МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1990

УДК 531.36
© 1990 г.

А. И. ТКАЧЕНКО

УПРОЩЕННЫЕ ОЦЕНКИ В ЗАДАЧАХ КОРРЕКЦИИ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ

При оценивании скорости, местоположения, ориентации подвижного объекта по показаниям установленных на нем чувствительных элементов естественно стремление возможно полнее учесть модель погрешностей чувствительных элементов путем включения коэффициентов этой модели в состав оцениваемых параметров. Такое расширение оцениваемого вектора состояния часто связано с ослаблением наблюдаемости искомых параметров движения. В ряде случаев может оказаться предпочтительным отказ от оценивания коэффициентов упомянутой модели погрешностей с целью улучшения наблюдаемости параметров движения объекта и повышения точности их оценки.

1. Оценка и анализ наблюдаемости параметров движения. Пусть параметры движения жесткого объекта определяются путем интегрирования уравнений его движения на промежутке времени $[t_0, t_f]$ при неточно заданных начальных условиях с использованием показаний установленных на объекте чувствительных элементов. Введем k-мерный малый вектор $\chi(t)$, однозначно характеризующий ошибки определения параметров движения. Уравнения ошибок, которым удовлетворяет χ, представим в первом приближении в виде

$$\chi^{\bullet}=A(t)\chi+P(t)\delta\mathbf{a} \tag{1.1}$$

где $\delta\mathbf{a}$ — вектор ошибок в показаниях чувствительных элементов; A, P — матрицы соответствующих размеров, в общем случае зависящие от t как непосредственно, так и через вычисляемые параметры движения. Пусть в дискретные моменты $t_j\in[t_0, t_f]$ известны значения векторов $\mathbf{Y}_j$ $(j=1,\ldots,N)$:

$$\mathbf{Y}_j=H_1(t_j)\chi(t_j)+H_2(t_j)\delta\mathbf{a}(t_j)+\delta\mathbf{Y}_j \tag{1.2}$$

где $H_1(t)$, $H_2(t)$ — матрицы соответствующих размеров, зависящие известным образом от t и вычисляемых параметров движения; $\delta\mathbf{Y}_j$ — случайные векторы с малыми центрированными и взаимно не коррелированными элементами. Необходимо оценить $\chi(t_f)$ для ввода корректирующих поправок в параметры движения.

Обычно в (1.1), (1.2) вводится достаточно адекватная модель погрешностей измерений

$$\delta\mathbf{a}(t_j)=Q(t_j)\mathbf{c}+\mathbf{v}_j,\quad \mathbf{c}^{\bullet}=0 \tag{1.3}$$

где $\mathbf{c}$ — малый l-мерный вектор, Q — матрица соответствующих размеров, зависящая известным образом от t и параметров движения объекта, $\mathbf{v}_j$ — l-мерный вектор случайных погрешностей. Состояние «расширенной» системы (1.1), (1.3) характеризуется вектором $\mathbf{X}(t)$ размерности $n=k+l$: $\mathbf{X}^T=[\chi^T\ \mathbf{c}^T]$ (T — знак транспонирования). Решение рассматриваемой задачи получается путем оценки вектора $\mathbf{X}$ по «измерениям» (1.2) [1, 2] как сочетание собственно оценки $\chi(t)$ и калибровки — оценки $\mathbf{c}$.

Пусть оценка $\chi(t)$ ищется в виде

$$\chi(t)=F(t,\ t_0)\mathbf{X}_0,\quad \mathbf{X}_0=\mathbf{X}(t_0) \tag{1.4}$$

где $F(t, t_0)=[F_{ij}]$ — $(k\times n)$ — матрица функций чувствительности, элементы которой находятся путем интегрирования уравнений чувствительности

[3] для системы (1.1). Уравнения для определения $\mathbf{X}_0$ получаются подстановкой (1.3), (1.4) в (1.2):

$$H(t_j)\mathbf{X}_0^*=\mathbf{Y}_j \quad (j=1,\ldots, N)$$

$$H(t)=H_1(t)F(t, t_0)+[O_{k\times k}H_2Q(t)]$$

Здесь $O_{i\times j}$ — нулевая матрица соответствующих размеров; $\mathbf{X}_0^*$ — n-мерный вектор, оценивающий $\mathbf{X}_0$. Пусть в системе нормальных уравнений

$$B\mathbf{X}_0^*=\mathbf{Z}^*, \quad B=\sum_{j=1}^{N} H^T(t_j)H(t_j), \quad \mathbf{Z}^*=\sum_{j=1}^{N} H^T(t_j)\mathbf{Y}_j$$
$$\mathbf{Z}^*=\mathbf{Z}+\delta\mathbf{Z}, \quad \delta\mathbf{Z}=\sum_{j=1}^{N} H^T(t_j)\,(\delta\mathbf{Y}_j+H_2(t_j)\mathbf{v}_j) \tag{1.5}$$

$(n\times n)$ — матрица B плохо обусловлена. В этом и только в этом случае малые ошибки $\delta\mathbf{Z}$ могут вызывать немалые ошибки $\delta\mathbf{X}_0=\mathbf{X}_0^*-\mathbf{X}_0$. Обозначим через R^* множество всех n-мерных векторов, почти ортогональных всем строкам (а в силу $B^T=B$ — и всем столбцам) матрицы B в смысле малости соответствующих скалярных произведений. Очевидно, любой не малый вектор ошибки $\delta\mathbf{X}_0$, вызванной малым значением $\delta\mathbf{Z}$, принадлежит R^*.

Если найдется такой малый вектор $\delta\mathbf{Z}$, что i-я координата вектора $\delta\mathbf{X}_0$, удовлетворяющего уравнению $B\delta\mathbf{X}_0=\delta\mathbf{Z}$, не мала, то i-я координата решения системы (1.5) слабо наблюдаема, т. е. малые ошибки $\delta\mathbf{Z}$ могут вызвать не малые ошибки в оценке упомянутой координаты [4]. Возможный способ анализа наблюдаемости отдельных координат решения системы (1.5) основан на построении в p-мерном подпространстве R^* $(p<n)$ ортонормированного базиса, состоящего из ортов $\mathbf{u}_k=[u_{k1}\ldots u_{kn}]^T$ $(k=1,\ldots,p)$. Необходимый и достаточный признак хорошей наблюдаемости i-й координаты решения системы (1.5) — выполнение условия [5]

$$\varkappa_i=\left(p^{-1}\sum_{k=1}^{p}u_{ki}^2\right)^{1/2}\ll 1 \tag{1.6}$$

Для анализа наблюдаемости i-й координаты вектора $\chi(t)$ представим ее в виде $\chi_i(t)=\mathbf{F}_i(t, t_0)\mathbf{X}_0$, где $\mathbf{F}_i=[F_{i1}\ldots F_{in}]$ — i-я строка матрицы $F(t, t_0)$ $(i=1,\ldots,k)$. Любые малые возмущения $\delta\mathbf{Z}$ вызывают малую ошибку оценивания $\chi_i(t)$ в том и только в том случае, если строка $F_i(t, t_0)$ почти ортогональна R^*, т. е. если ($\|\cdot\|$ — символ евклидовой нормы):

$$\sigma_i=\left[\sum_{k=1}^{p}\left(\|\mathbf{F}_i\|^{-1}\mathbf{F}_i\mathbf{u}_k\right)^2\right]^{1/2}\ll 1 \tag{1.7}$$

На достаточно кратком промежутке $[t_0, t_f]$ вариации координат χ_i, связанные с элементами $\mathbf{c}$, намного меньше начальных значений этих координат, ошибки же оценивания слабо наблюдаемых координат χ_i, вызванные случайными погрешностями δZ и возмущающими факторами типа неучтенных нелинейных членов и округлений при вычислениях, могут быть сравнимы с упомянутыми вариациями или превосходить их по величине. Так как оценки слабо наблюдаемых элементов $\mathbf{c}$, вследствие содержащихся в них больших относительных ошибок,— не достоверные характеристики чувствительных элементов, а лишь коэффициенты в разложении (1.4) вектора χ по функциям чувствительности, может оказаться предпочтительным иное представление χ, в котором все координаты χ_i становятся хорошо наблюдаемыми за счет потери адекватности модели и отказа от оценки части или всех элементов $\mathbf{c}$.

2. Асимптотическая оценка ошибок вертикального канала инерциальной навигационной системы. Пусть скорость и местоположение точечного объекта, движущегося в околоземном пространстве, определяются путем интегрирования уравнений движения в системе координат с ортогональным сопровождающим трехгранником $\xi\eta\zeta$, одна из осей которого (например, ось η) направлена по местной вертикали. При этом используется представление абсолютного ускорения объекта в виде векторной суммы «кажущейся» составляющей $\mathbf{a}$, измеряемой связанными с объектом чувствительными элементами, и «гравитационной» составляющей $\mathbf{g}$, которая вычисляется как функция координат объекта. Вычисленное значение высоты H объекта (расстояния вдоль оси η от поверхности Земли) обозначим $H^*=H+\delta H$, где δH — ошибка, вызванная неточным нахождением $\mathbf{a}$ и $\mathbf{g}$.

Пусть в моменты времени $t_j\in[t_0, t_f]$ $(t_j=t_{j-1}+\Delta t,\ \Delta t\ll t_f-t_0)$ измеряется величина $H^\circ(t_j)=H(t_j)+\Delta H_j$, где ΔH_j — нормально распределенная малая случайная ошибка с нулевым математическим ожиданием. Необходимо оценить δH и $\delta V_\eta=\delta \dot{H}$ — ошибку определения вертикальной составляющей скорости объекта — в окрестности $t=t_f$.

При незначительных сферических эволюциях объекта и отсутствии дополнительной информации ошибки определения вертикальных составляющих векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{g}$ неразличимы. Не разделяя эти ошибки, положим

$$\delta H=\mathbf{f}(t)\mathbf{x},\quad \delta V_\eta=\dot{\mathbf{f}}(t)\mathbf{x} \tag{2.1}$$

$$\mathbf{f}(t)=[f_1(t)\ \ldots f_m(t)],\ \mathbf{x}=[x_1\ldots x_m]=\text{const}$$

где $f_1(t),\ldots,f_m(t)$ — система линейно независимых функций, обеспечивающая приемлемую точность среднеквадратического приближения δH, δV_η по формулам (2.1) на $[t_0, t_f]$. Если ошибки определения вертикальных составляющих $\mathbf{a}$, $\mathbf{g}$ мало изменяются при $t_0\leqslant t\leqslant t_f$, достаточно положить

$$m=3,\ f_1=\alpha_1,\ f_2=\alpha_2\tau,\ f_3=\alpha_3\tau^2 \tag{2.2}$$

где α_1, α_2, α_3 — постоянные, $\tau=t-t_0$. Оценку вектора $\mathbf{x}$ находим, решая методом наименьших квадратов систему уравнений $\mathbf{f}(t_j)\mathbf{x}=y_j$, $y_j=H^*(t_j)-H^\circ(t_j)$.

Составим соответствующую систему нормальных уравнений

$$B_j\mathbf{x}=\mathbf{z}_j,\qquad B_j=\sum_{i=1}^{j}\mathbf{f}^T(t_i)\mathbf{f}(t_i)$$
$$\mathbf{z}_j=[z_1\ldots z_m]^T=\sum_{i=1}^{j}y_i\mathbf{f}^T(t_i) \tag{2.3}$$

Пусть $\Delta t=\text{const}$. С помощью предельного перехода при $\Delta t\to 0$ получаем

$$B_j\approx\Delta t^{-1}\int_{t_0}^{t_f}\mathbf{f}^T(t)\mathbf{f}(t)\,dt$$

При надлежащем выборе $\mathbf{f}(t)$ можно найти явную зависимость $B_j(t_j)$; тогда вычисления (2.3) сводятся к формированию $\mathbf{z}_j$. В момент оценивания, не вычисляя $\mathbf{x}$, найдем δH, δV_η на основании (2.1), (2.3) с помощью метода исключений [6]. Так, при задании $\mathbf{f}(t)$ формулами (2.2) имеем

$$\delta H\approx\left(\frac{3z_1}{\alpha_1\tau}-\frac{24z_2}{\alpha_2\tau^2}+\frac{30z_3}{\alpha_3\tau^3}\right)\Delta t \tag{2.4}$$
$$\delta V_\eta\approx\left(\frac{24z_1}{\alpha_1\tau^2}-\frac{168z_2}{\alpha_2\tau^3}+\frac{180z_3}{\alpha_3\tau^4}\right)\Delta t$$

Проверка изложенного метода оценивания δH, δV_η выполнялась при моделировании задачи определения параметров движения объекта путем интегрирования системы уравнений

$$\dot{\mathbf{V}}=\mathbf{V}\times\mathbf{U}+C\mathbf{a}+\mathbf{g}(\varphi, H)$$

$$\dot{\varphi}=-U_\zeta,\ \dot{\lambda}=U_\xi/\cos\varphi-u_e,\ \dot{H}=V_\eta$$
$$U_\xi=V_\zeta/r_1,\ U_\eta=U_\xi\,\mathrm{tg}\,\varphi,\ U_\zeta=-V_\xi/r_2 \tag{2.5}$$

где $\mathbf{V}=[V_\xi V_\eta V_\zeta]^T$ – вектор абсолютной скорости объекта, заданный своими проекциями на оси сопровождающего географического трехгранника $\xi\eta\zeta$, направленные соответственно на север, в зенит и на восток; $U=[U_\xi U_\eta U_\zeta]^T$ – вектор абсолютной угловой скорости трехгранника $\xi\eta\zeta$; φ, λ – географические широта и долгота места нахождения объекта; u_e – угловая скорость вращения Земли; C – доступная вычислению матрица преобразования измеренных координат вектора $\mathbf{a}$ в систему $\xi\eta\zeta$; r_1, r_2 – радиусы кривизны нормального сечения поверхности $H=\mathrm{const}$, касательного к параллели, и меридионального сечения этой поверхности в месте нахождения объекта [7]. Имитация процесса интегрирования уравнений (2.5) выполнялась в «точном» и «грубом» вариантах. В первом из них проекции вектора $\mathbf{g}$ на оси трехгранника $\xi\eta\zeta$ задавались формулами (2.117) работы [7], во втором – упрощенными выражениями, содержащими члены вышеупомянутых формул не выше второго порядка малости относительно квадрата эксцентриситета земного эллипсоида. Кроме того, в «грубом» процессе вводилась ошибка измерения $\mathbf{a}$ в виде вектора $[5, -5, 7]^T\cdot 10^{-5}$ м/с^2. Вариации углов между связанными осями и вертикалью достигали 10°. Вектор $\mathbf{f}(t)$ в (2.1) задавался формулами (2.2) при $\alpha_1=1$, $\alpha_2=0{,}1$ с$^{-1}$, $\alpha_3=0{,}01$ с$^{-2}$. В табл. 1 представлены результаты моделирования при $\Delta t=0{,}08$ с и стандартном

Таблица 1

t	δH	δH^*	δV_η	δV_η^*
0	−16,5		−0,085	
40	−20,1	−19,6	−0,096	0,20
80	−24,1	−19,0	−0,11	0,11
120	−28,5	−30,5	−0,12	−0,15
160	−33,5	−36,5	−0,13	−0,16
200	−38,8	−39,2	−0,14	−0,11
240	−44,9	−51,9	−0,15	−0,83
280	−51,4	−49,7	−0,17	−0,10
320	−58,3	−57,2	−0,18	−0,096
360	−66,3	−69,1	−0,20	−0,26
400	−74,3	−76,6	−0,22	−0,24

отклонении ошибок ΔH_j, равном 40 м. Через δH(м), δV_η(м/с) обозначены истинные значения соответствующих ошибок, найденные как разности значений H, V_η в «грубом» и «точном» решениях; δH^*(м), δV_η^*(м/с) – оценки названных ошибок по формулам (2.4); время t указано в секундах. Вначале, при $0\leqslant t\leqslant 200$ с, в (2.2) полагалось $\tau=t$; в момент $t=200$ с вводилось значение $\mathbf{z}_j=0$ и оценивание возобновлялось при $\tau=t-200$ с. Заметна хорошая сходимость оценок в конце рассмотренного интервала времени.

3. Коррекция пространственного измерителя угловой скорости. Пусть ориентация ортонормированного базиса E, связанного с подвижным объектом, определяется с использованием показаний установленного на объекте пространственного измерителя угловой скорости. Эти показания, поступающие с малым интервалом (тактом съема) h, представим в виде векторов $\overset{*}{\theta}_{i+1}$:

$$\overset{*}{\theta}_{i+1}=\theta_{i+1}+D_{i+1}\mathbf{c}+\delta\theta_{i+1},\qquad \theta_{i+1}=\int_{t_i}^{t_i+h}\omega_E\,dt \tag{3.1}$$

Здесь ω – вектор абсолютной угловой скорости объекта (индексом E или I отмечается отображение вектора на соответствующий базис); D_{i+1} – известная $(3\times l)$-матрица, определяющая структуру систематических погрешностей измерения угловой скорости; $\mathbf{c}=\mathrm{const}$ – неизвестный малый l-мерный вектор, характеризующий уровень упомянутых погрешностей; $\delta\theta_{i+1}$ – трехмерные векторы малых случайных ошибок с взаимно не коррелированными элементами. Вследствие неточной аппроксимации векторов θ_{i+1} значениями $\overset{*}{\theta}_{i+1}$ и приближенного задания начальных условий текущая ориентация объекта определяется с малой ошибкой. Синхронно с информацией (3.1) поступают значения углов Эйлера φ_1, φ_2, φ_3, характеризующих ориентацию связанного с объектом ортонормированного базиса J относительно I. Взаимная ориентация базисов E и J не известна. Необходимо уточнить ориентацию базиса E относительно I.

Решение этой задачи, отличное от приведенного в [8], основано на использовании выражения

$$\boldsymbol{\omega}_I = G(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{\varphi}^{\cdot} \qquad (3.2)$$

где $\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3]^T$; $G(\boldsymbol{\varphi})$ — (3×3)-матрица, элементы которой выражаются через тригонометрические функции углов Эйлера. При достаточно малом такте измерения $\boldsymbol{\varphi}$ квадратура от левой части (3.2) вычисляется с надлежащей точностью. Так, если $\Delta\boldsymbol{\varphi}$ — приращение $\boldsymbol{\varphi}$ на промежутке $[t_j, t_{j+2}]$, где $t_{j+2} = t_j + 2h$, то

$$\mathbf{q} = \int_{t_j}^{t_{j+2}} \boldsymbol{\omega}_I\, dt = \frac{1}{2}[G(\boldsymbol{\varphi}_j) + G(\boldsymbol{\varphi}_{j+2})]\Delta\boldsymbol{\varphi} + O(h^3) \qquad (3.3)$$

где $\boldsymbol{\varphi}_i = \boldsymbol{\varphi}(t_i)$. В более точных формулах на практике нет необходимости.

Пусть C — ортогональная (3×3)-матрица, задающая преобразование $\boldsymbol{\omega}_I = C\boldsymbol{\omega}_E$, а C^* — приближенное значение этой матрицы, вычисленное в явном виде либо неявно, но однозначно соответствующее вычисленным параметрам ориентации базиса E. Можно считать, что C^* задает переход к E от близкого к I ортонормированного базиса K — числового образа базиса I. В первом приближении

$$C = [E_3 + \Phi(\boldsymbol{\gamma})]C^* \qquad (3.4)$$

где E_3 — единичная (3×3)-матрица; $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3]^T$ — вектор малого поворота базиса K относительно I; $\Phi(\mathbf{r})$ — кососимметрическая (3×3)-матрица, задающая в конкретном базисе векторное произведение вида $\mathbf{r}\times\mathbf{p} = \Phi(\mathbf{r})\mathbf{p}$. Так как $C^{\cdot} = \Phi(\boldsymbol{\omega}_I)C$, $C^{*\cdot} = C^*\Phi(\boldsymbol{\omega}^*)$, где $\boldsymbol{\omega}^*$ — «приборная» угловая скорость, соответствующая информации (3.1), то на основании (3.4) в первом приближении $\Phi(\boldsymbol{\omega}_I)\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}^{\cdot} = C^*\boldsymbol{\omega}^* - \boldsymbol{\omega}_I$.

Отсюда с учетом (3.3):

$${}^1/_2\Phi(\mathbf{q})(\boldsymbol{\gamma}_j + \boldsymbol{\gamma}_{j+2}) - (\boldsymbol{\gamma}_{j+2} - \boldsymbol{\gamma}_j) = {}^1/_2(C_j^* + C_{j+2}^*)(\overset{*}{\boldsymbol{\theta}}_{j+1} + \overset{*}{\boldsymbol{\theta}}_{j+2}) - \mathbf{q} \qquad (3.5)$$

Здесь $C_i^* = C^*(t_i)$, $\boldsymbol{\gamma}_i = \boldsymbol{\gamma}(t_i)$. Невязка в (3.5) — величина порядка h^3. Так как $\boldsymbol{\gamma}^{\cdot} \approx C^*(\boldsymbol{\omega}_E - \boldsymbol{\omega}^*)$, то на основании (3.1) имеем

$$\boldsymbol{\gamma}_j \approx \boldsymbol{\gamma}_0 + \Gamma_j\mathbf{c}, \quad \boldsymbol{\gamma}_0 = \boldsymbol{\gamma}(t_0) \qquad (3.6)$$

$$\Gamma_{j+2} = \Gamma_j - {}^1/_2(C_j^* + C_{j+2}^*)(D_{j+1} + D_{j+2}), \qquad \Gamma_0 = 0$$

где Γ_i — $(3\times l)$-матрица. Подставив в (3.5) выражения (3.6) для $\boldsymbol{\gamma}_j$, $\boldsymbol{\gamma}_{j+2}$, получим уравнение относительно $\boldsymbol{\gamma}_0$, c. Система таких уравнений, сформированных при различных t_j, решается методом наименьших квадратов; найденное решение подставляется в (3.6) и полученное значение $\boldsymbol{\gamma}(t)$ используется для уточнения параметров ориентации базиса E по формулам типа (3.4).

Подчеркнем, что хотя в (3.5) использованы относительно несложные квадратурные формулы, точность интегрирования кинематических уравнений, решение которых подлежит коррекции, должна быть достаточно высокой. Поэтому уравнение (3.5) записано в предположении, что C^* или иные параметры ориентации вычисляются с шагом $2h$ по формулам четвертого порядка [9, 10].

При моделировании данной задачи слагаемое $D_{i+1}c$ в (3.1) задавалось в виде $D_{i+1}\mathbf{c} = h\mathbf{d} + P\boldsymbol{\theta}_{i+1}$, где $\mathbf{d} = [d_1\ d_2\ d_3]^T$ — вектор, характеризующий постоянный дрейф пространственного измерителя угловой скорости, $P = \mathrm{const}$ — (3×3)-матрица, характеризующая масштабные погрешности и отклонения осей чувствительности от ортов базиса E. Значения парамеров модели ошибок: $\gamma_{01} = \gamma_{02} = \gamma_{03} = 2\cdot10^{-3}$, $d_1 = d_2 = 5\cdot10^{-6}$ с$^{-1}$, $d_3 = -8\cdot10^{-6}$ с$^{-1}$.

$$P^T = \begin{bmatrix} 2\cdot10^{-4} & 3\cdot10^{-4} & -1{,}5\cdot10^{-4} \\ -2{,}5\cdot10^{-4} & -2\cdot10^{-4} & 2\cdot10^{-4} \\ 10^{-4} & 3\cdot10^{-4} & 2\cdot10^{-4} \end{bmatrix}$$

Можно показать, что в общем случае задания базиса E, не удовлетворяющего условию $P^T = P$, элементы матрицы P и вектора $\boldsymbol{\gamma}_0$ слабо наблюдаемы при незначительных сферических эволюциях объекта на $[t_0, t_f]$.

Таблица 2

t	ω_1	ω_2	ω_3
0–3	0,01	0	0
3–6	0	0	0,01
6–9	0	0,2	0,01
9–12	−0,01	0	0,02
12–14	0	−0,01	−0,1

Таблица 3

t	I	II	III	IV
4	$3{,}5\cdot10^{-3}$	$4{,}4\cdot10^{-2}$	$3{,}1\cdot10^{-4}$	$3{,}8\cdot10^{-4}$
6	$3{,}4\cdot10^{-3}$	$4{,}2\cdot10^{-2}$	$3{,}6\cdot10^{-4}$	$4{,}0\cdot10^{-4}$
8	$3{,}4\cdot10^{-3}$	$9{,}0\cdot10^{-2}$	$3{,}9\cdot10^{-4}$	$4{,}0\cdot10^{-4}$
10	$3{,}5\cdot10^{-3}$	$1{,}2\cdot10^{-1}$	$3{,}3\cdot10^{-4}$	$3{,}7\cdot10^{-4}$
12	$3{,}5\cdot10^{-3}$	$1{,}1\cdot10^{-1}$	$3{,}2\cdot10^{-4}$	$3{,}5\cdot10^{-4}$
14	$3{,}4\cdot10^{-3}$	$9{,}4\cdot10^{-1}$	$3{,}0\cdot10^{-4}$	$3{,}6\cdot10^{-4}$

Ориентация базиса E относительно I при $t_0=0$ задавалась кватернионом $\Lambda=0{,}64+$ $+0{,}48\mathbf{i}_1+0{,}36\mathbf{i}_2-0{,}48\mathbf{i}_3$. Параметрами ориентации базиса J относительно базиса I служили углы рыскания, тангажа и крена (φ_1, φ_2, φ_3 соответственно) с начальными значениями $\varphi_1(0)=0{,}5$, $\varphi_2(0)=0{,}1$, $\varphi_3(0)=0{,}05$. Вектор ω_E формировался в виде: $\omega_E=$ $=[\omega_1,\ \omega_2+\omega^0\sin\nu t,\ \omega_3+\omega^0\cos\nu t]^T$, $\omega^0=0{,}12$ с$^{-1}$, $\nu=6$ с$^{-1}$. Значения ω_1, ω_2, ω_3 (в с$^{-1}$) и t (в секундах) даны в табл. 2. Сигналы (3.1) имитировались с тактом $h=0{,}01$ с, причем элементы $\delta\theta_i$ задавались как значения нормально распределенной случайной величины с нулевым математическим ожиданием и стандартным отклонением $5\cdot10^{-7}$. Уравнения (3.5) относительно элементов векторов γ_0, $\mathbf{d}$ и матрицы P, полученные с помощью соответствующих выражений (3.6), формировались с интервалом 0,2 с на промежутке 0,2 с$\leqslant t\leqslant$14 с и преобразовались в систему нормальных уравнений метода наименьших квадратов. Эта система решалась методом Гаусса, причем решение сопровождалось анализом наблюдаемости, как указано в [5]. Не приводя полностью результаты анализа, отметим лишь, что при $t=14$ с размерность подпространства R^* оказалась равной 4, все показатели (1.6) не малы, т. е. все оцениваемые координаты слабо наблюдаемы, а показатели (1.7), характеризующие наблюдаемость величин $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$, $\gamma_3(t)$, равны соответственно 0,17; 0,36; 0,26, т. е. эти величины также слабо наблюдаемы.

Коррекция с использованием найденных оценок $\gamma(t)$ выполнялась как вычисление уточненных параметров ориентации без вмешательства в процесс интегрирования кинематических уравнений. В столбце I табл. 3 приведены истинные значения $\|\gamma\|$ до коррекции, а в столбце II – после коррекции при значениях t, указанных в секундах.

В упрощенном варианте оценки определялись только векторы γ_0, $\mathbf{d}$ путем решения системы 6 нормальных уравнений, полученной в результате «усечения» исходной системы уравнений относительно γ_0, $\mathbf{d}$, P. В этой неадекватной модели все 6 оцениваемых элементов хорошо наблюдаемы. Полученные после коррекции значения $\|\gamma\|$ представлены в столбце III табл. 3.

Наконец, в еще одной неадекватной модели вектор γ оценивался как постоянный. Соответствующие значения $\|\gamma\|$ после коррекции приведены в столбце IV табл. 3. В данном примере коррекция с использованием адекватной модели не улучшает точность определения ориентации объекта, использование же неадекватных моделей повышает эту точность на порядок при значительно меньших вычислительных затратах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Парусников Н. А.* Некоторые задачи определения ориентации приборных трехгранников // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 6. С. 27–35.
2. *Bar-Itzhack I. Y., Serfaty D., Vitek Y.* Doppler-aided low-accuracy strapdown inertial navigation system // J. Guidance, Control and Dynamics. 1982. V. 5. № 3. P. 236–242.
3. *Розенвассер Е. Н., Юсупов Р. М.* Чувствительность систем управления. М.: Наука, 1981. 464 с.
4. *Парусников Н. А., Каленова В. И., Морозов В. М., Шакотько А. Г.* О мере наблюдаемости // Некоторые вопросы навигации и управления. М.: Изд-во МГУ, 1980. С. 29–37.
5. *Ткаченко А. И.* К оценке состояния и анализу наблюдаемости линейных нестационарных систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 3. С. 17–22.
6. *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1963. 734 с.

7. *Андреев В. Д.* Теория инерциальной навигации. Автономные системы. М.: Наука, 1966. 579 с.
8. *Ткаченко А. И.* Определение ориентации и калибровка пространственного измерителя угловой скорости с использованием угловой информации // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 3. С. 19–23.
9. *Ткаченко А. И.* Вычисление кватернионов в задачах определения ориентации // Кибернетика и вычислительная техника. Киев.: Наук. думка, 1974. Вып. 23. С. 116–122.
10. *Панов А. П.* Синтез методов вычислений координат вектора ориентации // Кибернетика и вычислительная техника. Киев: Наук. думка. 1979. Вып. 43. С. 122–130.

Киев

Поступила в редакцию
15.V.1988