МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1990

УДК 539.3

В. В. КУЗНЕЦОВ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Рассмотрен класс инвариантных соотношений теории дифференциальных квадратичных форм, задаваемый отношением некоторых детерминантов. В рамках данного определения получены точные выражения инвариантов тензора конечных деформаций трехмерного тела, следующего гипотезам Кирхгофа – Лява. Даны приближенные выражения для тонких оболочек. Определен ряд других инвариантных характеристик деформируемого тела.

1. Инвариантные отношения. Рассмотрим дифференциальные квадратичные формы [1, 7] вида $A_{ij}{}^k d\alpha_i d\alpha_j$ $(i, j=1, 2)$

$$A_{ij}{}^k={}^1/_2(\mathbf{M}_{,i}{}^{km}\mathbf{N}_{,j}{}^m+\mathbf{M}_{,j}{}^{km}\mathbf{N}_{,i}{}^m) \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{M}^{km}$, $\mathbf{N}^m$ – произвольные векторы, зависящие от криволинейных координат α_i; индексы после запятой обозначают дифференцирование по криволинейным координатам. В формуле (1.1) и далее предполагается суммирование по повторяющимся дважды индексам, принимающим числовые значения. Введем определители, зависящие от коэффициентов двух произвольных квадратичных форм $A_{ij}{}^k$ и $B_{ij}{}^m$ следующим образом

$$d_{AB}^{km}=\det\begin{Vmatrix} A_{11}{}^k & A_{12}{}^k \\ B_{21}{}^m & B_{22}{}^m\end{Vmatrix} \tag{1.2}$$

Теорема. Выражение

$$I_{A^rA^s}^{A^kA^m}=(d_{AA}^{km}+d_{AA}^{mk})(d_{AA}^{rs}+d_{AA}^{sr})^{-1} \tag{1.3}$$

является инвариантом относительно замены переменных $u_P{}^1=u_P{}^1(\alpha_1, \alpha_2)$ $(P=1, 2)$.

Доказательство. Положим $\mathbf{M}^{km}=\mathbf{M}^{km}(u_1{}^1, u_2{}^1)$, $\mathbf{N}^m=\mathbf{N}^m(u_1{}^1, u_2{}^1)$. Дифференцируя $\mathbf{M}^{km}$, $\mathbf{N}^m$ как сложные функции, получаем (здесь индексы P, Q относятся к переменным $u_P{}^1$, $u_Q{}^1$):

$$A_{ij}{}^k=B_{PQ}{}^k u_{Pi}{}^1 u_{Qj}{}^1,\quad u_{Pi}{}^1=u_{P,i}{}^1 \tag{1.4}$$

$$B_{PQ}{}^k={}^1/_2(\mathbf{M}_{,P}{}^{km}\mathbf{N}_{,Q}{}^m+\mathbf{M}_{,Q}{}^{km}\mathbf{N}_{,P}{}^m)$$

$$d_{AA}{}^{km}+d_{AA}{}^{mk}=(d_{BB}{}^{km}+d_{BB}{}^{mk})(d_{uu}{}^{11})^2 \tag{1.5}$$

Составляя отношение (1.3) находим

$$(d_{AA}{}^{km}+d_{AA}{}^{mk})(d_{AA}{}^{rs}+d_{AA}{}^{sr})^{-1}= \\ =(d_{BB}{}^{km}+d_{BB}{}^{mk})(d_{BB}{}^{rs}+d_{BB}{}^{sr})^{-1} \tag{1.6}$$

Таким образом замена коэффициентов $A_{ij}{}^k$ коэффициентами $B_{PQ}{}^k$ не меняет величины $I_{A^rA^s}^{A^kA^m}$, что доказывает инвариантность выражения (1.3) относительно замены переменных.

Важнейшим свойством инвариантов, представляющим интерес для приложений, является сохранение их численных значений в любой системе координат. В зависимости от смысла векторов $\mathbf{M}^{km}$, $\mathbf{N}^m$ могут быть рассмотрены различные геометрические инварианты. Принимая $\mathbf{N}^1=\mathbf{r}$, $\mathbf{M}^{11}=\mathbf{r}$, $\mathbf{M}^{21}=-\mathbf{n}$, где $\mathbf{r}$, $\mathbf{n}$ — радиус-вектор и орт нормали некоторой поверхности, получим по (1.1), что $A_{ij}{}^1$, $A_{ij}{}^2$ представляют собой коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности соответственно. При этом $I_{A^1A^1}^{A^1A^2}$ и $I_{A^1A^1}^{A^2A^2}$ являются соответственно средней и гауссовой кривизной поверхности [7].

2. Инварианты деформаций. Пусть $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точки трехмерного тела в недеформированном состоянии. Он связан с радиусом-вектором некоторой базовой поверхности $\mathbf{r}$ и ортом нормали к ней $\mathbf{n}$ зависимостью $\mathbf{R}=\mathbf{r}+z\mathbf{n}$. Коэффициенты первой квадратичной формы поверхности $z=\mathrm{const}$ имеют выражение $A_{ij}{}^1=\mathbf{R}_{,i}\mathbf{R}_{,j}$ или

$$A_{ij}{}^1=a_{ij}{}^kz^{k-1}\ (k=1,\ 2,\ 3) \tag{2.1}$$

$$a_{ij}{}^1=\mathbf{r}_{,i}\mathbf{r}_{,j},\ a_{ij}{}^3=\mathbf{n}_{,i}\mathbf{n}_{,j},$$

$$a_{ij}{}^2=\mathbf{n}_{,i}\mathbf{r}_{,j}+\mathbf{n}_{,j}\mathbf{r}_{,i}$$

Величины $a_{ij}{}^1$, $a_{ij}{}^3$ — коэффициенты первой и третьей квадратичных форм базовой поверхности; $a_{ij}{}^2$ равны удвоенным коэффициентам второй квадратичной формы базовой поверхности, взятым с обратным знаком. Положим, что деформирование тела следует гипотезам Кирхгофа — Лява [2], сформулированным относительно базовой поверхности. Для соответствующих величин в деформированном состоянии будем иметь выражения: $\check{\mathbf{R}}=\check{\mathbf{r}}+z\check{\mathbf{n}}$, $\check{a}_{ij}{}^1=\check{\mathbf{r}}_{,i}\check{\mathbf{r}}_{,j}$, $\check{a}_{ij}{}^2=\check{\mathbf{n}}_{,i}\check{\mathbf{r}}_{,j}+\check{\mathbf{n}}_{,j}\check{\mathbf{r}}_{,i}$, $\check{a}_{ij}{}^3=\check{\mathbf{n}}_{,i}\check{\mathbf{n}}_{,j}$, а также

$$\check{A}_{ij}{}^1=A_{ij}{}^1+2E_{ij}{}^1, \tag{2.2}$$

$$E_{ij}{}^1\varepsilon_{ij}{}^kz^{k-1}\ (k=1,\ 2,\ 3)$$

$$\varepsilon_{ij}{}^k={}^1/_2(\check{a}_{ij}{}^k-a_{ij}{}^k)$$

Рассмотрим следующие инварианты, являющиеся частным случаем выражения (1.3)

$$I_{A^1A^1}^{A^1E^1}=(d_{AE}{}^{11}+d_{EA}{}^{11})/d_{AA}{}^{11},\quad I_{A^1A^1}^{E^1E^1}=d_{EE}{}^{11}/d_{AA}{}^{11} \tag{2.3}$$

Смысл этих инвариантов можно установить в некоторой специально выбранной системе координат. Если в качестве α_i принять декартовы координаты x_i на касательной плоскости в некоторой точке поверхности $z=\mathrm{const}$, то в этой точке $A_{ij}{}^1=\delta_{ij}$ и выражения (2.3) записываются в виде

$$I_{A^1A^1}^{A^1E^1}=E_{11}{}^1+E_{22}{}^1,\quad I_{A^1A^1}^{E^1E^1}=E_{11}{}^1E_{22}{}^1-E_{12}^1E_{21}{}^1 \tag{2.4}$$

Таким образом согласно определению в теории упругости [5] $I_{A^1A^1}^{A^1E^1}$ и $I_{A^1A^1}^{E^1E^1}$ являются первым и вторым инвариантами тензора конечных деформаций Грина $E_{ij}{}^1={}^1/_2(\check{\mathbf{R}}_{,i}\check{\mathbf{R}}_{,j}-\delta_{ij})$ поверхности $z=\mathrm{const}$. Поскольку инварианты сохраняют свои численные значения в данной точке тела в любой системе координат, то выражения (2.3) дают общее определение инвариантов тензора конечных деформаций произвольной поверхности.

3. Инварианты базовой поверхности. Найдем выражение инвариантов (2.3) через инварианты базовой поверхности. Для этого представим выражения (2.3) в эквивалентной форме

$$I_{A^1A^1}^{A^1E^1}=\frac{(d_{AE}{}^{11}+d_{EA}{}^{11})/d_{aa}{}^{11}}{d_{AA}{}^{11}/d_{aa}{}^{11}}, \tag{3.1}$$

$$I_{A^1A^1}^{E^1E^1}=\frac{d_{EE}{}^{11}/d_{aa}{}^{11}}{d_{AA}{}^{11}/d_{aa}{}^{11}}$$

Здесь $d_{aa}{}^{11}$ — дискриминант первой квадратичной формы базовой поверхности. Вычисляя составляющие выражений (3.1) находим:

$$(d_{AE}^{11} + d_{EA}^{11})/d_{aa}^{11} = I_{a^1a^1}^{a^k\varepsilon^m} z^{k+m-2} \quad (k, m = 1, 2, 3) \tag{3.2}$$

$$d_{EE}^{11}/d_{aa}^{11} = I_{a^1a^1}^{\varepsilon^k\varepsilon^m} z^{k+m-2}, \quad d_{AA}^{11}/d_{aa}^{11} = I_{a^1a^1}^{a^ka^m} z^{k+m-2}$$

$$I_{a^1a^1}^{a^k\varepsilon^m} = (d_{a\varepsilon}^{km} + d_{\varepsilon a}^{mk})/d_{aa}^{11}, \quad I_{a^1a^1}^{\varepsilon^k\varepsilon^m} = {}^1/_2\,(d_{\varepsilon\varepsilon}^{km} + d_{\varepsilon\varepsilon}^{mk})/d_{aa}^{11}$$

$$I_{a^1a^1}^{a^ka^m} = {}^1/_2\,(d_{aa}^{km} + d_{aa}^{mk})/d_{aa}^{11}$$

В результате $I_{A^1A^1}^{A^1E^1}$ и $I_{A^1A^1}^{E^1E^1}$ принимают вид

$$\begin{aligned} I_{A^1A^1}^{A^1E^1} &= I_{a^1a^1}^{a^k\varepsilon^m} z^{k+m-2}/(I_{a^1a^1}^{a^ra^s} z^{r+s-2}) \\ I_{A^1A^1}^{E^1E^1} &= I_{a^1a^1}^{\varepsilon^k\varepsilon^m} z^{k+m-2}/(I_{a^1a^1}^{a^ra^s} z^{r+s-2}) \quad (k, m, r, s = 1, 2, 3) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Формулы (3.3) выражают инварианты тензора конечных деформаций в произвольной точке тела через инварианты базовой поверхности. Эти соотношения справедливы при произвольных деформациях и перемещениях трехмерного тела, следующего гипотезам Кирхгофа — Лява. Таким образом, инварианты тензора деформаций представимы в виде отношения полиномов четвертой степени относительно z.

Из полученных точных выражений можно вывести различные приближенные сотношения для тонких оболочек, в которых за базовую принимается срединная поверхность. Так, используя допущения технической теории тонких оболочек при малых деформациях срединной поверхности

$$E_{ij}{}^1 \approx \varepsilon_{ij}{}^1 + \varepsilon_{ij}{}^2 z, \quad A_{ij}{}^1 \approx a_{ij}{}^1 \tag{3.4}$$

получаем следующие выражения без дополнительных допущений

$$I_{A^1A^1}^{A^1E^1} = I_{a^1a^1}^{a^1\varepsilon^1} + zI_{a^1a^1}^{a^1\varepsilon^2}, \quad I_{A^1A^1}^{E^1E^1} = I_{a^1a^1}^{\varepsilon^1\varepsilon^1} + 2zI_{a^1a^1}^{\varepsilon^1\varepsilon^2} + z^2 I_{a^1a^1}^{\varepsilon^2\varepsilon^2} \tag{3.5}$$

Здесь $I_{a^1a^1}^{a^1\varepsilon^1}, I_{a^1a^1}^{\varepsilon^1\varepsilon^1}$ — первый и второй инварианты тензора деформаций срединной поверхности; $I_{a^1a^1}^{a^1\varepsilon^2}, I_{a^1a^1}^{\varepsilon^2\varepsilon^2}$ — первый и второй инварианты тензора искривлений срединной поверхности; $I_{a^1a^1}^{\varepsilon^1\varepsilon^2}$ — комбинационный инвариант деформаций и искривлений срединной поверхности. Выражения (3.5) совместно с определением $\varepsilon_{ij}{}^k$ (2.2) представляют геометрически нелинейные соотношения тонких оболочек в произвольной криволинейной системе координат при малых деформациях срединной поверхности и произвольных искривлениях.

4. Физические инварианты. Имея выражения для инвариантов тензора деформаций в любой точке можно определить другие физические инварианты: инварианты тензора напряжений, энергию, интенсивности нормальных и касательных напряжений, интенсивности линейных и угловых деформаций и др. [5, 6]. Для этого используются законы состояния [5]. Например, в случае линейно упругого тела имеют место следующие соотношения [5, 6] (λ, μ — постоянные Ламе):

$$I_\sigma = (3\lambda + 2\mu) I_{A^1A^1}^{A^1E^1}, \quad I_{\sigma\sigma} = \lambda(3\lambda + 4\mu)(I_{A^1A^1}^{A^1E^1})^2 + 4\mu^2 I_{A^1A^1}^{E^1E^1} \tag{4.1}$$

$$\Pi_V = {}^1/_2\,(\lambda + 2\mu)(I_{A^1A^1}^{A^1E^1})^2 - 2\mu I_{A^1A^1}^{E^1E^1}$$

$$\sigma = (I_\sigma^2 - 3I_{\sigma\sigma})^{1/2}, \quad \tau = 3^{-1/2}\sigma, \quad \gamma = 3^{1/2}\varepsilon$$

$$\varepsilon = {}^2/_3\,[(I_{A^1A^1}^{A^1E^1})^2 - 3I_{A^1A^1}^{E^1E^1}]^{1/2}$$

Здесь I_σ, $I_{\sigma\sigma}$ — первый и второй инварианты тензора напряжений; Π_V — плотность энергии в единице объема; σ, τ — интенсивности нормальных и касательных напряжений; ε, γ — интенсивности линейных и угловых деформаций. Полная энергия тела Π определяется интегралом по объему от плотности энергии. Используя соотношения (3.4), (3.5) получаем:

$$\Pi=\int_F \Pi_F\, dF, \qquad dF=(d_{aa}{}^{11})^{1/2}\, d\alpha_1\, d\alpha_2\,,$$
$$\Pi_F={}^1/_2B[(I_{a^1a^1}^{a^1\varepsilon^1})^2-2(1-\nu)I_{a^1a^1}^{\varepsilon^1\varepsilon^1}]+{}^1/_2D[(I_{a^1a^1}^{a^1\varepsilon^2})^2-2(1-\nu)I_{a^1a^1}^{\varepsilon^2\varepsilon^2}] \qquad (4.2)$$

Здесь Π_F — плотность энергии на единицу площади срединной поверхности F; B, D — тангенциальная и изгибная жесткости, ν — коэффициент Пуассона материала; интеграл в (4.2) берется по F. Заметим, что комбинационный инвариант $I_{a^1a^1}^{\varepsilon^1\varepsilon^2}$ не входит в выражение энергии.

Уравнения равновесия оболочки могут быть получены из вариационных принципов, использующих вариацию энергии $\delta\Pi$. Однако, при применении методов решения задач теории оболочек, основанных на дискретизации, удобнее использовать выражение энергии (4.2), записанное непосредственно для системы с конечным числом степеней свободы. При этом вариация энергии сводится к конечному числу варьируемых параметров. Структура первой и второй вариаций энергии дискретных нелинейных моделей оболочек, а также канонические формы энергии рассмотрены в [3, 4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Веблен О.* Инварианты дифференциальных квадратичных форм. М.: Изд-во иностр. лит. 1948. 139 с.
2. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 512 с.
3. *Кузнецов В. В.* О структуре вариаций энергии нелинейных моделей оболочек // Прикл. механика. 1988. Т. 24. № 10. С. 62—68.
4. *Кузнецов В. В.* Канонический тензор в теории упругости // ПМТФ. 1987. № 5. С. 144—146.
5. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
6. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. М. Машиностроение. 1968. 400 с.
7. *Рашевский П. К.* Курс дифференциальной геометрии. М.: Гостехиздат. 1956. 420 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию 13.III.1989