МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1990

УДК 539.3:534.1

О. В. КУЗНЕЦОВ

ОБ АНАЛИЗЕ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ, ПОДКРЕПЛЕННЫХ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ

Рассмотрены вопросы построения математических моделей для расчета свободных колебаний оболочек, подкрепленных продольными и поперечными ребрами жесткости. Асимптотический анализ уравнений движения позволил выделить однородные виды колебаний. Проведена оценка условий взаимодействия оболочечной панели со шпангоутом и стрингером. Показано, что в зависимости от геометрических размеров ребра на частотной оси можно выделить зоны, в которых ребра развязывают конструкцию на отдельные панели. Совместные колебания оболочки с ребрами осуществляются лишь при колебаниях с малым волнообразованием. Рассмотрена возможность замены оболочки, подкрепленной стрингерами, конструктивно ортотропной оболочкой.

1. Предельные системы уравнений колебаний. В [1] обоснован метод расчета свободных колебаний оболочек, подкрепленных шпангоутами, основанный на декомпозиции конструкции. Исходные колебания расчленялись на однородные виды движений, описываемые предельными уравнениями более низкого порядка, и было показано, что в ряде случаев спектр задачи образовывался из суммы независимых спектров заключенных между шпангоутами обечаек. Такой подход, основанный на предварительном качественном анализе уравнений, резко понижает степень сложности задачи исследования частотного спектра. Добавляя к этому решению решение дополнительной краевой задачи [2], можно также построить точную форму колеблющегося тела.

Рассмотрим задачу о колебаниях цилиндрической оболочки, подкрепленной системой продольных и поперечных ребер жесткости. Подкрепленную оболочку представим в виде набора панелей, соединенных через ребра.

Колебания панели подчиняются уравнению моментной теории оболочек для разрешающей функции Φ:

$$\nabla^8\Phi+\left(2+\frac{3-\nu}{1-\nu}\Omega^4\right)\nabla^6\Phi+\left(1+2\frac{3-\nu}{1-\nu}\Omega^4+\frac{2}{1-\nu}\Omega^8\right)\nabla^4\Phi-$$
$$-\left[2(1-\nu)\left(\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4}-\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}\right)+\frac{3-5\nu}{1-\nu}\Omega^4\right]\nabla^2\Phi+\Omega^4\left[2(3-\nu)+\frac{4}{1-\nu}\Omega^4\right]\frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta^2}+$$
$$+\frac{2}{1-\nu}\Omega^8\Phi+\frac{\Omega^4}{c^2}\left[\frac{1-\nu^2}{\Omega^4}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^4}-\nabla^4\Phi+\left(3+2\nu-\frac{3-\nu}{1-\nu}\Omega^4\right)\nabla^2\Phi-\right.\tag{1.1}$$
$$\left.-2(1+\nu)\frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta^2}+\frac{2}{1-\nu}\Omega^4(1-\Omega^4)\Phi\right]=0$$

где α,β — криволинейные координаты, ρ_0 — плотность, $\Omega^4=\rho_0R^2(1-\nu^2)\omega^2/E$ — безразмерная частота, ω — круговая частота, h, R — толщина и радиус оболочки, E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала, $\rho=(\Omega^4/c^2)^{1/4}$ — большой параметр.

В уравнении (1.1) использовано обозначение $c^2=h^2/(12R^2)$. Для построения предельных систем уравнений заменим независимые переменные в уравнении (1.1) по формулам $\xi=\rho^a\alpha$, $\eta=\rho^b\beta$ (a, b — константы). Если изменяемость формы колебаний в обоих направлениях одинакова, т. е. $a\approx b$ имеем два уравнения

$$\nabla^8\Phi+\rho^4\left\{\left[\left(\frac{1-\nu^2}{\Omega^4}-1\right)+\rho^{-4}\left(1+\frac{4\nu}{1-\nu}\Omega^4+\frac{2}{1-\nu}\Omega^8\right)\right]\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^4}-\right.$$
$$\left.-2\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^2\,\partial\beta^2}-\frac{\partial^4\Phi}{\partial\beta^4}\right\}=0 \qquad (1.2)$$

$$\left[\left(\frac{1-\nu^2}{\Omega^4}-1\right)+\rho^{-4}\left(1+\frac{4\nu}{1-\nu}\Omega^4+\frac{2}{1-\nu}\Omega^8\right)\right]\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^4}-2\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^2\,\partial\beta^2}-\frac{\partial^4\Phi}{\partial\beta^4}+$$
$$+\left(3+2\nu-\frac{3-\nu}{1-\nu}\Omega^4\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2}+\left(1-\frac{3-\nu}{1-\nu}\Omega^4\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta^2}+\frac{2}{1-\nu}\Omega^4(1-\Omega^4)\,\Phi=0 \qquad (1.3)$$

Уравнение (1.2) описывает колебания с большой изменяемостью в обоих направлениях, уравнение (1.3) соответствует колебаниям безмоментного типа. Соответственно упрощаются граничные условия: на решение уравнения (1.2) налагаются ограничения на нетангенциальные компоненты перемещений и усилий, для уравнения (1.3) — на тангенциальные компоненты.

В случае, когда изменяемость вдоль оси α меньше, чем вдоль оси β, т. е. $a\leqslant b-1$, предельная система состоит из трех уравнений, одно из которых совпадает с уравнением (1.3), а два других описывают колебания с большой изменяемостью и полубезмоментные соответственно:

$$\partial^8\Phi/\partial\beta^8-\rho^4\partial^4\Phi/\partial\beta^4=0 \qquad (1.4)$$

$$\partial^8\Phi/\partial\beta^8-\rho^4(\partial^4\Phi/\partial\beta^4-(1-\nu^2)\,\Phi^{-4}\partial^4\Phi/\partial\alpha^4)=0 \qquad (1.5)$$

Полубезмоментные колебания существуют в зоне относительно малых значений частоты. Анализ асимптотических порядков слагаемых, входящих в уравнение (1.1), позволяет вывести неравенство, ограничивающее зону существования полубезмоментных колебаний:

$$\Omega^4\leqslant(1-\nu^2)^{1/(b-a+3/4)}\,(c^2)^{(b-a-1/4)/(b-a+3/4)} \qquad (1.6)$$

Для этого вида колебаний приближенно можно принять: $a\approx0$, $b\approx\approx0{,}5\div1$. Подстановкой $\Phi(\alpha,\beta)=F_1(\alpha)F_2(\beta)$ уравнение (1.5) может быть заменено двумя уравнениями для каждой из функций F_i. Вид решений этих уравнений позволяет удовлетворить асимптотическим граничным условиям главной краевой задачи на всех четырех краях панели.

Случай $b\leqslant a-1$ рассмотрен в [3]. Для колебаний с большой изменяемостью, необходимых для описания краевых эффектов у края $\alpha=\mathrm{const}$, имеем уравнение

$$\partial^8\Phi/\partial\alpha^8+\rho^4[(1-\nu^2)/\Omega^4-1]\,\partial^4\Phi/\partial\alpha^4=0 \qquad (1.7)$$

Рассмотрим более подробно какого вида граничные условия должны быть наложены на решение главной краевой задачи, подчиняющейся уравнению (1.5). В этом случае дополнительная краевая задача описывается уравнением (1.7). Анализ порядков слагаемых, входящих в эти уравнения, позволяет записать в зоне краевого эффекта соотношение $a\approx\approx 2b$. При некоторых сочетаниях однородных условий на краю $\alpha=\mathrm{const}$ в случае, если налагаются ограничения на w и сдвигающую силу S, граничные условия становятся смешанными: одно из условий для главной краевой задачи должно быть $w=0$. Запишем асимптотические оценки перемещений при полубезмоментных колебаниях

$$v=-\partial^3\Phi/\partial\beta^4=-F_1d^3F_2/d\beta^3,\quad w=\partial^4\Phi/\partial\beta^4=F_1d^4F_2/d\beta^4$$

Таким образом равенство нулю перемещения w на границе влечет за собой равенство нулю на этой же границе перемещения v и для решения главной краевой задачи можно сохранить только тангенциальные граничные условия также и в случае полубезмоментных колебаний. Главная краевая задача позволяет рассчитать частотный спектр. Для построения формы колеблющейся панели появляющиеся на границах невязки устраняются путем наложения при найденном значении частоты решений дополнительных краевых задач.

2. Колебания оребренной панели. Рассмотрим теперь взаимодействие панели с ребрами жесткости. Поведение ребра будем считать подчиняющимся обычным уравнениям стержней, для простоты пренебрежем влиянием эксцентриситета. Взаимодействие оболочки с шпангоутом рассмотрено в [3], ниже оценим влияние на колебания оболочки подкрепляющих стрингеров. Совместность колебаний панели и стержня обеспечивается выполнением следующих условий на краю оболочки $\beta=\mathrm{const}$:

$$u=u_c,\ \ v=v_c,\ \ w=w_c,\ \ R^{-1}(\partial w\partial\beta+v)=\theta_k$$

$$p_1+S=0,\ \ (p_2-R^{-1}dm_2/d\alpha)+N_2=0$$

$$(q-R^{-1}dm_1/d\alpha)+Q_2'=0,\ \ m_k+M_2=0$$

где θ_k — угол кручения стрингера, p_1, p_2, q — продольная и поперечные в плоскости и из плоскости компоненты внешней нагрузки на стрингер, m_1, m_2, m_k — изгибающие и крутящий внешние моменты.

Оценим порядок слагаемых, входящих в эти условия. Раскрывая величины, условие $p_1+S=0$ можно представить в развернутом виде

$$\frac{F_c}{Rh}\left[\nu\rho^{5a}\frac{\partial^5\Phi}{\partial\xi^5}-\rho^{3a+2b}\frac{\partial^5\Phi}{\partial\xi^3\,\partial\eta^2}+\rho^{3a}\frac{2\nu}{1-\nu}\Omega^4\left(1+\frac{2}{1-\nu}\frac{\rho_c}{\rho_0}\right)\frac{\partial^3\Phi}{\partial\xi^3}-\right.$$

$$\left.-\rho^{a+2b}\frac{\rho_c}{\rho_0}\frac{\Omega^4}{1-\nu^2}\frac{\partial^3\Phi}{\partial\xi\,\partial\eta^2}+\rho^a\frac{2\nu\Omega^3}{(1+\nu)(1-\nu^2)}\frac{\rho_c}{\rho_0}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right]+$$

$$+\rho^{3a+b}\frac{\partial^4\Phi}{\partial\xi^3\,\partial\eta}+\rho^{a+b}\frac{\Omega^4}{1-\nu}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\,\partial\eta}=0$$

Слагаемые в квадратной скобке учитывают вклад стрингера, остальные — оболочки. Обозначим $\rho^y=F_c/(Rh)$, где F_c — площадь стрингера. Оценка порядков слагаемых в условии $p_1+S=0$ может быть произведена на основе сравнения порядков заключенных в скобки величин: $(\rho^{5a+y}$, $\rho^{3a+2b+y})$, (ρ^{3a+b}). Если порядки слагаемых равны, то оболочка и стрингер колеблются совместно. Если порядок первого слагаемого больше или меньше порядка второго, то стрингер развязывает конструкцию на отдельные панели, жестко защемленные по краю $\beta=\mathrm{const}$ или соответственно его влиянием на поведение оболочки можно пренебречь. В зоне безмоментных колебаний $a\approx b\approx 0$ и совместные колебания осуществляются при $y\approx 0$, т. е. $F_c=Rh$. Развязка возникает при $y\geqslant 1$, а при $y\leqslant -1$ стрингером можно пренебречь. При полубезмоментных колебаниях $a\approx 0$, $b\approx 1$ и влияние стрингера увеличивается. Развязка колебаний обеспечивается при выполнении условия $y\geqslant 1-b$, при $y\approx -b$ колебания совместны и при $y\leqslant$ $\leqslant -(b+1)$ влиянием стрингера можно пренебречь.

Аналогично для условия $(p^2-R^{-1}dm_2/d\alpha)+N_2=0$ характер взаимодействия оболочки и стрингера будет зависеть от соотношения порядков следующих величин $(\rho^{3b+x}$, $c^2\rho^{4+3b+y})$, $(c^2\rho^{4+2b})$. Здесь использовано обозначение $\rho^x=J_2/(R^3h)$, J_2 — момент инерции сечения стрингера.

Совместные колебания стрингера и оболочки осуществляются при выполнении условий: $y=-b$, $x=4-b+g$, где $g=\ln c^2/\ln\rho$. Если $x\leqslant 3-b+g$ и $y\leqslant -(b+1)$, стрингером можно пренебречь. Если же выполняется хотя бы одно из условий $x\geqslant 5-b+g$ или $y\geqslant 1-b$, то стрингер развязывает оболочку на панели. Приведенные соотношения позволяют заранее, до решения задачи, выделить на частотной оси зоны, для которых характерен тот или иной механизм взаимодействия со стрингером.

Проводя такой же анализ для нетангенциальных граничных условий, порядок слагаемых, входящих в выражение $(q-R^{-1}dm_1/d\alpha)+Q_2'=0$, оценим по соотношению величин $(\rho^{4b+x}, c^2\rho^{4b+4+y})$, $(c^2\rho^{7b})$. Здесь принято допущение, что J_1 и J_2 примерно равны между собой. Стрингер развязывает конструкцию на отдельные панели, если выполняется одно из неравенств $x\geqslant 3b+1+g$, $y\geqslant 3b-3$. Если $x\leqslant 3b-1+g$ и $y\leqslant 3b-5$, стрингером можно пренебречь. Если же $x\sim 3b+g$, $y\approx 3b-4$, то колебания совместны. Причем этот вывод не изменится, если одно из условий будет соответствовать предыдущему случаю.

И, наконец, для последнего условия $m_k+M_2=0$ порядок слагаемых оценивается соотношением $(\rho^x, c^2\rho^{4+x})$, $(c^2\rho^b)$. Совместные колебания осуществляются, если $x\approx b+g$. Развязка колебаний или возможность пренебрежения стрингером определяется неравенствами соответственно: $x\geqslant b+1+g$, $x\leqslant b-1+g$.

Выводы по условиям взаимодействия оболочки со шпангоутом получены в [1]. Их можно представить в аналогичном виде. В этом случае существуют два вида колебаний: безмоментные (полубезмоментные), для которых $a\approx 0$ и колебания с большой изменяемостью вдоль продольной оси, $a\approx 1$. Соответственно этому различаются и условия, определяющие совместность колебаний оболочки с шпангоутом. Для первого случая на границе оболочки должны удовлетворяться два условия $N_1+p_2=0$, $S+p_1=0$.

В случае, если выполняется одно из неравенств $x\geqslant 1+a-4b$ или $y\geqslant 1-a$, первое условие может быть заменено выражением $u=0$. Аналогично, если $x\geqslant 3(a-2b)+1$ или $y\geqslant 3a-4b+1$, то и второе условие заменяется на $v=0$. Если одновременно выполняются неравенства $x\leqslant a-4b-1$, $y\leqslant -(1+a)$ и $x\leqslant 3(a-2b)-1$, $y\leqslant 3a-4b-1$, то влиянием шпангоута можно пренебречь и при расчетах его не учитывать. В остальных случаях динамику конструкции следует рассчитывать по модели оребренной оболочки.

При $a\approx 1$ развязка колебаний осуществляется при одновременном выполнении условий $z+s\geqslant a-2b+1$ и $z\geqslant 3a-4b+1$ или $y\geqslant 3a-3$. В случае, если $z+s\leqslant a-2b+1$ и $z\leqslant 3a-4b-1$, $y\leqslant 3a-5$, наличие шпангоута не оказывает влияния на поведение оболочки. Оребренная конструкция как единое целое колеблется при приближенном выполнении соотношений $z+s\approx a-2b$ и $z\approx 3a-4b$, $y\approx 3a-4$. Здесь N_1, S — нормальное и касательное усилия в оболочке, M_1, Q_1' — изгибающий момент и обобщенная перерезывающая сила, p_2, p_1, m_k, Q' — соответствующие внешние нагрузки на шпангоут

$$\rho^z=J_i/(R^2h^2)(12R/h),\quad \rho^1=J_k/J_2$$

$$\rho^y=F/(Rh),\quad \rho^x=J_i/(R^2h^2)(h/R)$$

3. Пример анализа конструкции. Решение задачи с использованием метода декомпозиции проводится в следующем порядке. На первом этапе, используя неравенство (1.6), на частотной оси выделяется зона существования колебаний полубезмоментного типа и с большой изменяемостью формы в направлении оси α. Затем последовательно решаются главные краевые задачи, описываемые уравнениями (1.3), (1.5), (1.4), (1.7), (1.2). Переход от одной задачи к другой осуществляется по достижении соответствующей частоты. Для каждого вида колебаний характерен свой механизм взаимодействия оболочки с ребром.

При взаимодействии со стрингером в зоне безмоментных колебаний необходимо ставить ограничения только на тангенциальные компоненты силовых факторов, в зоне колебаний с большой изменяемостью вдоль оси β – на нетангенциальные. Полубезмоментные колебания в этом случае являются переходными, здесь возможно лишь упрощение отдельных условий. Возникающие на границах невязки устраняются с помощью решений дополнительных краевых задач при найденном из главной задачи значении частоты и соответствующих граничных условиях.

В качестве примера рассмотрим цилиндрическую оболочку, геометрические размеры которой соответствуют величине $h/R=0{,}00335$. Оценка по неравенству (1.6) показывает, что полубезмоментные колебания существуют при $\Omega^4\leqslant 0{,}00142$, здесь приближенно выполняются для основного деформированного состояния условия $a\approx 0$, $b=0{,}5\div 1$. Выше этого значения частоты существуют резонансные безмоментные колебания ($a\approx 0$, $b\approx 0$) и колебания с большой изменяемостью ($a\approx 0$, $b\approx 1$). При $\Omega^4>1-\nu^2$ к этим колебаниям добавляются колебания, соответствующие большой изменяемости в направлении оси α ($a\approx 1$, $b\approx 0$) или в обоих направлениях ($a\approx 1$, $b\approx 1$).

Допустим, что размеры ребер жесткости соответствуют значениям $\tau_i/(R^3h)=5\cdot 10^{-4}$, $\rho_cF/(\rho_0Rh)=0{,}5$.

Анализ граничных условий позволяет разбить частотную ось на зоны, для каждой из которых характерен свой механизм взаимодействия с ребрами жесткости: 1) $\Omega^4>0{,}00142$, $a\approx b\approx 0$ – оболочка, подкрепленная системой продольных и поперечных ребер, колеблется как единая конструкция; 2) $\Omega^4>0{,}00142$, $a\approx 0$, $b\approx 1$ – оболочка при расчете частотного спектра может быть заменена жестко защемленными по краям β_i панелями, подкрепленными поперечными ребрами; 3) $\Omega^4>1-\nu^2$, $a\approx 1$, $b\approx 0$ – оболочка может быть заменена отдельными подкрепленными стрингерами обечайками, жестко защемленными в местах соединения с шпангоутом; 4) $\Omega^4>1-\nu^2$, $a\approx 1$, $b\approx 1$ – оболочка распадается на отдельные панели; 5) $\Omega^4\leqslant 0{,}00142$ – оболочка колеблется как единая конструкция, однако возможно некоторое упрощение условий взаимодействия по стрингерам. В частности условие $m_k+M_2=0$ может быть заменено ограничением $\theta_k=\partial w/\partial\beta+v=0$.

В случаях 2)–4) существует еще один спектр, определяемый колебаниями соответствующих ребер.

Решение для полубезмоментных колебаний в рамках сделанных здесь допущений в ряде случаев может быть получено аналитически. При большой изменяемости в каком-либо направлении частотный спектр слабо зависит от вида граничных условий на соответствующем краю и при приближенных вычислениях частотного спектра можно провести разделение переменных, задав решение с помощью тригонометрических функций по соответствующей переменной. Такое упрощение позволит получить приближенное аналитическое решение для случаев 2)–4). Спектр безмоментных колебаний необходимо рассчитывать численными методами.

При необходимости нахождения формы колеблющейся оболочки необходимо на полученное выше решение наложить решение дополнительной краевой задачи, при найденном значении частоты. При этом для случая 1) невязка у края $\beta=\mathrm{const}$ устраняется с помощью решения уравнения (1.4), у края $\alpha=\mathrm{const}$ – аналогичного ему уравнения (1.7). В углах панели для коррекции формы колебаний используется уравнение (1.2). Для случаев 2), 3) невязки существуют соответственно у краев $\alpha=\mathrm{const}$ или $\beta=\mathrm{const}$. При устранении невязок в ряде случаев придется учитывать всю оболочку, тем не менее выигрыш от применения такого подхода для расчетов, как по уменьшению времени вычислений, так и по увеличению точности, существен.

В приближенных вычислениях часто используют прием замены дискретно расположенных стрингеров моделью конструктивно-ортотропной оболочки. Из сказанного выше ясно, что даже для решения главной краевой задачи такая замена возможна строго говоря только в зоне колебаний с малым волнообразованием по β. Учет стрингера в этом случае производится путем перехода к оболочке приведенной толщины $h^*=h+F_c/(R\beta_1)$, β_1 – угловое расстояние между стрингерами. Потребуем, чтобы на краю оболочки выполнялись условия

$$S^*=S+p_1,\quad N_2^*=N_2+p_2-R^{-1}dm_2/d\alpha$$

где S^*, N_2^* – усилия в конструктивно-ортотропной оболочке.

Переход к конструктивно-ортотропной модели возможен при равенстве порядков слагаемых, входящих в правую и левую части приведенных выражений. Применив к исследованию порядков описанную выше процедуру, запишем условие замены оболочки с дискретно расположенными стрингерами конструктивно-ортотропной оболочкой в виде $\beta_1\leqslant\rho^{-b}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кузнецов О. В.* Модели для расчета частотного спектра неоднородных оболочечных конструкций // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 3. С. 185–189.
2. *Гольденвейзер А. Л.* О вынужденных гармонических колебаниях оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 168–177.
3. *Кузнецов О. В.* Модели для анализа резонансных колебаний неоднородных оболочечных конструкций // Динамика и вибродиагностика механических систем. Иваново: Изд-е Иванов. ун-та, 1983. С. 77–86.

Москва

Поступила в редакцию 7.XII.1988