf{g}\cdot\mathbf{e}_1')|\boldsymbol{\mu}|^{-4}\sigma^{-3}\boldsymbol{\mu}\circ\mathbf{i}_2\\ d^2\sigma/d\tau^2=-4\sigma-2(\mathbf{g}\cdot\mathbf{e}_3')|\boldsymbol{\mu}|^{-4}\sigma^{-3}d\sigma/d\tau-4(\mathbf{g}\cdot\mathbf{e}_2')|\boldsymbol{\mu}|^{-4}\sigma^{-2}\\ (d\tau={}^1/_2|\boldsymbol{\mu}|^2\sigma^2dt)\end{gathered} \tag{2.4}$$

Выделим основную силу, действующую на ИСЗ в орбитальном движении, обусловленную центральным полем притяжения Земли: $\mathbf{g}=-b_0\rho^{-2}\mathbf{e}_2'+\mathbf{g}'$ и введем переменные μ_4 и μ_5, такие, что

$$\mu_4=|\boldsymbol{\mu}|^4b_0^{-1}\sigma-1,\qquad \mu_5={}^1/_2|\boldsymbol{\mu}|^4b_0^{-1}d\sigma/d\tau \tag{2.5}$$

Окончательно имеем систему шести дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}d\mu_0/d\tau=-\mu_1-f_1\mu_2+f_3\mu_0,\qquad d\mu_1/d\tau=\mu_0-f_1\mu_3+f_3\mu_1\\ d\mu_2/d\tau=\mu_3+f_1\mu_0+f_3\mu_2,\qquad d\mu_3/d\tau=-\mu_2+f_1\mu_1+f_3\mu_3\\ d\mu_4/d\tau=2\mu_5+4f_3(1+\mu_4),\qquad d\mu_5/d\tau=-2\mu_4+2f_3\mu_5-2f_2\end{gathered} \tag{2.6}$$

в фиктивном времени τ, связанном с реальным временем t дифференциальным соотношением

$$dt=2|\boldsymbol{\mu}|^6b_0^{-2}(1+\mu_4)^{-2}d\tau \tag{2.7}$$

В (2.6) использованы обозначения

$$\begin{gathered}f_1=(\mathbf{g}'\cdot\mathbf{e}_1')|\boldsymbol{\mu}|^{-4}\rho^3,\qquad f_3=(\mathbf{g}'\cdot\mathbf{e}_3')|\boldsymbol{\mu}|^{-4}\rho^3\\ f_2=(\mathbf{g}'\cdot\mathbf{e}_2')b_0^{-1}\rho^2,\qquad \rho=|\boldsymbol{\mu}|^4b_0^{-1}(1+\mu_4)^{-1}\end{gathered}$$

В системе уравнений (2.1) ускорения, действующие на ИСЗ, определяются через проекции на орты базиса $\mathbf{E}'$. Переход к любым другим элементам (например, оскулирующим [4]), определяющим движение ИСЗ, можно осуществить, используя соотношения $\mathbf{r}=\rho|\boldsymbol{\mu}|^{-2}\boldsymbol{\mu}\circ\mathbf{i}_2\circ\bar{\boldsymbol{\mu}}$, $\mathbf{V}=\rho^{-2}[\mathbf{k}\times\mathbf{r}]+\mathbf{r}_0 d\rho/dt$, $\mathbf{k}=\boldsymbol{\mu}\circ\mathbf{i}_1\circ\bar{\boldsymbol{\mu}}$. В отсутствии возмущающих ускорений $f_1=f_2=f_3=0$ (кеплеровское движение) система уравнений (2.6) имеет решения:

$$\begin{aligned} &\mu_0=a_1\cos(\tau+\varphi_1), \quad &&\mu_3=-a_2\cos(\tau+\varphi_2) \\ &\mu_1=a_1\sin(\tau+\varphi_1), \quad &&\mu_4=a_3\cos(2\tau+\varphi_3) \\ &\mu_2=-a_2\sin(\tau+\varphi_2), \quad &&\mu_5=-a_3\sin(2\tau+\varphi_3) \end{aligned} \tag{2.8}$$

где a_i, φ_i ($i=1, 2, 3$) — некоторые постоянные. Рассмотрим в этом приближении выражение для модуля радиус-вектора

$$\rho=\frac{|\mu|^4}{b_0(1+\mu_4)}=\frac{(a_1^2+a_2^2)^2}{b_0(1+a_3\cos(2\tau+\varphi_3))} \tag{2.9}$$

тогда $(a_1^2+a_2^2)^2/b_0$ — фокальный параметр, a_3 — эксцентриситет, $(2\tau+\varphi_3)$ — истинная аномалия, что проявляет физический смысл введенных элементов μ_j ($j=0, 1, 2, \ldots, 5$).

Для определения изменения элементов μ_j в реальном времени t для кеплеровского движения проинтегрируем выражение (2.7) с учетом (2.9) и полагая, что начальному времени t_0 соответствует $\tau=0$, а моменту времени t_1 соответствует момент фиктивного времени τ_1. Для эллиптического движения ($a_3<1$) имеем

$$t_1-t_0=\int\limits_{\varphi_3}^{2\tau_1+\varphi_3}\frac{k^3}{b_0^2}\frac{d\theta}{(1+a_3\cos\theta)^2}=\frac{k^3}{b_0^2}\left[-\frac{a_3\sin\theta}{(1-a_3^2)\cdot(1+a_3\cos\theta)}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{(1-a_3^2)^{3/2}}\operatorname{arctg}\left\{\left(\frac{1-a_3}{1+a_3}\right)^{1/2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right\}\right]\Bigg|_{\varphi_3}^{2\tau_1+\varphi_3} \tag{2.10}$$

Положим, что в начальный момент времени материальная точка находится в перицентре, тогда $d\rho/d\tau=0$ и из (2.5), (2.8) получим $\varphi_3=0$. В этом случае фиктивное время $2\tau_1$ будет соответствовать углу ν_k — истинной аномалии, и выражение (2.10) путем введения нового угла E (эксцентрической аномалии):

$$\operatorname{tg}(E/2)=[(1-a_3)/(1+a_3)]^{1/2}\operatorname{tg}(\nu_k/2)$$

примет вид уравнения Кеплера: $M=E-a_3\sin E$, где $M=b_0^2k^{-3}(1-a_3^2)^{-3/2}\times\times(t-t_0)$ — средняя аномалия.

Уравнения (2.6) обладают основными достоинствами обобщенных уравнений Кустаанхеймо — Штифеля [5]: линейны для невозмущенного кеплеровского движения, близки к линейным для возмущенного кеплеровского движения, устойчивы в фиктивном времени к начальным возмущениям для невозмущенного кеплеровского движения [1] и позволяют применять для изучения возмущенного эллиптического движения спутника методы осреднения теории нелинейных колебаний, но в отличие от обобщенных уравнений Кустаанхеймо — Штифеля не являются регулярными.

3. Уравнения движения в осцилляторной форме Кустаанхеймо — Штифеля. Связь системы уравнений (2.6) с уравнениями Кустаанхеймо — Штифеля проявляется также и в том, что в кеплеровском движении элементы μ_0, μ_1, μ_2; μ_3 системы уравнений (2.6) определяют движение в пространстве базиса, совпадающего с KS — базисом. Поясняя вышеизложенное, определим базис $\mathbf{E}''(\mathbf{e}_1'', \mathbf{e}_2'', \mathbf{e}_3'')$ законом движения относительно орта $\mathbf{e}_2''=\mathbf{r}/|\mathbf{r}|$. Пусть базис $\mathbf{E}''$ совершает вращение относительно орта $\mathbf{e}_2''$ с мгновенной угловой скоростью $\omega_1''=-(g\cdot k)k^{-2}r$. Тогда, на основании (2.1), угловая скорость базиса E'' в инерциальном пространстве есть $\boldsymbol{\omega}_I''=\mathbf{k}/\rho^2$. Пусть переход от базиса $\mathbf{I}$ к базису $\mathbf{E}''$ определяется кватернионом $\boldsymbol{\lambda}''$ с помощью операции вращения: $\mathbf{E}''=\boldsymbol{\lambda}''\circ\mathbf{I}\circ\bar{\boldsymbol{\lambda}}''$. Кинематическое уравнение движения базиса E'' имеет вид

$$2d\boldsymbol{\lambda}''/dt=\rho^{-2}\mathbf{k}\circ\boldsymbol{\lambda}'' \tag{3.1}$$

Отметим, что базис $\mathbf{E}''$ определяется с точностью до задания начального направления орта $\mathbf{e}_1''$ или $\mathbf{e}_3''$ (третий дополнит систему до правой. В этом случае кватернион λ'' определится с точностью до постоянного, так как

$$\mathbf{r}_0=\lambda^*\circ\mathbf{r}_0\circ\bar{\lambda}^*=\lambda^*\circ\lambda''\circ\mathbf{i}_2\circ\bar{\lambda}''\circ\bar{\lambda}^* \tag{3.2}$$

где $\lambda^*=\cos(\alpha^*/2)+\mathbf{r}_0\sin(\alpha^*/2)$, α^* — произвольный угол. Выражение (3.2) справедливо в любой момент времени, поэтому при описании движения единичного радиус-вектора $\mathbf{r}_0$ возможно умножение кватерниона λ'' в любой момент времени на кватернион вида λ^*, вносящее произвол в определение компонент кватерниона λ''.

Пусть $\mathbf{v}$ — ненормированный кватернион, такой что $\lambda''=\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ и $\|\mathbf{v}\|=|\mathbf{v}|^2=\mathbf{v}\circ\bar{\mathbf{v}}=\rho$. Из (3.1) можно получить, используя фиктивное время s ($dt=\rho ds$), дифференциальное уравнение для кватерниона $\mathbf{v}$:

$$\begin{gathered}2d^2\mathbf{v}/ds^2=-(\mathbf{g}\circ\mathbf{r}-V^2/2)\circ\mathbf{v}\\ \mathbf{r}=\mathbf{v}\circ\mathbf{i}_2\circ\bar{\mathbf{v}},\qquad \mathbf{V}=2(d\mathbf{v}/dt)\circ\mathbf{i}_2\circ\bar{\mathbf{v}}\end{gathered} \tag{3.3}$$

Если выделить в (3.3) действие основной центральной силы $\mathbf{g}=b_0\rho^{-2}\mathbf{e}_2''+\mathbf{g}'$, то приходим к уравнениям движения вида

$$\begin{gathered}2d^2\mathbf{v}/ds^2=h_0\mathbf{v}+((\mathbf{g}'\cdot\mathbf{r})+[\mathbf{r}\times\mathbf{g}'])\circ\mathbf{v}\\ dh_0/dt=(\mathbf{g}'\cdot\mathbf{V})\end{gathered} \tag{3.4}$$

где $h_0=V^2/2-b_0/\rho^2$ — кеплеровская энергия.

Система дифференциальных уравнений (3.4) имеет вид, аналогичный системе уравнений в KS-переменных [1], т. е нормированные KS-переменные являются компонентами некоторого нормированного кватерниона, определяющего переход от базиса $\mathbf{I}$ к базису $\mathbf{E}''$. Указанная кинематическая интерпретация регуляризующего преобразования Кустаанхеймо — Штифеля предложена в [2].

Определим гиперкомплексное отображение градиента функции $U(x, y, z)$ в базисе $\mathbf{I}$:

$$\nabla_x U(x,y,z)=\mathbf{i}_1\frac{\partial U}{\partial z}+\mathbf{i}_2\frac{\partial U}{\partial x}+\mathbf{i}_3\frac{\partial U}{\partial y}$$

и градиент в гиперкомплексном пространстве переменных:

$$\nabla_v U(v_0,v_1,v_2,v_3)=\frac{\partial U}{\partial v_0}+\mathbf{i}_1\frac{\partial U}{\partial v_1}+\mathbf{i}_2\frac{\partial U}{\partial v_2}+\mathbf{i}_3\frac{\partial U}{\partial v_3}$$

Справедливо соотношение

$$\nabla_v U=-2\nabla_x U\circ\mathbf{v}\circ\mathbf{i}_2 \tag{3.5}$$

где v — ненормированный кватернион, такой что

$$\mathbf{r}=\mathbf{v}\circ\mathbf{i}_2\circ\bar{\mathbf{v}} \tag{3.6}$$

Действительно, если $U(x, y, z)$ — скалярная функция, а x, y, z — функции переменных v_0, v_1, v_2, v_3, то

$$\frac{\partial U}{\partial v_m}=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v_m}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v_m}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v_m}\qquad (m=0,1,2,3) \tag{3.7}$$

Вычисляя частные производные из соотношения (3.6), записанного покомпонентно, подставляя их в (3.7) и сравнивая полученный результат с (3.5), записанным покомпонентно, убеждаемся, что выражения (3.5) и (3.7) идентичны.

Рассмотрим теперь уравнение (3.3), выделив действие гравитационного поля:

$$\mathbf{g}=-\nabla_x U+\mathbf{g}_I'' \tag{3.8}$$

где $\mathbf{g}_I''$ — прочие возмущающие ускорения. Используя для градиента потенциальной функции $\nabla_x U$ в (3.8) соотношение (3.5) и подставляя (3.8) в (3.3), после некоторых преобразований получим:

$$2d^2\mathbf{v}/ds^2=(U+V^2/2)\mathbf{v}-{}^1/_2\nabla_\mathbf{v}(|\mathbf{v}|^2U)-\mathbf{g}_\mathrm{I}''\circ\mathbf{r}\circ\mathbf{v} \tag{3.9}$$

где возмущающие ускорения $\mathbf{g}_\mathrm{I}''$ определяются проекциями на оси инерциального базиса **I**. Поскольку преобразование координат неизменного вектора на базисы **I** и **E** задается обратной операцией, выполняемой над отображениями [3], то для возмущающих ускорений в проекциях на оси KS-базиса $\mathbf{E}''-\mathbf{g}_\mathrm{E}''$ справедливо равенство $\mathbf{g}_\mathrm{I}''\circ\mathbf{v}=\mathbf{v}\circ\mathbf{g}_\mathrm{E}''$ и для последнего члена в правой части (3.9) выполняется соотношение $\mathbf{g}_\mathrm{I}''\circ\mathbf{r}\circ\mathbf{v}=\rho\mathbf{v}\circ\mathbf{g}_\mathrm{E}''\circ\mathbf{i}_2$.

Обознчаим полную энергию $h=U+V^2/2$ и запишем (3.9) в виде системы уравнений, подобной (3.4):

$$\begin{gathered}2d^2\mathbf{v}/ds^2=h\mathbf{v}-{}^1/_2\nabla_\mathbf{v}(|\mathbf{v}|^2U)-\mathbf{g}_\mathrm{I}''\circ\mathbf{r}\circ\mathbf{v}\\ dh/dt=-{}^1/_2(\mathbf{g}_\mathrm{I}''\circ\mathbf{V}+\mathbf{V}\circ\mathbf{g}_\mathrm{I}'')\end{gathered} \tag{3.10}$$

В кеплеровском движении система (3.10) имеет вид

$$2d^2\mathbf{v}/ds^2=h_0\mathbf{v},\quad h=h_0 \tag{3.11}$$

решения которой представим в форме $\mathbf{v}=\boldsymbol{\varkappa}\circ\boldsymbol{\eta}$, где нормированный кватернион $\boldsymbol{\eta}$, компоненты которого постоянны, определяет плоскость орбиты и базис в ней, а ненормированный кватернион $\boldsymbol{\varkappa}=\varkappa_0+\varkappa_1\mathbf{i}_1$ определяет движение в плоскости орбиты, причем, его компоненты удовлетворяют уравнениям

$$2d^2\varkappa_0/ds^2=-|h_0|\varkappa_0,\qquad 2d^2\varkappa_1/ds^2=-|h_0|\varkappa_1 \tag{3.12}$$

где учтено, что $h_0<0$ в случае эллиптических орбит. Решения уравнений (3.12) имеют вид $\varkappa_0=C_0\cos(s'+\psi_1)$, $\varkappa_1=C_1\sin(s'+\psi_1)$, где $s'=(|h_0|/2)^{1/2}s$, C_0, C_1, ψ_1 — некоторые постоянные. Тогда общее решение (3.11) есть

$$\begin{gathered}v_0=\eta_0C_0\cos(s'+\psi_1)-\eta_1C_1\sin(s'+\psi_1)\\ v_1=\eta_1C_0\cos(s'+\psi_1)+\eta_0C_1\sin(s'+\psi_1)\\ v_2=\eta_2C_0\cos(s'+\psi_1)-\eta_3C_1\sin(s'+\psi_1)\\ v_3=\eta_3C_0\cos(s'+\psi_1)+\eta_2C_1\sin(s'+\psi_1)\end{gathered}$$

Исходя из выражения для модуля радиус-вектора:

$$\begin{gathered}\rho={}^1/_2(C_0^2+C_1^2)-{}^1/_2(C_1^2-C_0^2)\cos2(s'+\psi_1)=\\ ={}^1/_2(C_0^2+C_1^2)[1-(C_1^2-C_0^2)(C_1^2+C_0^2)^{-1}\cos2(s'+\psi_1)]\end{gathered}$$

определим, что ${}^1/_2(C_0^2+C_1^2)$ — большая полуось, $2(s'+\psi_1)$ — эксцентрическая аномалия, $(C_1^2-C_0^2)/(C_1^2+C_0^2)$ — эксцентриситет.

Две системы уравнений (2.6) и (3.10) представляют орбитальное движение ИСЗ в форме многомерного возмущенного осциллятора. Система уравнений (2.6) содержит переменные, характеризующие вращение в инерциальном пространстве базиса $\mathbf{E}'$ — орбитального базиса, а система (3.10) — переменные, характеризующие вращение базиса $\mathbf{E}''$ — KS-базиса. KS-базис ранее был определен законом движения с точностью до задания начального положения орта $\mathbf{e}_1''$ или $\mathbf{e}_3''$, поэтому можно считать, что в кеплеровском движении KS-базис и орбитальный базис совпадают. Связь компонет нормированных кватернионов $\boldsymbol{\lambda}'$ и $\boldsymbol{\lambda}''$, определяющих переход от базиса **I** к базисам $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{E}''$ получается их соответсвенным приравниванием. Количество независимых переменных системы (2.6) равно шести, а системы (3.10) равно девяти h, v_m, dv_m/ds $(m=0, 1, 2, 3)$, связанных билинейным соотношением [1], вытекающим из (3.3) и $(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})=0$.

Автор выражает глубокую признательность В. Н. Бранцу за помощь в работе над настоящей статьей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Штифель Е., Шейфеле Г.* Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975. 304 с.
2. *Челноков Ю. Н.* К регуляризации уравнений пространственной задачи двух тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 6. С. 12–21.
3. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
4. Основы теории полета космических аппаратов // Под ред. д.ф – м.н. Г. С. Нариманова. М.: Машиностроение, 1972. 608 с.
5. *Челноков Ю. Н.* О регулярных уравнениях пространственной задачи двух тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 151–158.

Калининград

Поступила в редакцию
2.XII.1987