

УДК 539.375

© 1990 г.

В. А. ВАЙНШТОК, И. В. ВАРФОЛОМЕЕВ

РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНО НАГРУЖЕННЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ И ПОДПОВЕРХНОСТНЫХ ТРЕЩИН

Получена полная система уравнений метода весовых функций для расчета коэффициентов интенсивности напряжений вдоль фронта трещины эллиптического типа (эллиптической, полуэллиптической) при произвольном нормальном нагружении. Приведены результаты расчета коэффициентов интенсивности напряжений для нагрузки, изменяющейся как в направлении малой, так и в направлении большой полуоси эллипса.

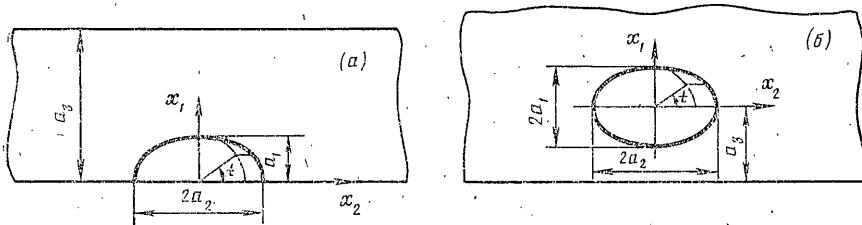
1. Аналитические решения задач линейной механики разрушения для поверхностной полуэллиптической трещины и эллиптической (подповерхностной) трещины в теле конечных размеров не найдены. С использованием различных численных методов получены распределения коэффициентов интенсивности напряжений вдоль фронта указанных трещин при однородной, а также линейно изменяющейся по толщине слоя нагрузке (см., например, [1–4]). В то же время отсутствуют какие-либо данные о значениях коэффициентов интенсивности напряжений для поверхностной и подповерхностной трещин в том случае, когда нагрузка несимметрична относительно оси трещины, ортогональной границе слоя.

Коэффициенты интенсивности напряжений для трещины в неоднородном поле напряжений могут быть найдены, если известна весовая функция [5, 6]. Подходы к построению весовых функций для трехмерных конфигураций тел с трещинами описаны, например, в [7, 8], где трехмерная задача сводится к двумерной путем формального введения осредненных значений весовых функций и коэффициентов интенсивности напряжений. Найденное в результате такого подхода решение для поля смещений берегов трещины и осредненных коэффициентов интенсивности напряжений в характерных точках фронта трещины не удовлетворяет строгому уравнению энергетического баланса [6]. Кроме того, методика расчета коэффициентов интенсивности напряжений, описанная в [7, 8], не позволяет анализировать случаи произвольного нормального нагружения берегов трещины; так, в соответствии с [7, 8], для полуэллиптической трещины при кососимметричной нормальной нагрузке на берегах значения коэффициентов интенсивности напряжений равны нулю, что, очевидно, является ошибочным результатом.

В настоящей работе предложен подход, в рамках которого уравнение метода весовых функций [6] сводится к системе линейных алгебраических уравнений для расчета распределения K_I вдоль фронта поверхностной полуэллиптической и подповерхностной эллиптической трещин при произвольном нагружении.

2. Рассмотрим линейно-упругое тело, содержащее трещину эллиптического типа с полуосями a_1 , a_2 и площадью S , ограниченной контуром Γ . Согласно [6], коэффициенты интенсивности напряжений K_0 и K_n при однородном (σ_0) и неоднородном (σ_n) нагружении берегов трещины связаны уравнением

$$\int_{\Gamma} \frac{K_0 K_n}{H} \delta R \cos \varphi d\Gamma = \int_S \sigma_n \delta u_0 dS \quad (1)$$



Фиг. 1

где H — обобщенный модуль Юнга, R — расстояние от центра эллипса до фронта трещины, u_0 — раскрытие берегов трещины под действием однородной нагрузки, φ — острый угол между направлением полярного радиуса и нормалью к Γ в данной точке, δR и δu_0 — вариации соответствующих величин при варьировании Γ . Величина δu_0 является трехмерным аналогом весовых функций, рассмотренных в двумерной постановке в [5, 6].

Выражение для u_0 , удовлетворяющее условиям энергетического баланса, неразрывности перемещений и асимптотическому решению линейной механики разрушения, согласно [9], имеет вид

$$u_0 = \frac{2\sigma_0 a_1}{E(k)H} [f(1-\rho^2)^{1/2} + F(1-\rho^2)^{1/2}] \quad (2)$$

$$F = \frac{5\pi}{2E(k)} \beta^{-3} T^{-1} \int_0^{\beta} \int_0^T f^2 \beta^2 (\sin^2 t + \alpha^2 \cos^2 t)^{1/2} d\beta dt - \frac{2}{3} T^{-1} \int_0^T f dt - f \quad (3)$$

$$\alpha = a_1/a_2, \quad k^2 = 1 - \alpha^2, \quad \beta = a_1/a_3$$

$$\rho = r/R, \quad \operatorname{tg} \theta = \alpha \operatorname{tg} t, \quad f = K_0/K_e$$

где (r, θ) — полярная система координат с началом в центре эллипса, t — параметрический угол, $t \in [0, T]$, $T = \pi$ — для полуэмпирической и $T = 2\pi$ — для эллиптической трещины. $E(k)$ — полный эллиптический интеграл второго рода, K_e — коэффициент интенсивности напряжений при однородном нагружении берегов эллиптической трещины в бесконечной среде [4]. Величина a_3 представляет собой характерный линейный размер тела; для случая поверхностной трещины ее целесообразно положить равной толщине тела, для случая подповерхностной трещины — расстоянию от центра эллипса до границы тела (фиг. 1).

В уравнении (1) с учетом (2), (3) неизвестной является лишь искомая величина K_n . Введем далее следующие обозначения:

$$K_n = \psi_n K_0, \quad \sigma_n = \sigma_0 p$$

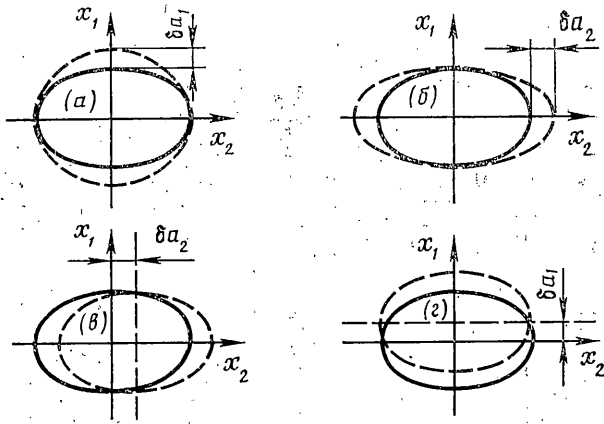
$$\delta R = \mu (\sin^2 \theta + \alpha^2 \cos^2 \theta)^{-1/2} \delta a_m \quad (4)$$

$$\delta u_0 = \kappa^{-1} w \delta a_m, \quad \kappa = EH(2\sigma_0)^{-1}$$

где a_m — варьируемый параметр ($m=1, 2$), μ и w — функции, зависящие от способа варьирования (трансляции) Γ .

Подставив (4) в (1) с учетом (2), получим уравнение относительно ψ_n :

$$\int_0^T \psi_n f^2 \mu (\sin^2 t + \alpha^2 \cos^2 t)^{1/2} dt = \frac{2E}{\pi} \int_0^1 \int_0^T p w \rho d\rho dt \quad (5)$$



Фиг. 2

Пусть L — число линейно независимых способов трансляции Γ , при которых трещина сохраняет эллиптическую форму. Тогда ψ_n можно представить в виде суммы

$$\psi_n(t, \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^L A_i(\alpha, \beta) \omega_i(t) \quad (6)$$

где ω_i — линейно независимые функции. После подстановки (6) в (5) из (1) получим систему уравнений относительно коэффициентов A_i (l — индекс трансляции):

$$\sum_{i=1}^L A_i \int_0^{\pi} \omega_i^2 \mu^{(l)} (\sin^2 t + \alpha^2 \cos^2 t)^{1/2} dt = \frac{2E}{\pi} \int_0^1 \int_0^{\pi} p w^{(l)} \rho d\rho dt \quad (l=1, \dots, L) \quad (7)$$

3. Для поверхностной трещины (фиг. 1а) возможны три независимые трансляции Γ , связанные с изменением размеров полуосей a_1 ($l=1$) и a_2 ($l=2$) эллипса, а также виртуальным смещением трещины как жесткого целого в направлении координатной оси Ox_2 ($l=3$) (фиг. 2, а-в). Для этих трансляций функции μ и w имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mu^{(1)} &= \sin^2 t, & w^{(1)} &= \kappa \left(\frac{\beta}{a_1} \frac{\partial u_0}{\partial \beta} + \frac{\alpha}{a_1} \frac{\partial u_0}{\partial \alpha} \right) \\ \mu^{(2)} &= \cos^2 t, & w^{(2)} &= \kappa \left(-\frac{\alpha}{a_1} \frac{\partial u_0}{\partial \alpha} \right) \\ \mu^{(3)} &= \cos t, & w^{(3)} &= \kappa \left(-\frac{1}{\alpha} \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, в общем случае нормального нагружения берегов полуэллиптической трещины выражения (7) и соответствующие соотношения (8) дают систему трех линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_i ряда (6). Рассмотрим два частных случая решения полученной системы.

1. $p(x_1, x_2) = p(x_1, -x_2)$. Из симметрии задачи следует, что $\psi_n(t) = -\psi_n(\pi - t)$. Тогда третье уравнение (7) обращается в тождество, что снижает порядок системы до $L=2$ ($l=1, 2$). Процедура определения ψ_n для этого случая описана в [9].

2. $p(x_1, x_2) = -p(x_1, -x_2)$. Очевидно, что $\psi_n(t) = -\psi_n(\pi - t)$; тогда первые два уравнения (7) удовлетворяются тождественно, и определение ψ_n сводится к решению одного уравнения, соответствующего $l=3$.

α	$2t/\pi$	$\beta=0$	0,25	0,5	0,75	0 [10]
0,2	0	0,9002	0,8334	0,7111	0,6208	0,9227
	0,25	0,8317	0,7699	0,6569	0,5735	0,8571
	0,5	0,6365	0,5893	0,5028	0,4389	0,6560
	0,75	0,3445	0,3189	0,2721	0,2376	0,3550
	1,0	0	0	0	0	0
0,5	0	0,7665	0,7349	0,6670	0,6066	0,7935
	0,25	0,7081	0,6789	0,6162	0,5604	0,7331
	0,5	0,5420	0,5196	0,4716	0,4289	0,5611
	0,75	0,2933	0,2812	0,2552	0,2321	0,3037
	1,0	0	0	0	0	0
1,0	0	0,6445	0,6311	0,5980	0,5581	0,6667
	0,25	0,5954	0,5831	0,5525	0,5156	0,6159
	0,5	0,4557	0,4463	0,4228	0,3947	0,4714
	0,75	0,2466	0,2415	0,2288	0,2136	0,2551
	1,0	0	0	0	0	0

В качестве примера рассмотрим полуэллиптическую трещину под действием нагрузки

$$p = x_2/a_2 = \rho \cos t \quad (9)$$

нечетной относительно оси Ox_1 . В этом случае ($L=1, l=3$) положим $\psi_n = A \cos t$, где коэффициент A определяется после подстановки третьей пары соотношений (8) в уравнение (7):

$$A = \frac{2E}{\pi} \left[\int_0^1 \int_0^T \rho^2 \cos t \left(-\frac{\kappa}{\alpha} \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \right) d\rho dt \right] \left[\int_0^T f^2 \cos^2 t (\sin^2 t + \alpha^2 \cos^2 t)^{1/2} dt \right]^{-1}$$

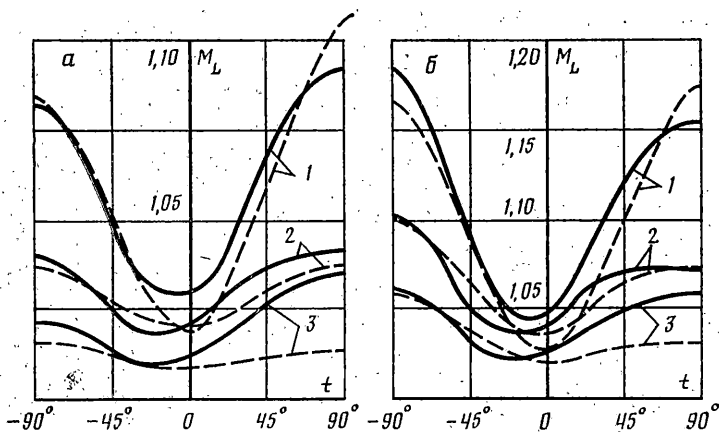
Отметим, что данные численных расчетов коэффициентов интенсивности напряжений при несимметричном нагружении берегов полуэллиптической трещины в литературе отсутствуют. В табл. 1 представлены результаты расчета функции ψ_n для нагрузки (9) при значениях $\alpha=0,2; 0,5; 1,0$, $\beta=0,0; 0,25; 0,5; 0,75$, $0 \leq t \leq \pi/2$, полученные с помощью метода весовых функций (при этом для аппроксимации f использована эмпирическая формула [1]). При определении ψ_n также использовалась обобщенная гипотеза [10], в соответствии с которой величина ψ_n для поверхностной трещины в полупространстве равна соответствующей величине для эллиптической трещины в бесконечной среде, нагруженной симметрично относительно оси Ox_2 . По данным табл. 1, погрешность гипотезы [10] при $\beta=0$ составляет 4%. Для тел конечной толщины ($\beta \neq 0$) метод весовых функций позволяет получить корректные значения ψ_n , а гипотеза [10] использоваться не может.

4. Для эллиптической трещины (фиг. 1, б) кроме рассмотренных выше трансляций Γ возможно виртуальное смещение трещины как жесткого целого в направлении координатной оси Ox_1 ($l=4$) (см. фиг. 2, з). Отсюда следует, что для эллиптической трещины функция ψ_n может быть определена из системы четырех уравнений (7). Для эллиптической трещины в полупространстве функции $\mu^{(4)}$ и $w^{(4)}$ определяются выражениями

$$\mu^{(4)} = \sin t, \quad w^{(4)} = \kappa \left(-\frac{\beta^2}{a_1} \frac{\partial u_0}{\partial \beta} - \frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right)$$

1. Рассмотрим подповерхностную трещину в полупространстве под действием линейной нагрузки $p=1-x_1/a_1$. В этом случае третье уравнение (7) удовлетворяется тождественно ($L=3, l=1, 2, 4$). Коэффициент интенсивности напряжений представим в виде [4]

$$K_n = M_L \{1 - k^2 E(k) [(1+k^2) E(k) - \alpha^2 K(k)]^{-1} \sin t\} K_e$$



Фиг. 3

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Результаты вычисления поправочной функции M_L методами весовых функций (для аппроксимации f использовались численные данные [3]), а также альтернирования [4] приведены на фиг. 3 для значений геометрических параметров $\beta=0,6$ (фиг. 3, а), $\beta=0,75$ (фиг. 3, б), $\alpha=0,2; 0,6; 1,0$ (кривые 1–3 соответственно). Отличие данных настоящей работы (сплошные линии) от численного решения [4] (штриховые линии) не превышает 3%.

2. Рассмотрим подповерхностную трещину в полупространстве под действием линейной нагрузки $p=x_2/a_2$. В этом случае первые два уравнения (7) удовлетворяются тождественно ($L=2, l=3, 4$). Поправочную

Таблица 2

α	β	$t=-\pi/3$	$t=-\pi/6$	$t=0$	$t=\pi/6$	$t=\pi/3$
0,2	0	0,4638	0,8034	0,9277	0,8034	0,4638
	0,4	0,4603	0,7957	0,9169	0,7930	0,4577
	0,6	0,4555	0,7828	0,8966	0,7727	0,4454
	0,75	0,4517	0,7707	0,8762	0,7517	0,4327
	0,9	0,4523	0,7599	0,8498	0,7216	0,4140
0,5	0	0,3968	0,6872	0,7935	0,6872	0,3968
	0,4	0,3959	0,6876	0,7867	0,6799	0,3923
	0,6	0,3936	0,6733	0,7676	0,6596	0,3799
	0,75	0,3936	0,6662	0,7510	0,6409	0,3683
	0,9	0,3985	0,6629	0,7336	0,6188	0,3543
1,0	0	0,3333	0,5773	0,6667	0,5773	0,3333
	0,4	0,3332	0,5761	0,6639	0,5742	0,3314
	0,6	0,3338	0,5729	0,6554	0,5644	0,3253
	0,75	0,3364	0,5709	0,6455	0,5519	0,3174
	0,9	0,3440	0,5717	0,6318	0,5324	0,3048

функцию ψ_n представим в виде $\psi_n=A_3(1-\sin t)^2 \cos t + A_4 \cos t$. Результаты вычисления ψ_n при $\alpha=0,2; 0,5; 1,0, \beta=0-0,9$ приведены в табл. 2 (при этом очевидно, что $\psi_n(\pm\pi/2)=0$). Как свидетельствуют данные табл. 2, для подповерхностной трещины в рассмотренном диапазоне изменения конфигурационных параметров величина поправки на неоднородность напряженного состояния может отличаться на 10% и более от соответствующей величины для трещины в бесконечной среде.

Таким образом, используя метод весовых функций, определение коэффициентов интенсивности напряжений вдоль фронта трещин эллиптического типа при произвольном нормальном нагружении сводится к ре-

шению системы линейных уравнений (7). Максимальное число независимых уравнений системы определяется типом трещины: $L=3$ — для полуэллиптической, $L=4$ — для эллиптической трещины. В частных случаях симметричного или косимметричного нагружения берегов трещины порядок системы снижается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Newman J. C., Jr., Raju I. S. An empirical stress intensity factor equation for the surface crack // Eng. Fract. Mech. 1984. V. 15. No. 1/2. P. 185—192.
2. Isida M., Noguchi H. Tension of a plate containing an embedded elliptical crack // Eng. Fract. Mech. 1984. V. 20. No. 3. P. 387—408.
3. Shah R. C., Kobayashi A. S. Stress intensity factors for an elliptical crack approaching the surface of a semi-infinite solid // Intern. J. Fract. 1973. V. 9. No. 2. P. 133—146.
4. Shah R. C., Kobayashi A. S. Stress intensity factor for an elliptical crack approaching the surface of a plate in bending.— Stress Analysis and Growth of Cracks. Philadelphia: ASTM, 1972. ASTM STP 513. P. 3—21.
5. Bueckner H. A novel principle for the computation of stress intensity factors // Z. angew. Math. und Mech. 1970. Bd. 50. H. 9. S. 529—546.
6. Rice J. R. Some remarks on elastic crack-tip fields // Intern. J. Solids and Struct. 1972. V. 8. No. 6. P. 751—758.
7. Cruse T., Besuner P. Residual life prediction for surface cracks in complex structural details // J. Aircraft. 1975. V. 12. No. 4. P. 369—375.
8. Mattheck C., Morawietz P., Munz D. Stress intensity factor at the surface and at the deepest point of a semi-elliptical surface crack in plates under stress gradients // Intern. J. Fract. 1983. V. 23. No. 3. P. 201—212.
9. Вайншток В. А., Варфоломеев И. В. Расчет весовых функций и коэффициентов интенсивности напряжений для полуэллиптической трещины в слое // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 2. С. 132—139.
10. Chell G. G. The stress intensity factors for part through thickness embedded and surface flaws subject to a stress gradient // Eng. Fract. Mech. 1976. V. 8. No. 2. P. 331—340.

Киев

Поступила в редакцию
19.1.1988.