

УДК 539.3

© 1990 г.

В. В. ВАСИЛЬЕВ, С. А. ЛУРЬЕ

К ПРОБЛЕМЕ ПОСТРОЕНИЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ ПЛАСТИН

На примере ортотропной однородной плиты рассматривается проблема сведения трехмерной задачи теории упругости к двумерной. Установлены условия согласованности разложений в ряды по толщине для тангенциальных перемещений и прогиба, обеспечивающие получение физически обусловленных систем двумерных уравнений. Обсуждаются некоторые традиционные уточненные двумерные теории пластин. Приведен пример, иллюстрирующий точность предлагаемой согласованной теории.

1. Вывод исходных уравнений. Рассмотрим однородную ортотропную плиту, отнесенную к декартовым координатам (фиг. 1), и запишем исходную систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= A_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + A_{13} \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \sigma_y &= A_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + A_{23} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \sigma_z &= A_{31} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{32} \frac{\partial v}{\partial y} + A_{33} \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= A_{44} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \tau_{xz} = A_{55} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} &= A_{66} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

где A_{mn} — коэффициенты жесткости.

На поверхностях плиты заданы следующие граничные условия (фиг. 1)

$$\begin{aligned} \tau_{xz}(\pm h/2) &= 0, \quad \tau_{xy}(\pm h/2) = 0 \\ \sigma_z(+h/2) &= -q, \quad \sigma_z(-h/2) = -p \end{aligned} \quad (1.3)$$

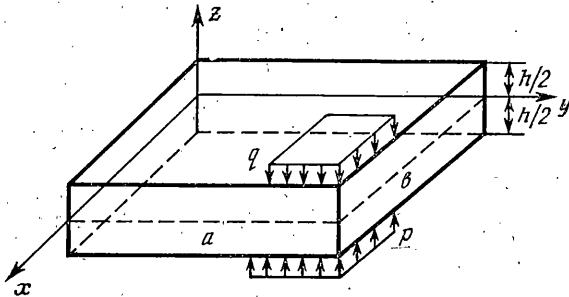
Для получения уравнений прикладной теории трехмерную систему (1.1), (1.2) необходимо привести к двумерной. Для этого представим перемещения в виде следующих разложений

$$u = \sum_{i=0}^I u_i(x, y) \varphi_i(z), \quad v = \sum_{j=0}^J v_j(x, y) \psi_j(z)$$

$$w = \sum_{h=1}^{\kappa} w_h(x, y) \chi_h(z)$$

где φ_i , ψ_j и χ_k — заданные системы функций, а u_i , v_j и w_k — искомые функции.

Примем $\varphi_0 = \psi_0 = \chi_1 = 1$ и $\varphi_1 = \psi_1 = z$, т. е. будем считать, что функции u_0 , v_0 , w_1 определяют перемещения, а функции u_1 и v_1 — поворот нормали к срединной плоскости плиты как твердого тела. Напряженно-деформированное состояние, соответствующее этим членам разложений (1.4), будем называть основным. Члены разложений (1.4) с номерами $i \geq 2$, $j \geq 2$, $k \geq 2$ описывают деформацию нормали.



Фиг. 1

Для получения двумерной системы уравнений учтем, что согласно разложениям (1.4) элемент пластины, имеющий бесконечно малые размеры по осям x и y и размер h по оси z , обладает $(I+1) + (J+1) + K$ степенями свободы, и воспользуемся принципом возможных перемещений. Умножая первое уравнение (1.1) на φ_i , второе — на ψ_j , третье — на χ_k и интегрируя их по толщине плиты, с учетом граничных условий (1.3) получим

$$L_x^{(0)} = \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad L_y^{(0)} = \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0$$

$$L_x^{(1)} = \frac{\partial M_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^{(1)}}{\partial y} - Q_x^{(1)} = 0 \quad (1.5)$$

$$L_y^{(1)} = \frac{\partial M_y^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}^{(1)}}{\partial x} - Q_y^{(1)} = 0$$

$$L_z^{(1)} = \frac{\partial Q_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial Q_y^{(1)}}{\partial y} + p_1 = 0$$

$$\frac{\partial M_x^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^{(i)}}{\partial y} - R_x^{(i)} = 0, \quad \frac{\partial M_y^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial M_{yx}^{(j)}}{\partial x} - R_y^{(j)} = 0$$

$$\frac{\partial Q_x^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial Q_y^{(k)}}{\partial y} - H_z^{(k)} + p_k = 0 \quad (i, j, k = 2, 3, \dots) \quad (1.6)$$

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz, \quad N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz, \quad N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz$$

$$M_x^{(1)} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz, \quad M_y^{(1)} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dz, \quad M_{xy}^{(1)} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz \quad (1.7)$$

$$Q_x^{(1)} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz, \quad Q_y^{(1)} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz$$

$$M_x^{(i)} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \varphi_i dz, \quad M_y^{(j)} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \psi_j dz$$

$$M_{xy}^{(i)} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \varphi_i dz, \quad M_{yx}^{(j)} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \psi_j dz \quad (1.8)$$

$$R_x^{(i)} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \varphi_i' dz, \quad R_y^{(j)} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} \psi_j' dz$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \chi_k dz, \quad Q_y^{(h)} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} \chi_k dz, \quad H_z^{(h)} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z \chi_k' dz$$

$$(i, j, k=2, 3, \dots)$$

$$p_i = p - q, \quad p_k = p \chi_k(-h/2) - q \chi_k(h/2)$$

2. Основное состояние. Рассмотрим основное состояние, для которого разложения (1.4) имеют вид

$$u = u_0 + u_1 z, \quad v = v_0 + v_1 z, \quad w = w_1 \quad (2.1)$$

Подставляя перемещения (2.1) в соотношения упругости (1.2), а полученные выражения для напряжений — в формулы (1.7) для усилий и моментов, будем иметь

$$N_x = B_{11} \varepsilon_x + B_{12} \varepsilon_y, \quad N_y = B_{21} \varepsilon_x + B_{22} \varepsilon_y, \quad N_{xy} = B_{44} \varepsilon_{xy}$$

$$M_x^{(1)} = D_{11} \kappa_x + D_{12} \kappa_y, \quad M_y^{(1)} = D_{12} \kappa_x + D_{22} \kappa_y, \quad M_{xy}^{(1)} = D_{44} \kappa_{xy} \quad (2.2)$$

$$Q_x^{(1)} = C_{55} \gamma_x, \quad Q_y^{(1)} = C_{66} \gamma_y$$

где $B_{mn} = A_{mn} h$, $D_{mn} = A_{mn} h^3 / 12$, $C_{mn} = A_{mn} h$ — мембранные, изгибные и сдвиговые жесткости, а

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}$$

$$\kappa_x = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \kappa_y = \frac{\partial v_1}{\partial y}, \quad \kappa_{xy} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \quad (2.3)$$

$$\gamma_x = u_1 + \frac{\partial w_1}{\partial x}, \quad \gamma_y = v_1 + \frac{\partial w_1}{\partial y}$$

обобщенные деформации.

Уравнения (1.5), (2.2), (2.3) образуют полную систему десятого порядка. При этом пять уравнений (1.5) являются уравнениями равновесия элемента пластины, имеющего бесконечно малые размеры по осям x и y и конечный размер h по оси z , и могут быть получены непосредственно из условий равновесия этого элемента.

Рассмотрим энергетический функционал Лагранжа, который с учетом соотношений (1.7) и (2.1)–(2.3) может быть записан для основного со-

стояния следующим образом:

$$\delta L = \iint (N_x \delta \varepsilon_x + N_y \delta \varepsilon_y + N_{xy} \delta \varepsilon_{xy} + M_x^{(1)} \delta \kappa_x + M_y^{(1)} \delta \kappa_y + M_{xy}^{(1)} \delta \kappa_{xy} + Q_x^{(1)} \delta \gamma_x + Q_y^{(1)} \delta \gamma_y - p_1 \delta w_1) dx dy = 0 \quad (2.4)$$

Осуществляя в (2.4) варьирование по пяти обобщенным перемещениям u_0, v_0, u_1, v_1, w_1 , входящим в равенства (2.3), можно получить уравнения равновесия (1.5) и следующие естественные граничные условия:

$$N_x \delta u_0 = 0, N_{xy} \delta v_0 = 0, M_x^{(1)} \delta u_1 = 0$$

$$M_{xy}^{(1)} \delta v_1 = 0, Q_x^{(1)} \delta w_1 = 0 \quad \text{при } x = \text{const}$$

$$N_y \delta v_0 = 0, N_{xy} \delta u_0 = 0, M_y^{(1)} \delta v_1 = 0 \quad (2.5)$$

$$M_{xy}^{(1)} \delta u_1 = 0, Q_y^{(1)} \delta w_1 = 0 \quad \text{при } y = \text{const}$$

называть теорию энергетически согласованной, если она обладает следующими свойствами.

1. Вариационные уравнения, вытекающие из условий минимума функционала Лагранжа типа (2.4) являются уравнениями равновесия и наоборот — уравнения равновесия согласованной теории могут быть получены в результате минимизации функционала Лагранжа трехмерной задачи по функциям u_i, v_i и w_i разложений (1.4).

2. Естественные граничные условия должны обеспечивать в силу разложений (1.4) тождественное обращение в нуль перемещений u, v, w на жестко закрепленном краю и тождественное обращение в нуль напряжений на свободном краю. Последнее условие удовлетворяется, если обобщенные усилия и моменты (1.7), (1.8), действующие на краю, обращаются в нуль, если этот край свободен от нагрузки.

Вернемся к анализу основного состояния. Как уже отмечалось, вариационные уравнения, вытекающие из условия (2.4), являются уравнениями равновесия (1.5), а граничные условия (2.5), например, для края $x = \text{const}$ в случае его жесткого закрепления дают $u_0 = v_0 = u_1 = v_1 = w_1 = 0$, т. е. согласно равенствам (2.1) на этом краю $u = 0, v = 0, w = 0$. Если край $x = \text{const}$ свободен от нагрузки, то согласно условиям (2.5) $N_x = N_{xy} = M_x^{(1)} = M_{xy}^{(1)} = Q_x^{(1)} = 0$. Из соотношений (1.2), (1.7) и (2.1) можно получить следующие выражения для напряжений

$$\sigma_x = \frac{N_x}{h} + \frac{12M_x^{(1)}}{h^3} z, \quad \sigma_y = \frac{N_y}{h} + \frac{12M_y^{(1)}}{h^3} z \quad (2.6)$$

$$\tau_{xy} = N_{xy}/h + 12M_{xy}^{(1)} z/h^3$$

Подставляя напряжения (2.6) в первые два уравнения равновесия (1.1), интегрируя их по z и учитывая статические граничные условия (1.3) и уравнения (1.5), найдем

$$\tau_{xz} = \frac{6Q_x^{(1)}}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right), \quad \tau_{yz} = \frac{6Q_y^{(1)}}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \quad (2.7)$$

Из равенств (2.6), (2.7) следует, что если край $x = \text{const}$ свободен от нагрузки, то на этом краю $\sigma_x = 0, \tau_{xy} = 0, \tau_{xz} = 0$. Таким образом, теория, описывающая основное состояние плиты, является согласованной.

Сделаем одно важное замечание. Сравнивая соотношения (1.2) и (2.7) для трансверсальных касательных напряжений, можно заключить, что они не согласуются между собой. Из соотношений (1.2) и (2.1), которые были использованы при построении функционала Лагранжа (2.4), следует равномерное распределение касательных напряжений по толщине плиты, не удовлетворяющее граничным условиям (1.3). Для

устранения выявленного противоречия традиционно используются независимые аппроксимации типа (2.1) и (2.7) для перемещений и касательных напряжений с последующей минимизацией смешанного энергетического функционала [1, 2] или введение в функционал (2.4) коэффициентов, учитывающих распределение трансверсальных касательных напряжений по толщине [3]. Однако, по существу, в таких модификациях теории основного состояния, призванных учесть влияние закона распределения касательных напряжений по толщине плиты на ее деформации, нет необходимости, поскольку толщина плиты при нагружении не изменяется. В связи с этим распределение напряжений τ_{xz} и τ_{yz} вдоль абсолютно жесткого отрезка $-h/2 \leq z \leq h/2$ не должно оказывать влияния на деформации плиты. Существенными являются только равнодействующие этих напряжений — поперечные усилия $Q_x^{(1)}$ и $Q_y^{(1)}$, которые и входят в уравнения равновесия (1.5) и в функционал (2.4). Что касается распределения напряжений, то оно может быть найдено после определения равнодействующих усилий $Q_x^{(1)}$ и $Q_y^{(1)}$ и соответствует равенствам (2.7).

3. Анализ некоторых прикладных теорий. Рассмотрим прежде всего классическую теорию тонких пластин, которая соответствует разложениям (2.1), если принять в них $u_1 = -\partial w_1 / \partial x$, $v_1 = -\partial w_1 / \partial y$. При этом в функционале (2.4) оказывается только три варьируемые функции и из него нельзя получить пять уравнений (1.5) (как известно, в результате минимизации из функционала следуют первые два из этих уравнений и комбинация из трех последних, получающаяся после исключения $Q_x^{(1)}$ и $Q_y^{(1)}$). Кроме того, естественные граничные условия не позволяют обратиться в нуль на свободном краю поперечное усилие и крутящий момент (как известно, обращается в нуль их комбинация — обобщенное поперечное усилие Кирхгоффа). Таким образом, классическая теория тонких пластин не является согласованной в отмеченном выше смысле.

Не обладает этим свойством и большинство предложенных к настоящему времени уточненных теорий. Рассмотрим для примера наиболее распространенный вариант, основанный на гипотезе о несжимаемости нормали к средней поверхности плиты. Если принять в рядах (1.4) $\varphi_0 = \psi_0 = 1$, $\varphi_1 = \psi_1 = z$, $\varphi_3 = \psi_3 = z^3$, $\chi_1 = 1$, отбросить все остальные члены и потребовать, чтобы касательные напряжения удовлетворяли граничным условиям (1.3), получим следующие широко используемые выражения

$$u = u_0 + u_1 z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) - \frac{4z^3}{3h^2} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = v_0 + v_1 z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) - \frac{4z^3}{3h^2} \frac{\partial w_1}{\partial y},$$

$$w = w_1(x, y)$$

Записывая вариационные уравнения, следующие из принципа Лагранжа, можно установить, что только первые два из них совпадают с соответствующими уравнениями системы (1.5). В уравнения, соответствующие уравнениям моментов, входят величины вида

$$M_x^{(1)} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \left(z - \frac{4z^3}{3h^2} \right) dz, \quad Q_x^{(1)} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) dz$$

Они не являются равнодействующими напряжений и, следовательно, вариационные уравнения не являются уравнениями равновесия. Таким образом, обсуждаемая теория не является согласованной в отмеченном выше смысле.

Из изложенного следует, что для построения энергетически согласованной уточненной теории разложения (1.4) должны удовлетворять некоторым дополнительным условиям, получение которых и является основной целью настоящей статьи. В связи с тем, что разложения (2.1), соответствующие основному состоянию, удовлетворяют этим условиям, рассмотрим уравнения равновесия (1.5). Сравнивая с ними уравнения (1.6), соответствующие уточненному состоянию, можно установить, что уравнения (1.6) в отличие от (1.5) включают две системы обобщенных поперечных усилий $Q_x^{(k)}$, $Q_y^{(k)}$ и $R_x^{(k)}$, $R_y^{(k)}$. Покажем, что причиной несогласованности уточненной теории является именно это обстоятельство. Для этого построим формальную теорию, в которой усилия R отсутствуют.

Пусть

$$u = u_0 + u_1 z, \quad v = v_0 + v_1 z, \quad w = w_1 + \sum_{k=2}^K w_k \chi_k(z) \quad (3.1)$$

Поскольку $\varphi_i = \psi_j = 0$ при $i = j \geq 2$, получаем $M_x^{(i)} = M_y^{(j)} = M_{xy}^{(i)} = M_{yx}^{(j)} = R_x^{(i)} = R_y^{(j)} = 0$ и из уравнений (1.6) остается только последнее уравнение, включающее усилия $Q_x^{(k)}$ и $Q_y^{(k)}$. В результате система уравнений (1.5), (2.2), (2.3), соответствующая основному состоянию дополняется следующими уравнениями:

$$\partial Q_x^{(k)} / \partial x + \partial Q_y^{(k)} / \partial y - H_z^{(k)} + p_k = 0 \quad (k=2, 3, \dots) \quad (3.2)$$

$$Q_x^{(k)} = A_{55} \left[a_{1k} \left(u_1 + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + \sum_{n=2}^K a_{nk} \frac{\partial w_n}{\partial x} \right]$$

$$Q_y^{(k)} = A_{66} \left[a_{1k} \left(v_1 + \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) + \sum_{n=2}^K a_{nk} \frac{\partial w_n}{\partial y} \right]$$

$$H_z^{(k)} = b_{0k} \left(A_{31} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{32} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + b_{1k} \left(A_{31} \frac{\partial u_1}{\partial x} + A_{32} \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) + A_{33} \sum_{n=2}^K b_{nk} w_n \quad (3.3)$$

$$a_{1k} = \int_{-h/2}^{h/2} \chi_k dz, \quad a_{nk} = \int_{-h/2}^{h/2} \chi_n \chi_k dz$$

$$b_{0k} = \chi_k(h/2) - \chi_k(-h/2), \quad b_{1k} = \int_{-h/2}^{h/2} \chi_k' z dz$$

$$b_{nk} = \int_{-h/2}^{h/2} \chi_n' \chi_k' dz$$

Система уравнений (1.5), (2.2), (2.3) и (3.2), (3.3) имеет порядок равный $10+2(K-1)$. Можно показать, что уравнения равновесия (1.5) и (3.2) являются условиями минимума функционала Лагранжа; из которого следуют также естественные граничные условия (2.6) и $(K-1)$ условий вида

$$\begin{aligned} Q_x^{(k)} \delta w_k &= 0 \text{ при } x = \text{const}; \\ Q_y^{(k)} \delta w_k &= 0 \text{ при } y = \text{const} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из равенств (3.1) и условий (2.5), (3.4) следует, что на защемленном краю $u=0, v=0, w=0$, т. е. рассматриваемая теория является энергетически согласованной. Этим свойством обладает и следующая из нее широко распространенная теория, основанная на линейной аппроксимации перемещений: $u = u_0 + u_1 z, v = v_0 + v_1 z, w = w_0 + w_1 z$.

4. Условия согласованности. Перейдем к выводу условий согласованности разложений (1.4). Рассмотрим поперечные касательные напряжения τ_{xz} и запишем их с учетом равенств (1.2) и (1.4) в виде

$$\tau_{xz} = A_{55} \left(\sum_{i=1}^I u_i \varphi_i' + \sum_{n=1}^K \frac{\partial w_n}{\partial x} \chi_n \right) \quad (4.1)$$

Найдем обобщенные поперечные усилия (1.8)

$$Q_x^{(k)} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \chi_k dz = A_{55} \left(\sum_{i=1}^I c_{ik} u_i + \sum_{n=1}^K a_{nk} \frac{\partial w_n}{\partial x} \right) \quad (4.2)$$

$$c_{ik} = \int_{-h/2}^{h/2} \varphi_i' \chi_k dz, \quad a_{nk} = \int_{-h/2}^{h/2} \chi_n \chi_k dz$$

Введем обратную матрицу a_{mk}^{-1} :

$$\sum_{k=1}^K a_{mk}^{-1} a_{nk} = \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & (n=m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases} \quad (4.3)$$

Тогда с помощью равенства (4.2) получим

$$\sum_{k=1}^K a_{mk}^{-1} Q_x^{(k)} = A_{55} \left(\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^I a_{mk}^{-1} c_{ik} u_i + \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^K a_{mk}^{-1} a_{nk} \frac{\partial w_n}{\partial x} \right)$$

Отсюда с учетом условия (4.3) найдем

$$\frac{\partial w_m}{\partial x} = \frac{1}{A_{55}} \sum_{k=1}^K a_{mk}^{-1} Q_x^{(k)} - \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^I a_{mk}^{-1} c_{ik} u_i \quad (4.4)$$

Подставляя (4.4) в (4.1), получим следующее выражение для касательного напряжения

$$\tau_{xz} = A_{55} \sum_{i=1}^I u_i F_i(z) + \sum_{n=1}^K \sum_{k=1}^K a_{nk}^{-1} Q_x^{(k)} \chi_n(z) \quad (4.5)$$

$$F_i(z) = \varphi_i' - \sum_{n=1}^K \sum_{k=1}^K a_{nk}^{-1} c_{ik} \chi_n \quad (4.6)$$

Пусть теперь χ_n ($n=1, 2, \dots$) является бесконечной и полной системой функций. Тогда из равенства (4.5) следует, что напряжение τ_{xz} может быть представлено в виде суммы разложений по функциям $\chi_n(z)$ и функциям $F_i(z)$ (4.6). Умножая равенство (4.5) на χ_k , интегрируя по толщине плиты и учитывая первое соотношение (4.2) и условия (4.3), можно доказать, что функции $F_i(z)$ ортогональны системе функций χ_n . Таким образом, функции $F_i(z)$ образуют подпространство, ортогональное функциональному пространству χ_n и в соответствии с определением полноты [1] первая сумма в равенстве (4.5) при $K \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Учитывая этот результат и опираясь на теорему о наилучшем приближении [2], потребуем, чтобы при конечном значении K выполнялось условие $F_i(z) \equiv 0$. Для этого достаточно принять $\varphi_i' = \chi_i$. Действительно, тогда $c_{ik} = a_{ik}$ и с учетом условия (4.3) получим $F_i(z) \equiv 0$. Аналогичным образом, рассматривая напряжение τ_{yz} , можно получить условие $\psi_j' = \chi_j$.

Таким образом, имеют место следующие условия согласования разложений (1.4) для плит

$$i=j=k, \quad \varphi_i' = \psi_i' = \chi_i \quad (i \geq 2) \quad (4.7)$$

Покажем, что проблема определения формы согласованных разложений, соответствующей кинематике в энергетически согласованной теории пластин решается однозначно, если заданы разложения для тангенциаль-

ных перемещений. Пусть, например, имеют место разложения

$$u = u_0 + \sum_{i=1}^I u_i \varphi_i(z), \quad v = v_0 + \sum_{i=1}^I v_i \varphi_i(z) \quad (4.8)$$

с заданным набором функций $\varphi_i(z)$. Требуется установить, последовательность функций $\chi_k(z)$ в третьем разложении (1.4). Воспользуемся равенством $F_i=0$, гарантирующим наилучшую аппроксимацию касательных напряжений τ_{xz} для любого фиксированного I . Вводя обратную матрицу c_{ik}^{-1} , найдем

$$\chi_i = \sum_{k=1}^K \sum_{s=1}^I a_{ik} c_{ik}^{-1} \varphi_i'$$

Подставляя полученное выражение χ_i в разложение (1.4) для перемещения w , получим

$$w = \sum_{k=1}^K w_k \chi_k = \sum_{i=1}^I \left(\sum_{k=1}^K \sum_{s=1}^K w_k a_{ks} c_{is}^{-1} \right) \varphi_i' = \sum_{i=1}^I w_{1i} \varphi_i' \quad (4.9)$$

$$w_{1i} = \sum_{k=1}^K \sum_{s=1}^K w_k a_{ks} c_{is}^{-1}$$

Из (4.9) следует, что независимо от величины K число членов в разложении для w будет равно I , т. е. совпадать с числом членов в разложениях (4.8) для u и v .

Обобщим полученные результаты на оболочки. В координатах совпадающих с линиями кривизны, равенство (4.1) имеет вид

$$\tau_{xz} = \frac{A_{55}}{1+z/R_1} \left\{ \sum_{i=1}^I u_i \left[\left(1 + \frac{z}{R_1} \right) \varphi_i' - \frac{\varphi_i}{R_1} \right] + \frac{1}{A_1} \sum_{k=1}^K \frac{\partial w_k}{\partial x} \chi_k \right\}$$

где A_1 и R_1 — коэффициент первой квадратичной формы и главный радиус кривизны срединной поверхности. Окончательно получим следующие условия согласования

$$(1+z/R_1) \varphi_i' - \varphi_i/R_1 = \chi_i, \quad (1+z/R_2) \psi_i' - \psi_i/R_2 = \chi_i \quad (4.10)$$

При $\varphi_i = \psi_i = z$ отсюда следует $\chi_i = 1$, т. е. основное состояние оболочки соответствует разложениям (2.1) для плиты. При выводе равенств (4.10) предполагалось, что функции χ_i не зависят от переменных x и y . Поскольку в общем случае радиусы кривизны R_1 и R_2 зависят от этих переменных, то функции φ_i и ψ_i также будут от них зависеть и разложения (1.4) примут вид

$$u = u_0 + \sum_{i=1}^I u_i(x, y) \varphi_i(x, y, z)$$

$$v = v_0 + \sum_{i=1}^I v_i(x, y) \psi_i(x, y, z), \quad w = \sum_{i=1}^I w_i(x, y) \chi_i(z)$$

В связи с определением характера распределений перемещений по толщине отметим работу [6], в которой на основе асимптотического анализа установлено, что для толстых оболочек распределение тангенциальных перемещений по толщине определяется полиномом третьей степени, а прогиба — полиномом второй степени. Аналогичный закон использован в [7]. Это распределение полностью соответствует условиям (4.7) для пластин и вытекает из условий (4.10) для оболочек, если пренебречь членами, содержащими радиусы кривизны.

5. Уравнения уточненной теории однородных ортогогранных пластин. С учетом условий (4.7) уравнения (1.6) принимают вид

$$\frac{\partial M_x^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^{(i)}}{\partial y} - Q_x^{(i)} = 0, \quad \frac{\partial M_y^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}^{(i)}}{\partial x} - Q_y^{(i)} = 0$$

$$\partial Q_x^{(i)} / \partial x + \partial Q_y^{(i)} / \partial y - H_z^{(i)} + p_i = 0 \quad (5.1)$$

где согласно равенствам (1.2), (1.4), (1.8) и (4.7) (суммирование по j):

$$M_x^{(i)} = \Sigma [a_{ij} (A_{11} \partial u_j / \partial x + A_{12} \partial v_j / \partial y) + A_{13} b_{ij} w_j]$$

$$M_y^{(i)} = \Sigma [a_{ij} (A_{21} \partial u_j / \partial x + A_{22} \partial v_j / \partial y) + A_{23} b_{ij} w_j]$$

$$M_{xy}^{(i)} = A_{44} \Sigma a_{ij} (\partial u_j / \partial y + \partial v_j / \partial x)$$

$$Q_x^{(i)} = A_{55} \Sigma c_{ij} (u_j + \partial w_j / \partial x),$$

$$Q_y^{(i)} = A_{66} \Sigma c_{ij} (v_j + \partial w_j / \partial y)$$

$$H_z^{(i)} = \Sigma [b_{ij} (A_{31} \partial u_j / \partial x + A_{32} \partial v_j / \partial y) + A_{33} d_{ij} w_j]$$

$$a_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \varphi_i \varphi_j dz, \quad b_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \varphi_i \chi_j' dz = \int_{-h/2}^{h/2} \varphi_i \varphi_j'' dz$$

$$c_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \chi_i \varphi_j' dz = \int_{-h/2}^{h/2} \varphi_i' \varphi_j' dz = \int_{-h/2}^{h/2} \chi_i \chi_j dz$$

$$d_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \chi_i' \chi_j' dz = \int_{-h/2}^{h/2} \varphi_i'' \varphi_j'' dz$$

Система (5.1), (5.2) может получена из условия минимума функционала Лагранжа

$$\delta L = \iint \sum_i (M_x^{(i)} \delta \kappa_x^{(i)} + M_y^{(i)} \delta \kappa_y^{(i)} + M_{xy}^{(i)} \delta \kappa_{xy}^{(i)} +$$

$$+ Q_x^{(i)} \delta \gamma_x^{(i)} + Q_y^{(i)} \delta \gamma_y^{(i)} + H_z^{(i)} \delta w_i - p_i \delta w_i) dx dy = 0 \quad (5.3)$$

где

$$\kappa_x^{(i)} = \frac{\partial u_i}{\partial x}, \quad \kappa_y^{(i)} = \frac{\partial v_i}{\partial y}, \quad \kappa_{xy}^{(i)} = \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x}$$

$$\gamma_x^{(i)} = u_i + \partial w_i / \partial x, \quad \gamma_y^{(i)} = v_i + \partial w_i / \partial y$$

Из условия (5.3) можно получить также следующие естественные граничные условия

$$M_x^{(i)} \delta u_i = 0, \quad M_{xy}^{(i)} \delta v_i = 0, \quad Q_x^{(i)} \delta w_i = 0 \quad \text{при } x = \text{const} \quad (5.4)$$

$$M_y^{(i)} \delta v_i = 0, \quad M_{xy}^{(i)} \delta u_i = 0, \quad Q_y^{(i)} \delta w_i = 0 \quad \text{при } y = \text{const}$$

Эти условия обеспечивают отсутствие перемещений на заземленном краю пластины и соответствуют порядку системы (5.1), (5.2).

Таким образом, энергетически согласованная уточненная теория ортогогранных пластин определяется уравнениями (5.1), (5.2) и граничными условиями (5.4). Если в разложениях для перемещений

$$u = u_0 + u_1 z + \sum_{i=2}^I u_i \varphi_i(z), \quad v = v_0 + v_1 z + \sum_{i=2}^I v_i \varphi_i(z)$$

$$w = w_1 + \sum_{i=2}^I w_i \varphi_i'(z)$$

удержаны все члены, то порядок разрешающей системы уравнений оказывается равным $4+6I$.

6. Пример. Рассмотрим квадратную изотропную плиту с относительной толщиной $h/a=0,2$, для которой в [5] приведено точное решение. Плита свободно оперта по сторонам с длиной a и нагружена по поверхности $z=h/2$ давлением

$$q = \frac{16q_0}{\pi^2 m n} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a}$$

В качестве функций φ_i в соотношениях (5.5) примем полиномы Лежандра, ортогональные на интервале $[-h/2, h/2]$. Ограничиваясь первым слагаемым в суммах равенств (5.5) и учитывая, что для рассматриваемой плиты $u_0=v_0=0$, получим

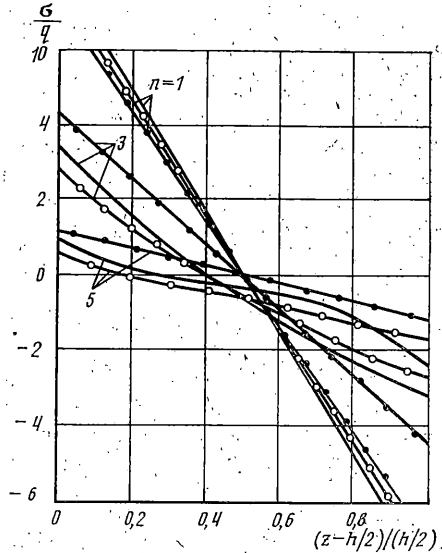
$$u = \frac{2z}{h} u_1(x, y) + \frac{1}{2} \left(\frac{12z^2}{h^2} - 1 \right) u_2(x, y)$$

$$v = \frac{2z}{h} v_1(x, y) + \frac{1}{2} \left(\frac{12z^2}{h^2} - 1 \right) v_2(x, y)$$

$$(6.1)$$

$$w = \frac{2}{h} w_1(x, y) + \frac{12z}{h^2} w_2(x, y)$$

На фиг. 2 показано изменение напряжения $\sigma_x(a/2, a/2, z)$ по толщине плиты при $m=1$ и $n=1, 3, 5$. Сплошные линии соответствуют точному решению [8], линии с точками — основному состоянию, а со светлыми кружочками — решению, основанному на разложениях (6.1). Следует отметить, что ординаты, соответствующие $n=3$ и $n=5$, увеличены в 10 раз. Из графика следует, что соотношения (6.1) позволяют точно описать распределение напряжений по толщине.



Фиг. 2

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Reissner E. On the theory of bending of elastic plates // J. Math. and Phys. 1944. V. 23. No. 4. P. 184-191.
2. Reissner E. The effects of transverse shear deformation on the bending of elastic plates // J. of Appl. Mech. V. 12. No. 2. Trans. ASME. 1945. V. 67. P. 69-77.
3. Mindlin R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plates // J. Appl. Mech. 1951. V. 18. No. 1. P. 31-38.
4. Функциональный анализ / Под ред. С. Г. Крейна. М.: Наука, 1964.
5. Талдыкин А. Т. Элементы прикладного функционального анализа. М.: Высш. шк., 1982. 383 с.
6. Gamby D., Chung-Nam B. N. Generalized Kirchhoff - Love assumptions for thick shells: application to thermal stresses in rectilinear tubes // Acta Mech. 1988. V. 74. No. 1-4. P. 95-106.
7. Lo K. H., Christensen R. M., Wu E. M. A high-order theory of plate deformation // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1977. V. 44. No. 4. P. 663-676.
8. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д. Статика анизотропных толстостенных оболочек. Киев. Вища шк., 1985. 190 с.

Москва

Поступила в редакцию
1.X.1989