

УДК 531.383

© 1990 г.

С. А. МИРЕР, С. А. ОДИНЦОВА, В. А. САРЫЧЕВ

О СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ГИРОСТАТА НА СТРУННОМ ПОДВЕСЕ

Выявлены новые случаи, когда задача о стационарных движениях гиростата на струнном подвесе сводится к задаче о перманентных вращениях или регулярных прецессиях осесимметричного твердого тела, подвешенного на струне в точке, принадлежащей оси симметрии.

1. Рассмотрим стационарные движения подвешенного на струне (стержне) гиростата — системы, состоящей из твердого тела и установленных в нем роторов. Данная задача, некоторые аспекты которой обсуждаются в [1], является обобщением задачи о стационарных движениях твердого тела на струнном подвесе, которая исследована достаточно полно лишь в случае, когда тело осесимметрично, а точка подвеса его к струне принадлежит оси симметрии (в дальнейшем такую систему будем называть базовой). Исследованию перманентных вращений базовой системы посвящены, например, работы [2—4]¹, регулярных прецессий — [5]².

Несомненный интерес представляет анализ возможности сведения задачи о гиростате к хорошо изученным вращениям базовой системы. Такое сведение очевидно в случае равенства нулю кинетического момента осесимметричного гиростата. В [6] рассмотрен другой, также достаточно очевидный случай. Если кинетический момент осесимметричного гиростата направлен вдоль его оси симметрии, то задача сводится к исследованию регулярных прецессий базовой системы.

В настоящей работе описаны еще два случая, когда задача исследования стационарных движений гиростата сводится к анализу уравнений стационарных движений базовой системы. Так, если точка подвеса гиростата и его кинетический момент лежат в главной центральной плоскости инерции, то можно перейти к задаче о регулярных прецессиях базовой системы. Если тело и ротор, составляющие гиростат, осесимметричны и их центры масс совпадают, то исходная задача переходит в задачу о перманентных вращениях базовой системы.

2. Пусть гиростат с постоянным собственным кинетическим моментом K_0 , фиксированным относительно главных центральных осей инерции, подвешен на безынерционном стержне длины l в точке O_2 (фиг. 1). Другой конец стержня прикреплен к неподвижному основанию в точке O_1 .

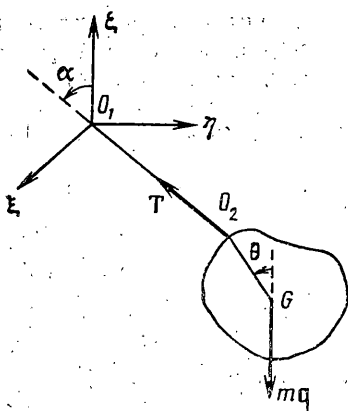
Движение системы описывается уравнениями

$$m\ddot{r} = T + mg, \quad K' = a \times T \quad (2.1)$$

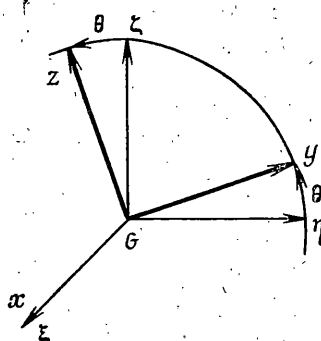
где m — масса гиростата, $K = K_0 + J\omega$ — кинетический момент гиростата относительно центра масс, K_0 — собственный кинетический момент гиростата

¹ См. также Сарычев В. А., Мирер С. А., Исаков А. В. Положения относительно равновесия осесимметричного твердого тела, подвешенного на стержне: Препринт № 94. М.: Ин-т прикл. матем. им. М. В. Келдыша АН СССР, 1987. и Сарычев В. А., Мирер С. А., Одинцова С. А. Перманентные вращения осесимметричного тела на стержне: Препринт № 140. М.: Ин-т прикл. матем. им. М. В. Келдыша АН СССР, 1987.

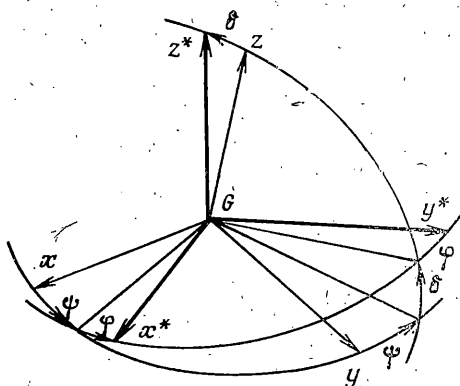
² См. также Сарычев В. А., Мирер С. А., Одинцова С. А. Регулярные прецессии осесимметричного тела на стержне: Препринт № 170. М.: Ин-т прикл. матем. им. М. В. Келдыша АН СССР, 1987.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

та, $\mathbf{J}$ и ω — тензор инерции и угловая скорость гиристора, $\mathbf{T}$ — сила реакции струны, $\mathbf{r} = \mathbf{O}_1\mathbf{G}$ (точка G — центр масс гиристора), $\mathbf{a} = \mathbf{GO}_2$ ($a = |\mathbf{GO}_2|$).

Будем рассматривать такие стационарные движения гиристора, при которых он вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикали, проходящей через точку O_1 , а векторы $\mathbf{l} = \mathbf{O}_1\mathbf{O}_2$ и $\mathbf{a}$ образуют с вертикалью постоянные углы α и θ соответственно (фиг. 1). Центр масс G гиристора при этом описывает окружность радиуса p в горизонтальной плоскости. Тогда справедливы соотношения

$$\mathbf{r}'' = -\omega^2 \mathbf{p}, \quad \mathbf{K} = \omega \times \mathbf{K} \quad (2.2)$$

где вектор $\mathbf{p}$ направлен от оси вращения к точке G .

Система уравнений (2.1) с учетом (2.2) принимает вид

$$-m\omega^2 \mathbf{p} = \mathbf{T} + m\mathbf{g} \quad (2.3)$$

$$\omega \times \mathbf{K} = \mathbf{a} \times \mathbf{T} \quad (2.4)$$

Введем правую систему координат $O_1\xi\eta\zeta$, так чтобы ось $O_1\xi$ была направлена вертикально вверх, а плоскость $O_1\eta\zeta$ все время содержала струну. Очевидно система координат $O_1\xi\eta\zeta$ вращается вокруг вертикали со скоростью ω . Можно доказать, что при стационарных движениях гиристора вектор $\mathbf{a}$ будет постоянно принадлежать плоскости $O_1\eta\zeta$. Действительно, умножая (2.4) скалярно на единичный вектор $\mathbf{e}_3$ вдоль оси $O_1\xi$ и учитывая, что $\mathbf{T} = k\mathbf{l}$, где k — некоторый скалярный коэффициент, получаем

$$(\omega \times \mathbf{K}) \mathbf{e}_3 = k(\mathbf{a} \times \mathbf{l}) \mathbf{e}_3 \quad (2.5)$$

Но смешанное произведение в левой части (2.5) равно нулю, так как векторы ω и $\mathbf{e}_3$ коллинеарны. Поэтому $(\mathbf{a} \times \mathbf{l}) \mathbf{e}_3 = 0$ или, после циклической

перестановке, $(1 \times e_3)a=0$, откуда следует, что вектор a принадлежит плоскости $O_1\eta\zeta$. Заметим, что аналогичное утверждение в случае твердого тела на струнном приводе (при $K_0=0$) впервые было доказано в [2], а для гиростата — в [1].

Плоскости $O_1\eta\zeta$ также будет принадлежать вектор p , для которого справедливо соотношение

$$p=|p|=l \sin \alpha + a \sin \theta \quad (2.6)$$

Учитывая (2.6) и проектируя (2.3) на прямую в плоскости $O_1\eta\zeta$, перпендикулярную струне, получаем уравнение

$$m\omega^2 \cos \alpha (l \sin \alpha + a \sin \theta) = mg \sin \alpha \quad (2.7)$$

описывающее движение центра масс гиростата при стационарных вращениях.

Введем следующие системы координат: $G\xi\eta\zeta$ — с координатными осями, параллельными осям системы $O_1\xi\eta\zeta$; $Gx^*y^*z^*$ — связанную с гиростатом, оси системы суть главные центральные оси инерции гиростата; $Gxyz$ — промежуточную систему, такую, что ось Gx параллельна оси $G\xi$, а ось Gz направлена в точку O_2 . Ориентация системы $Gxyz$ относительно $G\xi\eta\zeta$ определяется углом θ (фиг. 2). Соответствующую матрицу направляющих косинусов обозначим S_1 .

Ориентацию системы $Gx^*y^*z^*$ относительно $Gxyz$ определим углами Эйлера (прецессии ψ , нутации δ и собственного вращения φ , см. фиг. 3).

Матрица направляющих косинусов при этом будет иметь вид $S_2=\|c_{ij}\|_{i,j=1}^3$, где

$$c_{11}=\cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \delta \sin \varphi$$

$$c_{12}=-\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \delta \cos \varphi$$

$$c_{13}=\sin \psi \sin \delta, \quad c_{21}=\sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \delta \sin \varphi$$

$$c_{22}=-\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \delta \cos \varphi, \quad c_{23}=-\cos \psi \sin \delta$$

$$c_{31}=-\sin \delta \sin \varphi, \quad c_{32}=\sin \delta \cos \varphi, \quad c_{33}=\cos \delta$$

Заметим, что поскольку при стационарных движениях гиростат в системе $Gxyz$ покоится, фиксированной точке O_2 отвечают фиксированные значения углов δ и φ . Положение системы $Gx^*y^*z^*$ относительно $G\xi\eta\zeta$ определяется матрицей

$$S_3=S_1S_2=\|a_{ij}\|_{i,j=1}^3$$

Уравнение (2.4) с учетом (2.3) перепишем в виде

$$\omega \times (K_0 \times J \omega) + a \times m(\omega^2 p + g) = 0 \quad (2.8)$$

$$J = \begin{bmatrix} I_{\xi\xi} & -I_{\xi\eta} & -I_{\xi\zeta} \\ -I_{\eta\xi} & I_{\eta\eta} & -I_{\eta\zeta} \\ -I_{\zeta\xi} & -I_{\zeta\eta} & I_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} \quad K_0 = (K_\xi, K_\eta, K_\zeta)^T$$

$\omega=(0, 0, \omega)^T$ — тензор инерции гиростата, кинетический момент ротора и вектор угловой скорости гиростата в системе $G\xi\eta\zeta$. Векторное уравнение (2.8) эквивалентно двум скалярным уравнениям

$$I_{\xi\xi} = K_\xi / \omega \quad (2.9)$$

$$I_{\eta\eta} - K_\eta / \omega = ma(p\omega^2 \cos \theta - g \sin \theta) / \omega^2$$

Входящие сюда величины K_ξ , K_η , $I_{\xi\xi}$ и $I_{\eta\eta}$ выражаются через главные центральные моменты инерции гиростата A , B , C и проекции собственного кинетического момента K_1 , K_2 , K_3 на оси связанной системы координат

$Gx^*y^*z^*$ следующим образом:

$$\bar{K}_\xi = K_1 a_{11} + K_2 a_{12} + K_3 a_{13}, \quad K_\eta = K_1 a_{21} + K_2 a_{22} + K_3 a_{23} \quad (2.10)$$

$$I_{\xi\xi} = -A a_{11} a_{31} - B a_{12} a_{32} - C a_{13} a_{33}, \quad I_{\eta\eta} = -A a_{21} a_{31} - B a_{22} a_{32} - C a_{23} a_{33}$$

Уравнения (2.9) с учетом (2.10) принимают вид

$$\begin{aligned} a_{11}(K_1/\omega + A a_{31}) + a_{12}(K_2/\omega + B a_{32}) + a_{13}(K_3/\omega + C a_{33}) &= 0 \\ a_{21}(K_1/\omega + A a_{31}) + a_{22}(K_2/\omega + B a_{32}) + a_{23}(K_3/\omega + C a_{33}) &= -ma(p\omega^2 \cos \theta - \\ &\quad - g \sin \theta)/\omega^2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

и вместе с (2.7) определяют все стационарные движения рассматриваемого типа, возможные для данной механической системы.

3. Рассмотрим частный случай, когда точка подвеса гиростата к стержню и вектор $\mathbf{K}_0$ находятся в главной центральной плоскости инерции Gy^*z^* . Тогда $K_1=0$ и систему уравнений (2.11), с учетом условий ортогональности строк матрицы S_3 , можно записать следующим образом:

$$a_{12}[K_2/\omega + (B-A)a_{32}] + a_{13}[K_3/\omega + (C-A)a_{33}] = 0 \quad (3.1)$$

$$a_{22}(K_2/\omega + (B-A)a_{32}) + a_{23}[K_3/\omega + (C-A)a_{33}] = -ma(p\omega^2 \cos \theta - g \sin \theta)/\omega^2 \quad (3.2)$$

Заметим, что поскольку ось Gz принадлежит плоскости Gy^*z^* , то $\varphi=0$ и элементы матрицы направляющих косинусов S_3 имеют вид

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \psi, \quad a_{12} = -\sin \psi \cos \delta \\ a_{13} &= \sin \psi \sin \delta, \quad a_{21} = \sin \psi \cos \theta \\ a_{22} &= \cos \psi \cos \delta \cos \theta - \sin \delta \sin \theta, \quad a_{23} = -\cos \psi \sin \delta \cos \theta - \cos \delta \sin \theta \\ a_{31} &= \sin \psi \sin \theta, \quad a_{32} = \cos \psi \cos \delta \sin \theta + \sin \delta \cos \theta \\ a_{33} &= -\cos \psi \sin \delta \sin \theta + \cos \delta \cos \theta \end{aligned} \quad (3.3)$$

Если $\sin \psi \neq 0$, т. е. главная центральная плоскость инерции гиростата Gy^*z^* не совпадает с равномерно вращающейся вертикальной плоскостью, содержащей струну, то система (3.1), (3.2) с учетом (3.3) эквивалентна уравнениям

$$\cos \psi = \frac{\omega(C-B) \cos \theta \sin \delta \cos \delta + K_3 \sin \delta - K_2 \cos \delta}{\omega(B \cos^2 \delta + C \sin^2 \delta - A) \sin \theta} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} &\frac{K_2(C-A) \sin \delta + K_3(B-A) \cos \delta}{\omega(B \cos^2 \delta + C \sin^2 \delta - A)} \sin \theta + \\ &+ \frac{(C-A)(B-A)}{B \cos^2 \delta + C \sin^2 \delta - A} \sin \theta \cos \theta = \frac{ma(p\omega^2 \cos \theta - g \sin \theta)}{\omega^2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Отметим, что после введения обозначений

$$\begin{aligned} K_0^* &= [K_2(C-A) \sin \delta + K_3(B-A) \cos \delta] [B \cos^2 \delta + C \sin^2 \delta - A]^{-1} \\ C^* - A^* &= (C-A)(B-A) [B \cos^2 \delta + C \sin^2 \delta - A]^{-1} \end{aligned}$$

уравнение (3.5) в точности совпадает с уравнением, описывающим регулярные прецессии осесимметричного тела, подвешенного к струне в точке, лежащей на оси симметрии [5, 6]. Таким образом, в данном частном случае исследование стационарных движений гиростата на струнном подвесе сводится к уже решенной задаче анализа регулярных прецессий твердого тела, после чего дополнительный неизвестный параметр ψ определяется из (3.4).

Что касается случая $\sin \psi = 0$, то он приводит к новому типу уравнения

$$[K_2 \cos(\theta+\delta) - K_3 \sin(\theta+\delta)]/\omega + (B-C) \sin(\theta+\delta) \cos(\theta+\delta) = \\ = -ma(p\omega^2 \cos \theta - g \sin \theta)/\omega^2 \quad (3.6)$$

который ранее не исследовался.

4. Рассмотрим более подробно случай, когда гиростат представляет собой осесимметричное тело, на котором установлен осесимметричный ротор, вращающийся с постоянной угловой скоростью. Предположим, кроме того, что центры масс тела и ротора совпадают, а точка O_2 крепления тела к стержню лежит на оси симметрии тела. Ясно, что такая конфигурация является частным случаем системы из предыдущего раздела, поскольку плоскость, проведенная через пересекающиеся в центре масс оси симметрии тела и ротора, является главной центральной плоскостью инерции гиростата. Обозначим через A, C и A_0, C_0 — экваториальный и осевой моменты инерции тела и ротора соответственно, а $I_{\xi\xi}^0, I_{\eta\xi}^0, I_{\xi\xi}^0, I_{\eta\xi}^0$ — центробежные моменты инерции тела и ротора в системе координат $G\xi\eta\zeta$. Тогда уравнения (2.9) будут иметь вид

$$I_{\xi\xi}^0 + I_{\xi\xi} = K_\xi/\omega \quad (4.1)$$

$$I_{\eta\xi}^0 + I_{\eta\xi} - K_\eta/\omega = ma(p\omega^2 \cos \theta - g \sin \theta)/\omega^2$$

Поскольку система координат $Gxyz$ является системой главных центральных осей инерции тела и ориентация ее относительно $G\xi\eta\zeta$ определяется матрицей S_1 , то можно получить

$$I_{\xi\xi} = 0, \quad I_{\eta\xi} = (C-A) \sin \theta \cos \theta \quad (4.2)$$

Обозначая направляющие косинусы системы $Gx_0*y_0*z_0$ главных центральных осей инерции ротора относительно $G\xi\eta\zeta$ через b_{ij} , получим

$$I_{\xi\xi}^0 = -A_0(b_{11}b_{31} + b_{12}b_{32}) - C_0b_{13}b_{33} = (A_0 - C_0)b_{13}b_{33} \quad (4.3)$$

$$I_{\eta\xi}^0 = -A_0(b_{21}b_{31} + b_{22}b_{32}) - C_0b_{23}b_{33} = (A_0 - C_0)b_{23}b_{33}$$

В осях $G\xi\eta\zeta$ вектор K_0 имеет координаты

$$K_\xi = K_0b_{13}, \quad K_\eta = K_0b_{23} \quad (4.4)$$

Таким образом, система (4.1) с учетом (4.2) — (4.4) примет вид

$$[(A_0 - C_0)b_{33} - K_0/\omega]b_{13} = 0 \quad (4.5)$$

$$[(A_0 - C_0)b_{33} - K_0/\omega]b_{23} = (A - C) \sin \theta \cos \theta + ma(p\omega^2 \cos \theta - g \sin \theta)/\omega^2$$

и при условии $b_{13} \neq 0$ получаем

$$(A_0 - C_0)b_{33} = K_0/\omega \quad (4.6)$$

$$(A - C) \sin \theta \cos \theta + ma(p\omega^2 \cos \theta - g \sin \theta)/\omega^2 = 0 \quad (4.7)$$

Отметим, что уравнение (4.7) совпадает с аналогичным уравнением для перманентных вращений осесимметричного тела, подвешенного в точке, лежащей на оси симметрии (см., например, [5]).

Определяя положение оси ротора относительно системы $Gxyz$ углами Эйлера (δ_0 — углом нутации и ψ_0 — углом прецессии), получим

$$b_{13} = \sin \psi_0 \sin \delta_0, \quad b_{23} = -\cos \theta \cos \psi_0 \sin \delta_0 - \sin \theta \cos \delta_0$$

$$b_{33} = -\sin \theta \cos \psi_0 \sin \delta_0 + \cos \theta \cos \delta_0$$

Угол δ_0 между осями тела и ротора фиксирован для данного гиростата, а угол ψ_0 определяется из уравнения (4.6) следующим образом

$$\cos \psi_0 = K_0 / [(C_0 - A_0) \omega \sin \theta \sin \delta_0] + \operatorname{ctg} \theta \operatorname{ctg} \delta_0$$

Пусть теперь $b_{13} = 0$. Тогда, если $\sin \delta_0 = 0$, то первое уравнение (4.5) является тождеством, а второе приводится к равенству

$$(C + C_0 - A - A_0) \sin \theta \cos \theta + (K_0/\omega) \sin \theta = ma(p\omega^2 \cos \theta - g \sin \theta)/\omega^2$$

которое с точностью до коэффициентов эквивалентно уравнению, описывающему регулярные прецессии осесимметричного тела [5]. Вообще говоря, этот результат очевиден, поскольку при $\sin \delta_0 = 0$ ось ротора совпадает с осью симметрии тела и фактически имеет место случай, рассмотренный в [6].

Если $\sin \psi_0 = 0$, то, как и в предыдущем разделе, уравнение стационарных движений имеет вид (3.6).

Таким образом, показано, что если вектор собственного кинетического момента гиростата K_0 и точка крепления к струне O_2 принадлежат главной центральной плоскости инерции системы, но эта плоскость при стационарных вращениях не содержит струну и неподвижную вертикаль, то задача сводится к анализу регулярных прецессий базовой системы с параметрами, являющимися известными функциями параметров гиростата.

Если к тому же тело, на котором установлен ротор, осесимметрично, струна крепится в точке на этой оси симметрии и центры масс тела и ротора совпадают, то задача сводится к исследованию перманентных вращений базовой системы. При этом отметим, что все параметры базовой системы, кроме массы, идентичны параметрам исходного тела, а масса равна массе гиростата, т. е. суммарной массе тела и ротора. Другими словами, с точки зрения перманентных вращений системы, добавление ротора в этом случае приводит только к изменению массы тела, подвешенного на струне.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рубановский В. Н., Мамниашвили Т. И. О перманентных вращениях гиростата, подвешенного на стержне // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР, 1987. С. 20–27.
2. Ишлинский А. Ю., Малашенко С. В., Стороженко В. А., Темченко М. Е., Шихин П. Г. Метод балансировки вращающихся тел на струнном приводе // Изв. АН СССР, МТТ. 1979. № 5. С. 3–18.
3. Нозадзе Г. Т. Об устойчивости и бифуркации положений относительного равновесия тяжелого твердого тела, подвешенного на струне // Изв. АН СССР, МТТ. 1984. № 3. С. 22–29.
4. Рубановский В. Н. Ветвление и устойчивость перманентных вращений и относительных равновесий тела, подвешенного на стержне // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 3. С. 382–389.
5. Гурецкий В. В., Добринская Т. А. О регулярных прецессионных движениях осесимметричного твердого тела на шарнирно-стержневом подвесе // Изв. АН СССР, МТТ. 1987. № 5. С. 19–27.
6. Скимель В. Н. О движении гиростата, подвешенного на струне // Тр. межвуз. конф. по прикл. теории устойчивости движения и аналитической механике, Казань, 1962. Казань: Казан. авиац. ин-т, 1964. С. 118–122.

Москва

Поступила в редакцию
27.11.1989