

УДК 539.3:539.377

© 1990 г.

А. С. ГОЛЬЦЕВ, В. П. ШЕВЧЕНКО

## ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ И ТЕРМОУПРУГОСТЬ ОБОЛОЧЕК С ТЕПЛОПРОВОДЯЩИМ РАЗРЕЗОМ

Разработан метод решения задач теплопроводности и термоупругости тонких изотропных оболочек произвольной гауссовой кривизны, содержащих произвольно ориентированный теплопроводящий разрез. Используются метод граничных интегральных уравнений, теория обобщенных функций и двумерное преобразование Фурье. Исследована зависимость скачков температуры, коэффициентов интенсивности усилий и моментов от теплофизических свойств разреза. По результатам численных расчетов сделан обобщающий вывод об использовании теплофизических моделей трещин в задачах механики разрушения оболочечных конструкций.

**1. Постановка задачи.** При решении задач термоупругости для упругой плоскости с разрезом рассмотрены различные варианты граничных условий, в частности: теплоизолированный, теплопроницаемый, теплопроводящий разрезы [1]. В теории термоупругости оболочек, как правило, рассматриваются лишь два первых [2-5].

В связи с этим представляет интерес рассмотреть решение задачи теплопроводности и термоупругости изотропных оболочек произвольной гауссовой кривизны, содержащих произвольно ориентированный теплопроводящий разрез с учетом на боковых поверхностях оболочек теплообмена с внешней средой по закону Ньютона.

Постановка задач теплопроводности и термоупругости оболочек с теплопроводящим разрезом отличается от случаев других типов разрезов лишь граничными условиями в задаче теплопроводности. Они выводятся так же, как и для теплопроницаемого разреза [5] и имеют вид

$$\lambda_s \frac{\partial^2}{\partial s^2} (T_i^+ + T_i^-) + 2\lambda_0 \left\{ \left( \frac{\partial T_i}{\partial n} \right)^+ - \left( \frac{\partial T_i}{\partial n} \right)^- \right\} = 0$$
$$\lambda_s \frac{\partial^2}{\partial s^2} (T_i^+ - T_i^-) + 6\lambda_0 \left\{ \left( \frac{\partial T_i}{\partial n} \right)^+ + \left( \frac{\partial T_i}{\partial n} \right)^- \right\} - 12\lambda_n (T_i^+ - T_i^-) = 0 \quad (i=1, 2)$$

где  $\lambda_s$ ,  $\lambda_n$  — коэффициенты теплопроводности и теплопроницаемости разреза [1], характеризующие его тепловые свойства в продольном и поперечном направлениях, соответственно;  $\lambda_0$  — коэффициент теплопроводности материала оболочки;  $T_1$ ,  $T_2$  — интегральные характеристики температуры;  $s$  — координата точки срединной поверхности, принадлежащая линии разреза  $L$ ;  $n$  — внешняя нормаль к  $L$ ; знаками плюс и минус обозначены предельные значения функций справа и слева от  $L$ . Коэффициенты  $\lambda_s$  и  $\lambda_n$  определяются через теплопроводность материала промежуточного слоя  $\lambda_c$  и раскрытие разреза  $\delta$  по формулам [1]:

$$\lambda_s = \lambda_c \delta, \quad \lambda_n = \lambda_c / \delta$$

**2. Метод решения.** Для решения поставленных задач используем методику, применявшуюся ранее при рассмотрении более простых типов разрезов [4, 5].

Интегральные представления компонент температурного поля запишем для случая, когда разрез расположен вдоль координатной оси  $x_1$ . Частный

случай ориентации разреза не ограничивает общности постановки задачи, поскольку вид уравнений теплопроводности [6] не изменяется в сопряженной системе координат. Имеем следующие выражения:

$$T_k(x_1, x_2) = T_k^0(x_1, x_2) + \int_L \{A_{kj}(x_1, x_2, s)\psi_j(s) + B_{ki}(x_1, x_2, s)\chi_i(s)\} ds$$

$$(k, j=1, 2; i=3, 4) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial T_k(x_1, x_2)}{\partial x_m} = \frac{\partial T_k^0(x_1, x_2)}{\partial x_m} + \int_L \{A_{kmj}^1(x_1, x_2, s)\Psi_j(s) + B_{kmi}^1(x_1, x_2, s)\psi_i(s)\} ds$$

$$(k, m, j=1, 2; i=3, 4) \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial^2 T_k(x_1, x_2)}{\partial x_m^2} = \frac{\partial^2 T_k^0(x_1, x_2)}{\partial x_m^2} + \int_L B_{kmi}^2(x_1, x_2, s)\Psi_i(s) ds \quad (k, m=1, 2; i=3, 4) \quad (2.3)$$

Здесь  $A_{kj}$ ,  $B_{ki}$ ,  $A_{kmj}^1$ ,  $B_{kmi}^1$ ,  $B_{kmi}^2$  — ядра интегральных представлений. Неизвестные функции имеют вид

$$\psi_1 = [T_1], \quad \psi_2 = [T_2], \quad \psi_3 = [\partial T_1 / \partial n], \quad \psi_4 = [\partial T_2 / \partial n]$$

$$\Psi_j = \frac{d}{ds} \psi_j \quad (j=1, \dots, 4), \quad \chi_i = \int \psi_i ds \quad (i=3, 4)$$

где введено обозначение  $[f] = f^+ - f^-$  — скачок функции  $f$  при переходе через линию разреза  $L$ .

Первые слагаемые в (2.1) — (2.3) соответствуют компонентам основного температурного поля, а интегральные члены — компонентам возмущенного температурного поля. Интегральные представления (2.3) записаны лишь для тех составляющих температурного поля, которые не равны нулю на оси расположения разреза и необходимы для составления граничных интегральных уравнений. Следует заметить, что интегральные представления (2.3) для точек, не лежащих на оси расположения разреза, получить нельзя, поскольку тепловые потоки, обусловленные скачками  $[T_k]$  ( $k=1, 2$ ), в окрестности концов разреза обладают особенностью типа  $r^{-1/2}$ .

Интегральные представления для внутренних силовых факторов  $P_k$  запишем следующим образом:

$$P_k(x_1, x_2) = P_k^0(x_1, x_2) + \int_L G_{kj}(x_1, x_2, s)\psi_j(s) ds \quad (k, j=1, \dots, 8) \quad (2.4)$$

Здесь  $P_k^0$  — внутренние силовые факторы основного термоупругого состояния;  $G_{kj}$  — ядра интегральных представлений;  $\psi_j$  ( $j=5, \dots, 8$ ) — неизвестные функции, выражающиеся через скачки перемещений  $u_i$  ( $i=1, \dots, 3$ ) и углов поворота по формулам

$$\psi_5 = d[u_1]/ds + k_1 n_2 [u_3], \quad \psi_7 = \frac{d}{ds} [\partial u_3 / \partial x_1]$$

$$\psi_6 = d[u_2]/ds - k_2 n_1 [u_3], \quad \psi_8 = \frac{d}{ds} [\partial u_3 / \partial x_2]$$

где  $k_i$ ,  $n_i$  ( $i=1, 2$ ) — главные кривизны и направляющие косинусы нормали к линии разреза.

Разрешая системы сингулярных интегральных уравнений (СИУ) получим с использованием интегральных представлений (2.2) — (2.4) и граничных условий задачи теплопроводности (1.1) и задачи термоупругости [4, 5].

Задача теплопроводности сводится к двум независимым системам СИУ относительно неизвестных функций  $\Psi_j$  ( $j=1, \dots, 4$ ). С помощью первой системы, имеющей вид

$$\frac{\Psi_{k+2}\lambda_0}{\lambda_s} + \int_{s_1}^{s_2} B_{k1i}^2 \Psi_i dL = - \frac{\partial^2 T_k^0}{\partial x_i^2} \quad (k=1, 2; i=3, 4) \quad (2.5)$$

определяются скачки тепловых потоков на линии разреза.

Решение системы (2.5) проводится с учетом непрерывности тепловых потоков на концах разреза  $s_1, s_2$  и условий существования интегральных представлений (2.1):

$$\psi_i(s_1) = \psi_i(s_2) = \chi_i(s_1) = \chi_i(s_2) = 0 \quad (i=3, 4) \quad (2.6)$$

в классе функций, неограниченных на концах разреза.

Вторая система СИУ служит для определения скачков температуры. С учетом того, что на линии разреза ядра  $E_{k2i}^1 = 0$ , она записывается следующим образом:

$$\lambda_s \frac{d}{ds} \frac{\Psi_k}{12\lambda_0} - \frac{\lambda_n \Psi_k}{\lambda_0} + \int_{s_1}^{s_2} A_{k2j}^1 \Psi_j dL = - \frac{\partial T_k^0}{\partial x_2} \quad (k, j=1, 2) \quad (2.7)$$

Решение системы (2.7) строится с учетом непрерывности температуры на концах разреза

$$\psi_j(s_1) = \psi_j(s_2) = 0 \quad (j=1, 2) \quad (2.8)$$

Решить систему (2.7), (2.8) в классе неограниченных функций невозможно из-за наличия сингулярной особенности в первом члене. Для пластин с теплопроводящим разрезом ее решение искалось в классе ограниченных функций при определенном смыкании берегов разреза [4]. Однако решение системы (2.7), (2.8) более предпочтительно строить в классе неограниченных функций, поскольку для частных случаев этих уравнений (теплопроницаемый и теплоизолированный разрезы) имеется решение в классе неограниченных функций [1-5]. С этой целью необходимо пойти на упрощение уравнений (2.7) без ущерба точности решения поставленной задачи.

Учитывая методику вывода общих условий сопряжения через тонкий промежуточный слой [7], на основе которых получены граничные условия (1.1), можно заключить, что первый член во втором уравнении (1.1) имеет наивысший порядок малости (для этого необходимо все члены граничных условий (1.1) привести к степеням малого параметра  $\delta$ ). Таким образом, если пренебречь величинами высших порядков малости по сравнению с  $\delta$ , то первый член в системе (2.7) можно опустить.

Такой подход аналогичен методике решения задачи теплопроводности пластинки с тонким включением [8], где получены сходные СИУ.

Задача термоупругости сводится к системе четырех СИУ относительно неизвестных функций  $\psi_i$  ( $i=5, \dots, 8$ ):

$$\int_{s_1}^{s_2} G_{ki}^* \psi_i dL = -P_k^{0*} - \int_{s_1}^{s_2} G_{kj}^* \psi_j dL \quad (k, j=1, \dots, 4; i=5, \dots, 8) \quad (2.9)$$

где величины со звездочкой взяты в системе координат, связанной с граничным контуром. При этом должны выполняться условия непрерывности перемещений и углов поворота на концах разреза [5].

Интегральные члены в правых частях системы (2.9) соответствуют внутренним силовым факторам, обусловленным возмущенным температурным полем, которые определяются после решения задачи теплопроводности. Решение системы (2.9) ищем в классе функций, неограниченных на концах разреза.

После решения разрешающих систем СИУ с помощью интегральных представлений (2.1), (2.4) находим компоненты термоупругого состояния в любой точке оболочки, а также коэффициенты интенсивности усилий и моментов.

В соответствии со структурой правых частей системы (2.9) возмущенное термоупругое состояние можно разбить на две составляющие. Первая обусловлена силовыми компонентами основного термоупругого состояния, а вторая возмущенным температурным полем. В частности, коэффициенты интенсивности усилий и моментов  $K_i$  ( $i=1, \dots, 4$ ) можно представить в виде суммы  $K_i = K_i^s + K_i^t$ . Здесь  $K_i^s, K_i^t$  — коэффициенты интенсивности, обусловленные, соответственно, первой и второй составляющей возмущенного состояния.

Поскольку силовые задачи для оболочек с разрезами изучены достаточно хорошо [2, 3] при решении задачи термоупругости будем исследовать величины  $K_i^t$  ( $i=1, \dots, 4$ ), а под возмущенным состоянием понимать его вторую составляющую.

**3. Задача теплопроводности.** Пусть оболочка ослаблена разрезом длиной  $2l$ . Разрешающие системы СИУ этой задачи имеют вид:

$$\frac{\Psi_{k+2}(x_0)}{\beta_s} + \int_{-1}^1 L_{kj}(x-x_0) \Psi_{j+2}(x) dx = X_k(x_0) \quad (|x_0| < 1; k, j=1, 2) \quad (3.1)$$

$$\Psi_k(x_0) \beta_n + \int_{-1}^1 K_{kj}(x-x_0) \Psi_j(x) dx = Z_k(x_0) \quad (|x_0| < 1; k, j=1, 2) \quad (3.2)$$

$$\beta_s = \lambda_s / l \lambda_0, \quad \beta_n = l \lambda_n / \lambda_0$$

$$X_k = -l^2 \partial^2 T_k^0 / \partial x_1^2, \quad Z_k = l \partial T_k^0 / \partial x_2$$

при дополнительных условиях, следующих из (2.6), (2.8):

$$\int_{-1}^1 \Psi_i(x) dx = 0 \quad (i=1, \dots, 4), \quad \int_{-1}^1 \psi_i(x) dx = 0 \quad (i=3, 4) \quad (3.3)$$

Ядра системы (3.1) удобно представить следующим образом:

$$L_{kj}(x-x_0) = -\frac{\delta_{kj}}{2\pi(x-x_0)} + \frac{\tau^2}{2\pi} (x-x_0) \sum_{m=1}^2 e_m X_{kj}^{(m)} G_{1,0}(\tau e_m |x-x_0|)$$

$$X_{11}^{(m)} = (-1)^m \frac{\mu_1 e_m^2 - 3\mu_0}{2e_0 e_m}, \quad X_{12}^{(m)} = (-1)^m \frac{\mu_2^* e_m}{2e_0}$$

$$X_{21}^{(m)} = 3X_{12}^{(m)}, \quad X_{22}^{(m)} = (-1)^m \frac{3(1+\mu_1)e_m^2 + 3\mu_0}{2e_0 e_m}$$

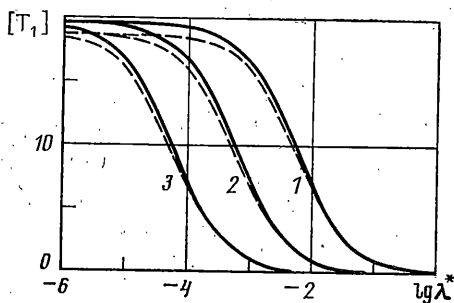
$$e_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (3 + 4\mu_1 \pm \sqrt{(3+2\mu_1)^2 + 12(\mu_2^*)^2})^{1/2}$$

$$e_0 = e_1^2 - e_2^2, \quad \mu_0 = \mu_1 + \mu_1^2 - (\mu_2^*)^2, \quad \tau = l/h$$

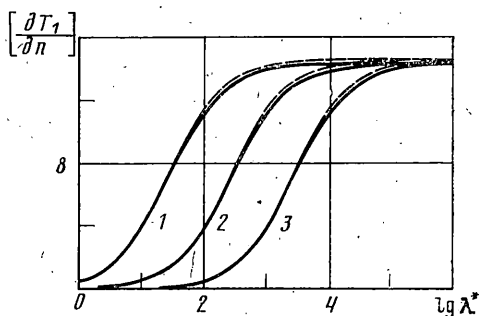
$$\mu_2^* = \mu_2 - 1/2 h (k_1 + k_2), \quad \mu_{1,2} = 1/2 (Bi^+ \pm Bi^-)$$

где  $h$  — полутолщина оболочки;  $Bi^+, Bi^-$  — критерий Био на внешней и внутренней поверхностях оболочки;  $\delta_{kj}$  — символ Кронекера;  $G_{n,m}(z)$  — специальная функция, явное выражение которой приведено в [9].

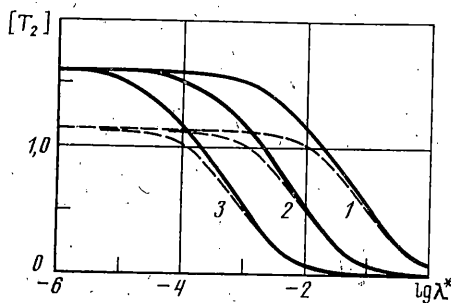
Ядра системы (3.2) приведены в [5]. Системы (3.1), (3.2) с учетом дополнительных условий (3.3) решаются численно методом механических квадратур [10].



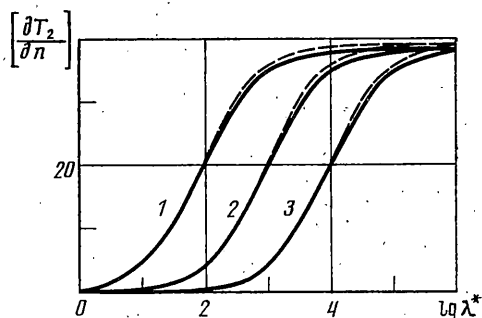
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Из вида систем (3.1), (3.2) следует, что данная модель теплопроводящего разреза отличается от теплопроницаемого наличием скачков тепловых потоков. Скачки же самой температуры для обоих видов разреза будут одинаковы.

Коэффициенты  $\beta_s$ ,  $\beta_n$ , влияющие на решение разрешающих систем (3.1), (3.2), выражаются через относительную теплопроводность промежуточного слоя  $\lambda^*$  и относительное раскрытие разреза  $\delta^*$  по формулам  $\beta_s = \lambda^* \delta^*$ ,  $\beta_n = \lambda^* / \delta^*$ ,  $\lambda^* = \lambda_c / \lambda_0$ ,  $\delta^* = \delta / l$ . Величины  $\lambda^*$ ,  $\delta^*$  независимы, поэтому их удобно взять в качестве определяющих при проведении практических расчетов. При этом величину  $\delta^*$  можно брать постоянной по длине разреза и равной максимальному значению, что идет в запас прочности. Оценивая максимальное раскрытие трещин в металлах [11], примем  $\delta_{\max}^* \sim 10^{-2}$ .

Численные исследования проводились для трех значений относительного раскрытия разреза в широком диапазоне изменения относительной теплопроводности промежуточного слоя. Рассматривалась сферическая оболочка ( $hk_1 = hk_2 = 0,025$ ) и пластина, содержащие разрез длиной  $l/h = 10$ . Параметры основного температурного поля на линии разреза предполагались следующими:  $h \partial T_k / \partial n = 1^\circ \text{C}$ ,  $h l \partial^2 T_k / \partial s^2 = -1^\circ \text{C}$  ( $k=1, 2$ ).

Рассматривался случай сильной термоизоляции боковых поверхностей ( $Bi \neq \infty$ ,  $Bi = 0,001$ ).

Результаты расчета скачков интегральных характеристик температуры ( $[T_k]$  ( $k=1, 2$ ), в  $^\circ \text{C}$ ) и их производных ( $[\partial T_k / \partial n]$  ( $k=1, 2$ ), в  $^\circ \text{C}$ , приходящихся на полудлину разреза  $l$ ) в середине разреза представлены на фиг. 1–4 в виде графиков. Кривые 1–3 соответствуют относительному раскрытию разреза  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$ ,  $10^{-4}$ . Штриховыми линиями показаны зависимости для пластины, которые соответствуют также случаю  $\lambda = -1$  ( $\lambda = k_1/k_2$ ). Графики для оболочек произвольной гауссовой кривизны ( $|\lambda| < 1$ ) располагаются между кривыми для сферы и пластины.

Из анализа численных результатов задачи теплопроводности следует, что при  $\lambda_c < \lambda_0$  возмущенное температурное поле обусловлено скачками температуры, а при  $\lambda_c > \lambda_0$  скачками тепловых потоков. При  $\lambda_c = \lambda_0$  возмущенное температурное поле отсутствует, поскольку оболочка становится однородной в смысле теплопроводности. Скачок температуры достигает максимума в случае теплоизолированного разреза ( $\lambda_c \rightarrow 0$ ), а скачок теплового потока максимален при большой проводимости разреза ( $\lambda_c \rightarrow \infty$ ). Кривизна оболочки в значительной мере влияет лишь на скачок температуры. При  $\lambda_c < \lambda_0$  возмущенное температурное поле в оболочке больше, чем в пластине.

4. Задача термоупругости. Рассмотрим оболочку с разрезом, расположенным вдоль координатной оси  $x_1$ . В этом случае система (2.9) распадается на две независимые системы СИУ, отвечающие случаю симметричного и антисимметричного нагружения относительно линии разреза

$$\int_{-1}^1 I_{kj}(x-x_0) \Omega_j(x) dx = W_k(x_0), \quad (|x_0| < 1; k, j=1, 2) \quad (4.1)$$

$$\int_{-1}^1 J_{kj}(x-x_0) \Phi_j(x) dx = U_k(x_0) \quad (|x_0| < 1; k, j=1, 2) \quad (4.2)$$

$$\Omega_1 = \psi_6, \quad \Omega_2 = \psi_8, \quad \Phi_1 = \psi_5, \quad \Phi_2 = \psi_7$$

Неизвестные функции  $\Omega_j, \Phi_j$  удовлетворяют дополнительным условиям

$$\int_{-1}^1 \left\{ \Phi_1(x) - \frac{k_1}{2} x^2 \Phi_2(x) \right\} dx = 0, \quad \int_{-1}^1 \Phi_1(x) dx = 0 \quad (4.3)$$

$$\int_{-1}^1 x \Phi_2(x) dx = 0, \quad \int_{-1}^1 \Omega_j(x) dx = 0 \quad (j=1, 2)$$

которые следуют из непрерывности перемещений и углов поворота на концах разреза.

Ядра системы (4.1), отвечающей случаю симметричного нагружения, удобно представить в виде

$$I_{kj}(x-x_0) = \frac{\delta_{kj}}{2\pi} \frac{c_k}{x-x_0} + \frac{2\varphi_{kj}}{\pi^2} (x-x_0) \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f_{nm}^{(kj)}}{m!} \{ (1-\delta_{kj}) \operatorname{Re} G_{n,n+m-1}(\gamma|x-x_0|) + \delta_{kj} \operatorname{Im} G_{n,n+m-1}(\gamma|x-x_0|) \},$$

$$f_{nm}^{(kj)} = \int_0^{\pi/2} v_{kj} q_1^n q_2^m \cos(2n-1)\theta d\theta$$

$$v_{11} = \cos^3 \theta, \quad v_{22} = p^4 / \cos \theta, \quad v_{12} = v_{21} = \operatorname{sign}(t^2) p^2 \cos \theta$$

$$q_1 = |t^2|, \quad q_2 = 1 - |t^2|, \quad t^2 = \cos^2 \theta + \lambda \sin^2 \theta$$

$$p^2 = v \cos^2 \theta + \sin^2 \theta, \quad \gamma = \sqrt{i} \tau \kappa$$

$$c_1 = 1/\tau, \quad c_2 = -(3+v) / \{3(1+v)\tau^3\}$$

$$\varphi_{11} = -k_2 l v_0, \quad -\varphi_{12} = \varphi_{21} = k_2 h, \quad \varphi_{22} = -k_2 h / (\tau v_0)$$

$$\lambda = k_1/k_2, \quad \kappa = (k_2 h v_0)^{1/2}, \quad v_0 = \{3(1-v^2)\}^{1/2}$$

где  $v$  — коэффициент Пуассона.

Правые части системы (4.1), обусловленные возмущенным температурным полем, зависят лишь от скачков производных интегральных характеристик температуры

$$W_k(x_0) = \int_{-1}^1 D_{kp}(x'-x_0) \left[ \frac{\partial T_p(x')}{\partial n} \right] dx' \quad (k, p=1, 2)$$

$$D_{kp}(x'-x_0) = \delta_{k2} V_{p0}(x'-x_0) + \frac{1}{\pi^2} \sum_{j=1}^3 C_{pj}^{(k)} V_{pj}^{(k)}(x'-x_0)$$

$$V_{p_0}(x'-x_0) = C_{p_0} \sum_{i=1}^2 \omega_{p_i} G_{0,0}(\tau e_i | x' - x_0 |)$$

$$V_{pj}^{(k)}(x'-x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left\{ \sum_{i=1}^2 f_{npj}^{(i)} G_{n,n}(\tau e_i | x' - x_0 |) + \right. \\ \left. + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (f_{nmpjk}^{(1)} \operatorname{Re} G_{n,n+m}(\gamma | x' - x_0 |) - f_{nmpjk}^{(2)} \operatorname{Im} G_{n,n+m}(\gamma | x' - x_0 |)) \right\},$$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 2, & n \geq 1 \end{cases}$$

$$f_{npj}^{(i)} = a_{pj}^{(i)} \int_0^{\pi/2} \frac{g_{pj}^{(i)}(\theta)}{e_1^4 + \kappa^4 t^4} \cos 2n\theta \, d\theta$$

$$f_{nmpjk}^{(i)} = b_{pj}^{(i)} \int_0^{\pi/2} \frac{r_{nmpjk}^{(i)}(\theta) \cos 2n\theta \, d\theta}{(e_1^4 + \kappa^4 t^4)(e_2^4 + \kappa^4 t^4)}$$

Здесь  $C_{p_0}$ ,  $\omega_{p_i}$ ,  $C_{pj}^{(k)}$ ,  $a_{pj}^{(i)}$ ,  $b_{pj}^{(i)}$  — константы, зависящие от механических и теплофизических свойств материала, геометрических параметров оболочки и разреза, характеристик теплообмена;  $g_{pj}^{(i)}(\theta)$  — функции переменной  $\theta$  и параметра  $\lambda$ ;  $r_{nmpjk}^{(i)}(\theta)$  — функции переменной  $\theta$ , зависящие от характеристик теплообмена, материала и геометрии оболочки. Например

$$C_{20} = \alpha [3\tau^2(1-\nu)\pi]^{-1}, \quad \omega_{12} = (e_1^2 - e_2^2)^{-1}$$

$$C_{23}^{(2)} = 2\alpha\mu_2 * k_2 h / \tau^2, \quad a_{212}^{(1)} = e_1^6 (e_1^2 - e_2^2)^{-1}$$

$$b_{132}^{(2)} = \kappa^2 (e_1^2 + e_2^2), \quad g_{231}^{(2)}(\theta) = t^2 \cos^2 \theta$$

$$r_{nmp132}^{(1)}(\theta) = \operatorname{sign}(t^2) (\kappa^4 t^4 - e_1^2 e_2^2) p^2 q_1^{n+1} q_2^m$$

где  $\alpha$  — коэффициент линейного теплового расширения.

После определения функций  $\Omega_i$  коэффициенты интенсивности усилий  $K_1$  и моментов  $K_3$  находим по формулам ( $E$  — модуль Юнга):

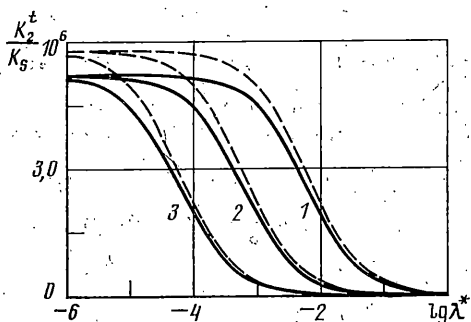
$$K_1 = -1/2 E h l^{1/2} \lim_{x \rightarrow 1} (1-x^2)^{1/2} \Omega_1(x)$$

$$K_3 = 1/6 (3+\nu) (1+\nu)^{-1} E h^3 l^{-1/2} \lim_{x \rightarrow 1} (1-x^2)^{1/2} \Omega_2(x)$$

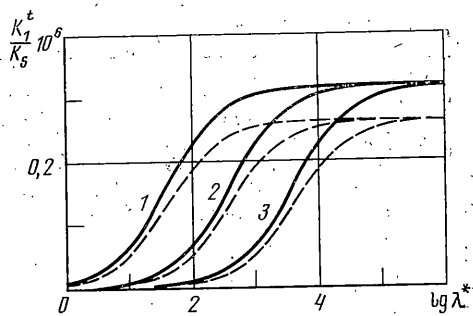
Система (4.2), отвечающая случаю антисимметричного нагружения, совпадает с разрешающей системой СИУ для теплопроницаемого разреза вдоль оси  $x_1$  и описана в [5]. Там же приводятся формулы для нахождения коэффициентов интенсивности усилий  $K_2$  и моментов  $K_4$ . Таким образом, теплопроводящий разрез, ориентированный вдоль линии кривизны, отличается от теплопроницаемого наличием симметричных силовых факторов, обусловленных возмущенным температурным полем.

Системы (4.1), (4.2) с учетом дополнительных условий (4.3) решены численно методом механических квадратур [10].

Для оценки достоверности используемой методики проведено сравнение с результатами, полученными в [1], где рассмотрена пластина с термоизолированными поверхностями и теплопроводящим разрезом. Значе-



Фиг. 5



Фиг. 6

ния коэффициента интенсивности  $K_1$ , с учетом заданной в [1] формы смыкания берегов разреза, полностью совпали.

Для оценки влияния теплофизических свойств разреза на коэффициенты интенсивности усилий и моментов проведены численные исследования в широком диапазоне относительной теплопроводности  $\lambda^*$  для трех значений относительного раскрытия разреза  $\delta^*$ . Рассматривалась сферическая оболочка ( $hk_1 = hk_2 = 0,02$ ) и пластина при сильной термоизоляции боковых поверхностей ( $Bi \pm = 0,001$ ). Расчеты проводились для разреза единичной относительной длины ( $\tau = 1$ ) [2] при следующих параметрах основного температурного поля на линии разреза:

$$-h\delta T_1^\circ / \partial n = 1^\circ \text{C}, \quad h l \delta^2 T_1^\circ / \partial s^2 = -1^\circ \text{C}$$

$$h\delta T_2^\circ / \partial n = 0^\circ \text{C}, \quad h l \delta^2 T_2^\circ / \partial s^2 = 0^\circ \text{C}$$

Результаты расчета коэффициентов интенсивности усилий, обусловленных возмущенным температурным полем, представлены на фиг. 5, 6 в виде графиков, где  $K_s = E l^2$ . Кривые 1-3 соответствуют значениям параметра  $\delta^* = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$ . Штриховыми линиями показаны зависимости для пластины.

Графики для коэффициентов интенсивности моментов  $K_3^t, K_4^t$  в оболочке имеют аналогичную качественную зависимость (как графики для  $K_1^t, K_2^t$ , соответственно).

Из анализа численных результатов задачи термоупругости следует, что данная модель теплопроводящего разреза достаточно точно описывает физическую картину процесса. При  $\lambda_c = \lambda_0$  усилия и моменты возмущенного состояния равны нулю. При  $\lambda_c < \lambda_0$  возмущенное термоупругое состояние определяется антисимметричными силовыми факторами, а при  $\lambda_c > \lambda_0$  симметричными силовыми факторами.

Влияние кривизны выражается в том, что коэффициенты интенсивности  $K_1^t$  больше в оболочке, а  $K_2^t$  в пластине. Для касательных усилий, которые обусловлены скачками температуры, этот факт имеет простое объяснение, несмотря на то, что соответствующее возмущенное температурное поле больше в оболочке. Благодаря изогнутой поверхности в заземленной оболочке, при одинаковом температурном смещении, будут возникать меньшие усилия, чем в пластине.

Анализируя влияние параметров  $\lambda^*, \delta^*$  на коэффициенты интенсивности усилий и моментов можно заключить, что теплофизические свойства разреза в продольном направлении необходимо учитывать лишь тогда, когда теплопроводность промежуточного слоя больше теплопроводности материала оболочки.

Для проведения реальных прочностных расчетов достаточно принять  $\lambda_{\max}^* \sim 1$ , поскольку металлы являются хорошими проводниками тепла. Поэтому на основании проведенных исследований можно сделать следующий обобщающий вывод.

При решении практических задач механики разрушения оболочечных конструкций достаточно использовать модель теплопроницаемого разреза, когда теплопроводность промежуточного слоя меньше теплопроводности материала оболочки.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кит Г. С., Кривцун М. Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1983. 277 с.
2. Панасюк В. В., Саверук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 444 с.
3. Осадчук В. А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. Киев: Наук. думка, 1985. 221 с.
4. Гольцев А. С., Шевченко В. П. Термоупругость оболочек с термоизолированным разрезом при наличии теплообмена // Прикл. механика. 1985. Т. 21. № 2. С. 73-78.
5. Гольцев А. С., Шевченко В. П. Теплопроводность и термоупругость оболочек с теплопроницаемым разрезом // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 4. С. 153-160.



3. Подстригач Я. С., Швец Р. Н. Термоупругость тонких оболочек. Киев: Наук. думка, 1978. 343 с.
7. Підстригач Я. С. Умови теплового контакту твердих тіл // Доп. АН УРСР. 1963. № 7. С. 872—874.
8. Грилицкий Д. В., Драган М. С., Опанасович В. К. Температурное поле и термоупругое состояние пластинки с тонкостенным упругим включением // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 2. С. 338—345.
9. Хижняк В. К., Шевченко В. П. Смешанные задачи теории пластин и оболочек. Донецк: Изд-е Донецк. ун-та, 1980. 127 с.
10. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973. 303 с.
11. Партон В. З., Морозов Е. М. Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985. 502 с.

Донецк

Поступила в редакцию  
7.VIII.1988