

УДК 539.374

© 1990 г.

Л. Х. ТАЛЫБЛЫ

## К ВОПРОСУ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

Выведено уравнение, характеризующее кинетический процесс (в том числе, многостадийный) накопления повреждений применительно к материалам, в которых этот процесс в зависимости от уровня напряжений и температуры начинается спустя некоторое инкубационное время после начала процесса деформирования. Получено условие длительной прочности, определяющее время до разрушения и условие неповрежденности тела при заданных от времени напряжениях и температурах. Последнее определяет время начала появления в теле повреждений. Приведены определяющие уравнения вязкоупругой среды, описывающие процесс деформирования до и после времени начала процесса накопления повреждений, вплоть до разрушения. При заданных внешних воздействиях предложена новая общая постановка задачи теории длительной прочности.

**1. Кинетика накопления повреждений.** Известно, что в процессе деформирования вязкоупругих тел происходит накопление повреждений [1–8], при достижении определенного уровня которых происходит разрушение. Обратим внимание на следующий экспериментальный факт: процесс накопления повреждений начинается спустя некоторое инкубационное время после начала процесса деформирования, причем это время существенно зависит от уровня напряжений и температуры [9, 10]. Например, по данным [9], время предшествующее накоплению повреждений для полиэтилена высокой плотности (ПЭВП) — полимерного материала при температуре 338 К и напряжении 3,92 МПа составляет 0,74 от долговечности образца.

В существующих теориях длительной прочности предполагается, что с началом деформирования начинается и накопление повреждений. Отмеченное условие не позволяет определить истинное время начала накопления повреждений. Между тем, это время должно быть определено с целью нахождения границ применимости тех или иных определяющих уравнений материала, для правильной постановки задачи в целом и в конечном итоге для определения границ безопасной работы исследуемой конструкции.

Пусть  $t'$  и  $t_*$  есть соответственно время, предшествующее накоплению повреждений и время до разрушения при изменении во времени полей температуры  $T(t, x_i)$  и напряжений  $\sigma_{ij}(t, x_i)$ , определяемым некоторым эквивалентным напряжением  $\sigma_*(t, x_i)$ . Аналогичные времена при неизменном во времени  $\sigma_* = \sigma_*^0$  и  $T = T_0$  обозначим через  $t_1$  и  $t_0$ . Эквивалентное напряжение введено с целью учета случая пространственного напряженного состояния. Оно является функцией инвариантных величин — среднего напряжения  $\sigma = \sigma_{ij} \delta_{ij} / 3$  и интенсивности напряжений  $\sigma_+ = (3s_{ij}s_{ij}/2)^{1/2}$ , где  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}$  — девиаторы тензора напряжений,  $\delta_{ij}$  — символы Кронекера. Приведем некоторые формулы для  $\sigma_*$ , заимствованные из [5]:

$$\sigma_* = \frac{3\sigma}{2} (1-\lambda) + \left[ \frac{9\sigma^2}{4} (1-\lambda) + \lambda \sigma_+^2 \right]^{1/2}, \quad \sigma_* = \frac{3\sigma}{2} (1-\lambda) + \frac{\sigma_+}{2} (1+\lambda)$$

Здесь  $\lambda = \text{const}$  (в частности  $\lambda = 1$ ) есть отношение предельных напряжений при простых растяжении и сжатии. Начальное состояние тела бу-

дем считать естественным, т. е. начальные напряжения, деформации при заданной начальной температуре  $T^0$  равны нулю, отсутствуют внешние воздействия.

Пусть степень поврежденности макрочастицы тела характеризуется величиной  $\Pi(t, x_i)$  (в дальнейших записях аргументы  $x_i$  опустим). При этом пока сохраняется начальное естественное состояние тела  $\Pi=0$ . Пусть теперь на некотором интервале времени  $0 \leq \tau \leq t$  заданы параметры нагружения  $\sigma_*(\tau), T(\tau)$ . Предполагаем, что  $\Pi(\tau)=0$  при временах  $0 \leq \tau \leq t'$ , при временах же  $t' \leq \tau \leq t_*$  величина  $\Pi$  однозначно определяется параметрами нагружения, причем она является функционалом, непрерывным относительно гладких  $\sigma_*(\tau), T(\tau)$ . В случае  $0 \leq \Pi < 1$ , что имеет место в интервале  $0 \leq \tau < t_*$ , состояние макрочастицы прочно. Разрушение наступает в момент  $t_*$ , при котором  $\Pi(t_*)=1$ .

Заметим, что приведенные здесь свойства повреждаемости согласуются со свойствами, сформулированными для этой величины в известной теории длительной прочности [2].

Рассмотрим функционал вида

$$\Pi = H(t-t') \left[ \xi_1(\sigma_*(t), T(t)) + \int_0^t M(t-\tau) \xi_2(\sigma_*(\tau), T(\tau)) d\tau \right] \quad (1.1)$$

где  $H(t)$  — функция Хевисайда, функции  $\xi_1, \xi_2, M$  предполагаются непрерывными по своим параметрам,  $t'$  определяется из условия  $\Pi(t')=0$ :

$$\xi_1(\sigma_*(t'), T(t')) + \int_0^{t'} M(t'-\tau) \xi_2(\sigma_*(\tau), T(\tau)) d\tau = 0 \quad (1.2)$$

Рассматриваем процесс монотонного (в широком смысле) нагружения. В этом случае при условии

$$\lim_{\sigma_* \rightarrow 0, T \rightarrow T^0} \xi_2(\sigma_*, T) = 0 \quad (1.3)$$

функционал (1.1) характеризует повреждаемость, свойства которого приведены выше. (Условие (1.3) диктуется тем свойством  $\Pi$ , что  $\Pi=0$  при сохранении начального естественного состояния тела.) При этом соотношение (1.2) есть условие, в случае выполнения которого в вязкоупругом теле отсутствует повреждение при наличии  $\sigma_*(t), T(t)$ . Оно определяет время  $t'$ , предшествующее накоплению повреждений.

Время до разрушения  $t_*$  находится из (1.1) при условии  $\Pi(t_*)=1$ :

$$\xi_1(\sigma_*(t_*), T(t_*)) + \int_0^{t_*} M(t_*-\tau) \xi_2(\sigma_*(\tau), T(\tau)) d\tau = 1 \quad (1.4)$$

Соотношение (1.4) является условием длительной прочности при заданных параметрах нагружения  $\sigma_*(t), T(t)$ .

Теперь задача состоит в нахождении функций  $\xi_1, \xi_2, M$ . Воспользуемся результатами опытов на длительное разрушение в условиях ползучести при простейшем виде деформации (при растяжении (сжатии) или чистом сдвиге). Пусть такие опыты соответствуют различным постоянным напряжениям  $\sigma_* = \sigma_*^{(v)}$  и температурам  $T = T_\mu$  и пусть при этом, следуя [9, 10], определены время, предшествующее накоплению повреждений — функция  $t_1 = t_1(\sigma_*^{(v)}, T_\mu)$  и время до разрушения — долговечность  $t_0 = t_0(\sigma_*^{(v)}, T_\mu)$ . Методика определения функции  $t_0(\sigma_*, T)$  известна. Функция же  $t_1(\sigma_*, T)$  может быть найдена различными методами, например, регистрацией начала сигналов акустической эмиссии [10] или регистрацией первых разорванных химических связей методом инфракрасной спектроскопии [9].

Из соотношения (1.2) и (1.4) при различных постоянных  $\sigma_* = \sigma_*^{(v)}$  и

$T=T_\mu$  (в этом случае  $t'$  переходит на  $t_1$ ,  $t_*$  — на  $t_0$ ) определим функции  $\xi_1$  и  $\xi_2$ :

$$\xi_1(\sigma_*^{(v)}, T_\mu) = - \int_0^{t_1(\sigma_*^{(v)}, T_\mu)} M(\xi) d\xi \left( \int_{t_1(\sigma_*^{(v)}, T_\mu)}^{t_0(\sigma_*^{(v)}, T_\mu)} M(\xi) d\xi \right)^{-1},$$

$$\xi_2(\sigma_*^{(v)}, T_\mu) = \left( \int_{t_1(\sigma_*^{(v)}, T_\mu)}^{t_0(\sigma_*^{(v)}, T_\mu)} M(\xi) d\xi \right)^{-1} \quad (1.5)$$

Как видим,  $\xi_1$  и  $\xi_2$  связаны с материальными функциями  $t_0(\sigma_*, T)$ ,  $t_1(\sigma_*, T)$  и  $M(t)$ . Свойства функций  $t_0(\sigma_*, T)$  и  $t_1(\sigma_*, T)$  таковы:  $t_i(\sigma_*, T) > 0$ ;  $\partial t_i / \partial \sigma_* < 0$ ;  $\partial t_i / \partial T < 0$ ; ( $i=0, 1$ ). При известных свойствах функций  $t_0(\sigma_*, T)$  и  $t_1(\sigma_*, T)$ , выбор функции  $M(t)$  диктуется выполнением условия (1.3). Применим теорему о среднем к интегралу во второй формуле (1.5). Получим

$$\xi_2(\sigma_*, T) = [t_0(\sigma_*, T) (1 - A(\sigma_*, T)) M(\theta t_0(\sigma_*, T))]^{-1}$$

$$0 \leq \theta \leq 1, A(\sigma_*, T) = t_1(\sigma_*, T) / t_0(\sigma_*, T), 0 \leq A(\sigma_*, T) < 1$$

Поскольку функция  $M(t) > 0$ , то из последнего соотношения следует, что условие (1.3) будет выполняться, если  $M(t)$  будет иметь порядок  $t^m$ , где  $m > -1$ . Функцию  $M(t)$  представим в виде

$$M(t) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i' t^{m_i} \quad (1.6)$$

Здесь константы  $M_i'$  должны обеспечить положительность  $M(t)$  при  $t > 0$ ,  $m_i > -1$  ( $i=0, 1, \dots, n-1$ ).

Из соотношения (1.5) при учете (1.6) определим функции  $\xi_1$  и  $\xi_2$  (заменив при этом  $\sigma_*^{(v)}$  на  $\sigma_*(t)$ ,  $T_\mu$  на  $T(t)$ ), используя которые, а также (1.6), преобразуем функционал (1.1) к виду (в дальнейшем знак суммы опустим и будем считать, что по любому повторяющемуся индексу произведено суммирование от 0 до  $n-1$ ):

$$\Pi(t) = H(t-t') \left\{ -M_i t_1^{1+m_i}(\sigma_*(t), T(t)) [t_0^{1+m_j}(\sigma_*(t), T(t)) - t_1^{1+m_j}(\sigma_*(t), T(t))]^{-1} \times \right.$$

$$\left. \times M_j^{-1} + M_k (1+m_k) \int_0^t [t_0^{1+m_r}(\sigma_*(\tau), T(\tau)) - t_1^{1+m_r}(\sigma_*(\tau), T(\tau))]^{-1} M_r^{-1} (t-\tau)^{m_k} d\tau \right\}$$

$$M_i = M_i' / (1+m_i) \quad (i, j, k, r=0, 1, \dots, n-1) \quad (1.7)$$

Уравнение (1.7) есть кинетическое уравнение накопления повреждений для макрочастицы вязкоупругого тела при  $\sigma_* = \sigma_*(t)$ ,  $T = T(t)$ .

Аналогичным образом могут быть преобразованы условия (1.2) и (1.4):

$$M_i t_1^{1+m_i}(\sigma_*(t'), T(t')) [t_0^{1+m_j}(\sigma_*(t'), T(t')) - t_1^{1+m_j}(\sigma_*(t'), T(t'))]^{-1} M_j^{-1} =$$

$$= M_k (1+m_k) \int_0^{t'} [t_0^{1+m_r}(\sigma_*(\tau), T(\tau)) - t_1^{1+m_r}(\sigma_*(\tau), T(\tau))]^{-1} M_r^{-1} (t'-\tau)^{m_k} d\tau \quad (1.8)$$

$$M_i t_0^{1+m_i}(\sigma_*(t_*), T(t_*)) [t_0^{1+m_j}(\sigma_*(t_*), T(t_*)) - t_1^{1+m_j}(\sigma_*(t_*), T(t_*))]^{-1} M_j^{-1} =$$

$$= M_k (1+m_k) \int_0^{t_*} [t_0^{1+m_r}(\sigma_*(\tau), T(\tau)) - t_1^{1+m_r}(\sigma_*(\tau), T(\tau))]^{-1} M_r^{-1} (t_*-\tau)^{m_k} d\tau \quad (1.9)$$

Соотношение (1.8) есть условие неповрежденности вязкоупругого тела при наличии  $\sigma_*(t), T(t)$ . Оно определяет время  $t'$  — начала появления повреждений в процессе нагружения. Соотношение (1.9) является условием длительной прочности и определяет время  $t_*$  до разрушения при действии  $\sigma_*(t), T(t)$ . При  $t_i \equiv 0, n=1$  условие (1.9) совпадает с условием длительной прочности [4, 5]. В случае  $t_i \equiv 0, m_i = 0 (i=0, 1, \dots, n-1)$  из (1.9) следует критерий длительной прочности Бейли [5].

В соотношениях (1.7) — (1.9) содержатся две экспериментально определяемые функции  $t_0 = t_0(\sigma_*, T)$  и  $t_1 = t_1(\sigma_*, T)$  и  $(2n-1)$  независимые константы  $m_i, M_i$ . Рассмотрим вопрос об экспериментальном определении этих констант. Пусть известны материальные функции  $t_0(\sigma_*, T)$  и  $t_1(\sigma_*, T)$  и пусть из опытов на растяжение цилиндрических образцов с различными постоянными скоростями изменения напряжения  $\sigma_{11}^{(v)}$  при различных постоянных температурах  $T_\mu$  известны предельные напряжения  $\sigma_b^{(v\mu)}$ .

Тогда  $\sigma_*^{(v)}(t) = \sigma_{11}^{(v)}(t) = \sigma_{11}^{(v)} t, \sigma_*(t_*(T_\mu)) = \sigma_{11}^{(v)}(t_*(T_\mu)) = \sigma_b^{(v\mu)} = \sigma_{11}^{(v)} t_*(T_\mu)$ . Отсюда  $t_*(T_\mu) = \sigma_b^{(v\mu)} / \sigma_{11}^{(v)}$ . В этом случае из условия длительной прочности (1.9) следует система из  $v\mu$  уравнений, решение которой определяет значения констант  $m_i, M_i$ :

$$M_i t_0^{1+m_i}(\sigma_b^{(v\mu)}, T_\mu) [t_0^{1+m_j}(\sigma_b^{(v\mu)}, T_\mu) - t_1^{1+m_j}(\sigma_b^{(v\mu)}, T_\mu)]^{-1} M_j^{-1} = \\ = M_k (1+m_k) \int_0^{\sigma_b^{(v\mu)} / \sigma_{11}^{(v)}} [t_0^{1+m_r}(\sigma_{11}^{(v)} \tau, T_\mu) - t_1^{1+m_r}(\sigma_{11}^{(v)} \tau, T_\mu)]^{-1} M_r^{-1} \left( \frac{\sigma_b^{(v\mu)}}{\sigma_{11}^{(v)}} - \tau \right)^{m_k} d\tau \\ (i, j, k, r = 0, 1, \dots, n-1)$$

Так как число независимых  $m_i, M_i$  равно  $(2n-1)$ , то должно быть  $v\mu \geq 2n-1$  с тем, чтобы при определении констант могли использоваться методы приближения.

Приведем еще один способ определения констант  $m_i, M_i$  из экспериментов на длительное разрушение при постоянных параметрах нагружения. В случае  $\sigma_* = \sigma_*^{(v)} = \text{const}, T = T_\mu = \text{const}$  уравнение (1.7) преобразуется к виду ( $\Pi \rightarrow \Pi_0$ )

$$\Pi_0(\sigma_*^{(v)}, T_\mu, t) = H(t - t_1(\sigma_*^{(v)}, T_\mu)) \frac{M_i [t^{1+m_i} - t_1^{1+m_i}(\sigma_*^{(v)}, T_\mu)]}{M_j [t_0^{1+m_j}(\sigma_*^{(v)}, T_\mu) - t_1^{1+m_j}(\sigma_*^{(v)}, T_\mu)]} \quad (1.10)$$

Соотношение (1.10) является уравнением кривых накопления повреждений при различных  $\sigma_* = \sigma_*^{(v)} = \text{const}, T = T_\mu = \text{const}$ . Пусть такие кривые известны из опыта [9]. В этом случае уравнение (1.10) служит для определения констант.

Отметим, что число констант зависит от удовлетворительности описания данных эксперимента. Их число становится большим в случае, когда процесс накопления повреждений протекает многостадийно [1] (кривые накопления повреждений имеют одну или несколько точек перегибов [9]). Однако, в ряде случаев (особенно в случаях, когда кривые накопления повреждений не имеют точки перегиба — процесс одностадийный) достаточно принимать  $n=1 (i, j, k, r=0)$ . При этом в соотношениях (1.7) — (1.9) остается только одна константа  $m_0$ . Выпишем кинетическое уравнение (1.7) при  $n=1$ , поскольку этот случай обладает преимуществом при решении прикладных задач:

$$\Pi(t) = H(t-t') \{ -t_1^{1+m_0}(\sigma_*(t), T(t)) [t_0^{1+m_0}(\sigma_*(t), T(t)) -$$

$$-t_1^{1+m_0} (\sigma_*(t), T(t)) ]^{-1} + (1+m_0) \int_0^{t_1} [t_0^{1+m_0} (\sigma_*(\tau), T(\tau)) - t_1^{1+m_0} (\sigma_*(\tau), T(\tau)) ]^{-1} (t-\tau)^{m_0} d\tau \} \quad (1.11)$$

Аналогичным образом могут быть выписаны также условия (1.8) и (1.9).

Теперь рассмотрим вопрос об аппроксимации зависимостей  $t_0 = t_0(\sigma_*, T)$ ,  $t_1 = t_1(\sigma_*, T)$ . Широкое распространение получила следующая аппроксимация долговечности, которое приемлемо в рассматриваемом случае:

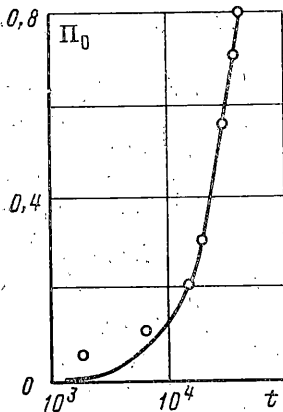
$$t_0 = t_{0s} \exp [\beta_0 (1 - \sigma_*/\sigma_s) + d_0 (1 - T/T_s)] \quad (1.12)$$

Для зависимости  $t_1 \sim \sigma_*$ ,  $T$  примем формулу, аналогичную (1.12):

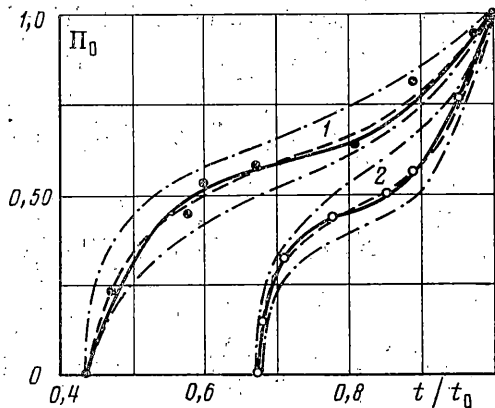
$$t_1 = t_{1s} \exp [\beta_1 (1 - \sigma_*/\sigma_s) + d_1 (1 - T/T_s)] \quad (1.13)$$

Здесь  $\beta_0$ ,  $d_0$ ,  $\beta_1$ ,  $d_1$  — константы, которые подлежат экспериментальному определению,  $\sigma_s$  — напряжение,  $T_s$  — температура приведения,  $t_{0s}$  и  $t_{1s}$  — времена до разрушения и начала накопления повреждений при  $\sigma_* = \sigma_s$ ,  $T = T_s$ .

Была произведена обработка результатов опытов, приведенных в [9]. На фиг. 1 представлены экспериментальные точки накопления повреждений в полиэтилене на надмолекулярном уровне при  $\sigma_{11}/\sigma_0 = 0,4$ , где  $\sigma_0$  — предел текучести в кратковременных опытах. При этом  $t_1 = 1,5 \cdot 10^3$  с,  $t_0 = 4 \cdot 10^4$  с. Представленные опытные данные хорошо описываются (сплошная линия) формулой (1.10) при  $n=1$  ( $i, j=0$ ), где  $m_0 = 0,25$ . Для таких материалов кинетика накопления повреждений при  $\sigma_* = \sigma_*(t)$ ,  $T = T(t)$  характеризуется соотношением (1.11).



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 2 представлены экспериментальные точки, поля (ограниченными штрих-пунктирными линиями) их разброса и осредненные с учетом статистики кривые накопления повреждений (штриховые линии) ПЭВП в условиях ползучести при напряжении 3,92 МПа, температурах 353 К (кривая 1) и 343 К (кривая 2) [9]. За величину приведения были приняты  $\sigma_s = 3,92$  МПа,  $T_s = 343$  К,  $t_{1s} = 840$  ч,  $t_{0s} = 1240$  ч. Значения констант, входящих в (1.12) и (1.13), равны:  $d_0 = 56,7$ ;  $\beta_0 = 2,76$ ;  $d_1 = 70,5$ ;  $\beta_1 = 2,76$ . Представленные на фиг. 2 опытные данные показывают, что в ПЭВП процесс накопления повреждений является многостадийным. Для описания этого процесса накопления повреждения в формуле (1.10) пришлось принимать  $n=5$  ( $i, j=0, \dots, 4$ ); значения констант  $m_i, M_i$  приведены ниже ( $t_{00} = t_0$  (3,92 МПа, 353 К)  $= 0,18 t_{0s}$ ).

$i$	0	1	2	3	4
$m_i$	-0,9	-0,97	0,67	2,31	3,95
$(M_i/M_0)t^{m_i - m_0}$	1	0,0895	-2,3555	18,6	-67

Как видим, определенные из эксперимента константы  $m_i, M_i$  ( $i=0, \dots, 4$ ) соответствуют требованиям, предъявляемым им теорией, так как  $m_i > -1$ ,  $M(t) = M_i(1+m_i)t^{m_i} > 0$  при  $t > 0$ . Исходя из этого, можно заключить то, что условие,

наложенное выше на функцию  $M(t)$  является естественным и представление ее в виде (1.6) приемлемое. В случае рассматриваемого материала число независимых  $m_i, M_i$  — девять. По найденным константам и в соответствии с (1.10), (1.12), (1.13) были построены расчетные кривые накопления повреждений (сплошные линии), которые, как видим, очень близки к линиям осреднения опытных точек. Это позволяет сделать вывод о том, что кинетика накопления повреждений ПЭВП в случае деформирования при независимых от времени напряжениях и температурах может быть описана уравнением (1.10) при  $n=5$  ( $i, j=0, \dots, 4$ ), с учетом формул (1.12), (1.13), в случае же деформирования полями напряжений и температур, зависящими от времени — уравнением (1.7) при  $n=5$  ( $i, j, k, r=0, \dots, 4$ ), с использованием формул (1.12), (1.13).

**2. Определяющие уравнения.** В процессе деформирования поле температуры и накопление повреждений оказывают существенное влияние на их механические свойства. Поэтому для описания процесса деформирования вязкоупругого тела вплоть до разрушения, необходимо составить систему определяющих уравнений, учитывающих влияния температуры и накопленных повреждений в тех периодах времени, в которых эти факторы существуют.

Пусть  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  будут области материала, которые до появления повреждений (при временах  $0 \leq t \leq t'$ ) являются областями физической линейности и физической нелинейности и пусть продолжения этих областей на времена  $t' \leq t \leq t_*$  соответственно будут  $\Sigma_1^*$  и  $\Sigma_2^*$ . Границ областей  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  обозначим через  $\Sigma_s$ , областей  $\Sigma_1^*$  и  $\Sigma_2^*$  — через  $\Sigma_s^*$ . Ясно, что  $\Sigma_i = \Sigma_i^*$  ( $i=1, 2$ ),  $\Sigma_s = \Sigma_s^*$  при  $t=t'$ . При временах  $0 \leq t \leq t'$  влияние накопленных повреждений на механические свойства материалов отсутствует, ввиду отсутствия на этом интервале времени фактора повреждения; существует только влияние поля температуры. В этом случае, следуя [11–13], соотношения между девиаторными величинами тензоров деформаций и напряжений примем в виде

$$2G_0 e_{ij} = \kappa_1(T) s_{ij} + \int_0^t \Gamma(t-\tau) \kappa_2(T) s_{ij} d\tau \quad (\Sigma_1) \quad (2.1)$$

$$\frac{s_{ij}}{2G_0} = \omega_1(T) e_{ij} - \int_0^t R(t-\tau) \omega_2(T) e_{ij} d\tau \quad (\Sigma_1) \quad (2.2)$$

$$2G_0 e_{ij} = f_1 \left( \frac{\sigma_+}{b_T} \right) s_{ij} + \int_0^t \Gamma(t-\tau) f_2 \left( \frac{\sigma_+}{b_T} \right) s_{ij} d\tau \quad (\Sigma_2) \quad (2.3)$$

$$\frac{s_{ij}}{2G_0} = \varphi_1 \left( \frac{\varepsilon_+}{v_T} \right) e_{ij} - \int_0^t R(t-\tau) \varphi_2 \left( \frac{\varepsilon_+}{v_T} \right) e_{ij} d\tau \quad (\Sigma_2) \quad (2.4)$$

где  $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}$  — девиаторы тензора деформации  $\varepsilon_{ij}$ ;  $\varepsilon = \varepsilon_{ij} \delta_{ij} / 3$  — средняя деформация,  $\varepsilon_+ = (2e_{ij} e_{ij} / 3)^{1/2}$  — интенсивность деформаций;  $G_0 = \text{const}$  — мгновенный модуль сдвига материала при некоторой эталонной температуре  $T_s$ , которая фиксируется в представляющем интерес температурном диапазоне;  $\Gamma(t)$ ,  $R(t)$  — функции наследственности при той же температуре  $T_s$ ;  $\kappa_1$ ,  $\omega_1$  и  $\kappa_2$ ,  $\omega_2$  — функции, определяющие влияния температуры на механические свойства материалов при мгновенном нагружении и на реономные свойства в области  $\Sigma_1$ ;  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  — функции, характеризующие степень физической нелинейности материала при температуре  $T_s$ ;  $b_T = b_T(T)$ ,  $v_T = v_T(T)$  — функции, являющиеся характеристиками влияния температуры в области  $\Sigma_2$ . Функция  $R(t)$  есть резольвента  $\Gamma(t)$  и наоборот [11, 13]. На границе  $\Sigma_s$  имеем  $f_i = \kappa_i$ ,  $\varphi_i = \omega_i$  ( $i=1, 2$ ). Уравнения (2.1) и (2.2), а также (2.3) и (2.4) являются альтернативными.

При  $T = T_s$  имеем  $\kappa_1(T_s) = \kappa_2(T_s) = \omega_1(T_s) = \omega_2(T_s) = b_T(T_s) = v_T(T_s) = 1$ . В этом случае соотношения (2.1) и (2.2) становятся уравнениями тео-

при линейной вязкоупругости, соотношения (2.3) и (2.4) переходят в уравнения, выведенными в [14] как следствия квазилинейной теории [15]. Уравнения (2.3) и (2.4) при  $b_T=1$ ,  $v_T=1$  в той или иной форме рассмотрены также в [16–20]. Методика определения материальных функций и констант, входящих в уравнения (2.1)–(2.4), а также их конкретные значения для некоторых материалов приведены в [11, 12].

Связь между объемными величинами тензоров деформаций и напряжений примем в виде [11, 14, 21]:

$$\Theta = \sigma/K + 3\alpha\Delta T \quad (\Delta T = T - T^0) \quad (2.5)$$

где  $\Theta = 3\varepsilon$  — относительное изменение объема,  $K$  — модуль объемной деформации,  $\alpha$  — коэффициент линейного теплового расширения.

В интервале времени  $t' < t \leq t_*$ ,  $\Pi \neq 0$  и при этом на механические свойства материалов имеет существенное влияние не только поле температур, но и накопленные повреждения. В этом случае естественным обобщением соотношений (2.1)–(2.4) вплоть до разрушения будут следующие уравнения соответственно:

$$2G_0 e_{ij} = \chi_i(T, \Pi) s_{ij} + \int_0^t \Gamma(t-\tau) \chi_2(T, \Pi) s_{ij} d\tau \quad (\Sigma_1^*) \quad (2.6)$$

$$\frac{s_{ij}}{2G_0} = \Omega_i(T, \Pi) e_{ij} - \int_0^t R(t-\tau) \Omega_2(T, \Pi) e_{ij} d\tau \quad (\Sigma_1^*) \quad (2.7)$$

$$2G_0 e_{ij} = F_i\left(\frac{\sigma_+}{b_T}, \Pi\right) s_{ij} + \int_0^t \Gamma(t-\tau) F_2\left(\frac{\sigma_+}{b_T}, \Pi\right) s_{ij} d\tau \quad (\Sigma_2^*) \quad (2.8)$$

$$\frac{s_{ij}}{2G_0} = \Phi_i\left(\frac{\varepsilon_+}{v_T}, \Pi\right) e_{ij} - \int_0^t R(t-\tau) \Phi_2\left(\frac{\varepsilon_+}{v_T}, \Pi\right) e_{ij} d\tau \quad (\Sigma_2^*) \quad (2.9)$$

где величина  $\Pi$  выражается по формуле (1.7) или (1.11). При  $t=t'$  имеем  $\chi_i = \chi_i$ ,  $F_i = f_i$ ,  $\Omega_i = \omega_i$ ,  $\Phi_i = \varphi_i$  ( $i=1, 2$ ). На границе  $\Sigma_{*}^*$  имеем  $F_i = \chi_i$ ,  $\Phi_i = \Omega_i$  ( $i=1, 2$ ).

В период времени  $t' \leq t \leq t_*$  связь  $\Theta \sim \sigma$  сохраним в виде уравнения (2.5), предполагая при этом, что накопленные повреждения на его вид не влияют.

В случае эталонной температуры  $T_s$  уравнения (2.6), (2.8) (или (2.7), (2.9)) есть связь  $e_{ij} \sim s_{ij}$  для вязкоупругой среды, учитывающая влияния накопленных повреждений в случае изотермического нагружения в период времени  $t' \leq t \leq t_*$ . При  $t'=0$ ,  $T=T_s$ ,  $\chi_i(T_s, \Pi) \equiv 1$ ,  $\Omega_i(T_s, \Pi) \equiv 1$  соотношения (2.6) и (2.7) совпадают с уравнениями, приведенными в [22].

Определим константы и функций, входящие в (2.6) и (2.8). Пусть в областях  $\Sigma_1 + \Sigma_1^*$  и  $\Sigma_2 + \Sigma_2^*$  известны опытные кривые ползучести при различных постоянных  $\sigma_+ = \sigma_+^{(v)} = \text{const}$ ,  $T = T_\mu = \text{const}$ , включающие точки разрушения. Выделим на каждой кривой участок  $0 \leq t \leq t_i(\sigma_+^{(v)}, T_\mu)$ . Будем считать, что константа  $G_0$  и функции  $\Gamma$ ,  $\chi_i$ ,  $f_i$  ( $i=1, 2$ ), которые входят в (2.1), (2.3), найдены с использованием опытных кривых ползучести при  $0 \leq t \leq t_i$  [11–13]. Кроме того предполагаем, что величина  $\Pi$  определена в соответствии с методикой, приведенной в п. 1. Функции  $\chi_i$  и  $F_i$  ( $i=1, 2$ ) представим в виде

$$\begin{aligned} \chi_i(T, \Pi) &= A_{ij}' (T/T_s)^{\alpha_i' - j} \Pi^j, F_i(\sigma_+/b_T, \Pi) = \\ &= A_{ij}(\sigma_+/b_T)^{\alpha_i - j} \Pi^j \quad (j=0, \dots, k) \end{aligned} \quad (2.10)$$

При  $t=t_i$  ( $\Pi=0$ ) из (2.10) следует

$$\chi_i(T, 0) = \chi_i(T) = A_{i0}' (T/T_s)^{\alpha_i'}, F_i(\sigma_+/b_T, 0) = f_i(\sigma_+/b_T) = A_{i0}(\sigma_+/b_T)^{\alpha_i}$$

Поскольку функции  $\chi_i, f_i$  ( $i=1, 2$ ) считаются известными, из последних соотношений находим константы  $A_{i0}', \alpha_i', A_{i0}, \alpha_i$  ( $i=1, 2$ ).

В случае  $\sigma_+ = \sigma_+^{(v)} = \text{const}$ ,  $T = T_\mu = \text{const}$  из уравнений (2.6) и (2.8) при учете (2.10) получаем

$$3G_0 \varepsilon_+^{(v)} = \sigma_+^{(v)} [A_{1j}' (T_\mu/T_s)^{\alpha_1'-j} \Pi_0^j + A_{2j} (T_\mu/T_s)^{\alpha_2'-j} \psi_j] \quad (\Sigma_1^*) \quad (2.11)$$

$$3G_0 \varepsilon_+^{(v)} = \sigma_+^{(v)} [A_{1j} (\sigma_+^{(v)}/b_T)^{\alpha_1-j} \Pi_0^j + A_{2j} (\sigma_+^{(v)}/b_T)^{\alpha_2-j} \psi_j] \quad (\Sigma_2^*) \quad (2.12)$$

$$b_T^{(u)} = b_T(T_\mu), \quad \psi_j = \int_0^t \Gamma(t-\tau) \Pi_0^j(\sigma_+^{(v)}, T_\mu, \tau) d\tau \quad (j=0, \dots, k)$$

Системы уравнений (2.11) и (2.12) позволяет определить осредненные по  $t$  значения остальных неизвестных констант  $A_{ij}', A_{ij}$  ( $i=1, 2$ ;  $j=1, \dots, k$ ). После нахождения  $F_i, \chi_i$  ( $i=1, 2$ ) становятся известными все величины, входящие в (2.6) и (2.8).

Не вдаваясь в подробности, отметим, что материальные функции, входящие в уравнения (2.7), (2.9) могут быть определены аналогичным образом. При этом следует воспользоваться опытными кривыми релаксации, включающие точки разрушения, при условии, что кинетическое уравнение накопления повреждений материала будет известно.

В [11–13] на примере различных материалов была показана приемлемость аппроксимаций

$$f_2 \approx Lf_1 \equiv Lf, \quad \chi_2 \approx L\chi_1 \equiv L\chi, \quad \Phi_2 \approx Q\Phi_1 \equiv Q\Phi, \quad \omega_2 \approx Q\omega_1 \equiv Q\omega \quad (2.13)$$

где  $L, Q = \text{const}$ , в частности  $L=Q=1$  [11, 13].

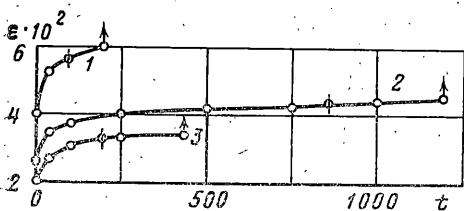
Аппроксимации (2.13) имеет место в период времени  $0 \leq t \leq t'$ . Предположим, что эти аппроксимации имеют «продолжения» на времена  $t' \leq t \leq t_*$ :

$$F_2 \approx LF_1 \equiv LF, \quad \chi_2 \approx L\chi_1 \equiv L\chi, \quad \Phi_2 \approx Q\Phi_1 \equiv Q\Phi, \quad \Omega_2 \approx Q\Omega_1 \equiv Q\Omega \quad (2.14)$$

При аппроксимациях (2.13) и (2.14) уравнения (2.1)–(2.4), (2.6)–(2.9) становятся линейными интегральными уравнениями относительно  $L\chi, Q\omega, Lf, Q\Phi, L\chi, Q\Omega, LF, Q\Phi$  соответственно. Это свойство дает им преимущества при решении прикладных задач.

Были обработаны опытные данные [9] с целью проверки правильности описания их уравнениями (2.1), (2.6) и (2.3), (2.8) при условиях (2.10) (при сохранении первых двух членов), а также уточнения приемлемости аппроксимаций (2.13), (2.14). Материал прежний – ПЭВП. Использовались кривые ползучести при растяжении образцов (время – в часах), вплоть до разрушения (площадные линии на фиг. 3:  $\sigma_{11} = 3,92$  МПа,  $T = 353$  К – кривая 1;  $3,92$  МПа,  $343$  К – кривая 2;  $2,94$  МПа,  $353$  К – кривая 3) и кривые накопления повреждений (фиг. 2). Функции  $\Gamma(t)$  и  $b_T$  были представлены в виде  $\Gamma(t) = \Gamma_0 t^{-\gamma}$  ( $\Gamma_0 > 0, \gamma > 0$ );  $b_T = (T_s/T)^\delta$  ( $\delta > 0$ ). Для  $\Pi_0$  использовалась формула (1.10). Значения констант, входящих в (1.10) и величины приведения  $T_s, \sigma_s, t_{1s}, t_{0s}$  для данного материала приведены в п. 1. Остальные константы оказались следующими: мгновенный модуль упругости  $E_0 \approx 150,92$  МПа;  $\gamma \approx 0,8$ ;  $\Gamma_0 / \int_0^{t_1} t^{-\gamma-1} dt \approx 0,125$ ;  $\alpha_1' \approx \alpha_2' \approx 4,8$ ;  $\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx 1$ ;  $\delta \approx 14,6$ ;  $A_{10}' = A_{20}' = 1$ ;  $A_{11}' \approx A_{21}' \approx -0,015$ ;  $A_{10} \sigma_s^{\alpha_1} = A_{20} \sigma_s^{\alpha_2} = 1$ ;  $A_{11} \approx A_{21} \approx 0,05$ .

Как показывают расчетные данные для рассматриваемого материала аппроксимации (2.13), (2.14) приемлемы. При этом  $L=1$ . С использованием найденных констант был произведен обратный пересчет кривых ползучести (точки на фиг. 3). Отметим, что опытные кривые 2 и 3 описывались в соответствии с уравнениями (2.1) ( $0 \leq t \leq t_1$ ; время  $t_1$  на каждой кривой ползучести выделено чертой) и (2.6) ( $t_1 \leq t \leq t_0$ ), кривая 1 – уравнениями (2.3) ( $0 \leq t \leq t_1$ ) и (2.8) ( $t_1 \leq t \leq t_0$ ). Хорошее совпадение опытных и расчетных данных позволяет применить соотношения (2.1), (2.6) и (2.3), (2.8) при использовании (1.7),



Фиг. 3



(1.12), (1.13), (2.10), для описания механических свойств ПЭВП вплоть до разрушения.

Наконец, отметим, что выбор приведенных здесь определяющих уравнений в каждом случае диктуется условием рассматриваемой задачи.

**3. Постановка задачи.** В [3, 5, 6, 14—19, 21, 23—26] приведены постановки различных задач теории термовязкоупругости и эффективные методы их решения. В отличие от этих работ, здесь приведем постановку и некоторое решение задачи деформирования и разрушения вязкоупругих тел с учетом результатов, представленных в п. 1, 2.

Выпишем уравнения равновесия и граничные условия

$$s_{ij,j} + \sigma_i + F_i = 0, \quad s_{ij}l_j + \sigma l_i = R_i \quad (\text{на } S_c), \quad u_i = u_{0i} \quad \text{на } S_u \quad (3.1)$$

где  $l_i$  — направляющие косинусы,  $F_i$  — объемные силы,  $R_i$  — заданные на части  $S_c$  граничной поверхности  $S$  поверхностные силы,  $u_{0i}$  — заданные граничные перемещения на части  $S_u$  поверхности  $S$ .

Если задача решается в перемещениях, то следует воспользоваться геометрическими соотношениями Коши:

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} \quad (3.2)$$

В случае решения задачи в напряжениях необходимо задание шести уравнений совместности деформаций (трем уравнениям соответствует  $p \neq r \neq s$ , остальным —  $p \neq r = s$ ):

$$\varepsilon_{pp,rs} = (\varepsilon_{ps,r} + \varepsilon_{pr,s} - \varepsilon_{rs,p})_{,p} \quad (p, r, s = 1, 2, 3) \quad (3.3)$$

Будем считать, что нагрев за счет деформаций пренебрежимо мал по сравнению с нагревом за счет теплопроводности. В этом случае температурное поле становится известным из решения задач теплопроводности. Присоединив к (3.1), (3.2) (или (3.3)) соответствующих групп определяющих уравнений и кинетического уравнения накопления повреждений получаем замкнутую систему соотношений для нахождения неизвестных величин  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $u_i$ .

Для определения истинного напряженно-деформированного состояния в заданный момент времени  $t$  из интервала  $0 < t \leq t_*$  необходимо знать время  $t'$  — начала процесса накопления повреждений, поскольку оно является границей применимости от времени приведенных в п. 2 определяющих уравнений в зависимости от внешних факторов  $F_i$ ,  $R_i$ ,  $u_{0i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $T$ . Чтобы находить  $t'$  в области  $\Sigma_1$  следует решать задачу (2.1) (или (2.2)), (2.5), (3.1), (3.2) (или (3.3)), в области  $\Sigma_2$  — задачу (2.3) (или (2.4)), (2.5), (3.1), (3.2) (или (3.3)). Граница  $\Sigma$  определится из условия равенства решения этих задач на  $\Sigma$ . Пусть известны эти решения. При их учете из условия (1.8) определяем время появления в теле повреждений  $t'$ . Оно же будет временем, до которого уравнения (2.1) (или (2.2)) и (2.3) (или (2.4)) могут быть использованы как определяющие уравнения материала исследуемой конструкции при заданных внешних факторах. Следовательно, решения задач с использованием этих уравнений будут верно определять напряженно-деформированное состояние при  $t \leq t'$ . Данные решения при  $t > t'$ , вообще говоря, не будут соответствовать истинным, или точнее, они будут только исходными приближениями к истинным решениям, поскольку в этот период времени происходит процесс накопления повреждений, существенное влияние которого на механические свойства материалов должны быть учтены определяющими уравнениями (п. 2). Еще заметим, что время до разрушения, полученное с учетом решений упомянутых задач может существенно отличаться от истинного и прочностные ресурсы конструкции могут быть неправильно оценены.

Для определения напряженно-деформированного состояния тела в области  $\Sigma_1^*$  необходимо решать задачу (2.6) (или (2.7)), (2.5), (1.7), (3.1), (3.2) (или (3.3)), в области  $\Sigma_2^*$  — задачу (2.8) (или (2.9)), (2.5), (1.7), (3.1), (3.2) (или (3.3)). Граница  $\Sigma_s^*$  находится из условия равенства решения данных задач на  $\Sigma_s^*$ . Если становятся известными эти решения, то с использованием их из условия длительной прочности (1.9) определяем время до разрушения  $t_*$  — долговечность работы конструкции.

Рассмотрим некоторые вопросы решения. Возможность о применении метода упругих решений [27] к задачам нелинейной термовязкоупругости при  $T=T(t)$  были исследованы в [14, 21, 24, 25]. Приведенные в п. 2 определяющие уравнения позволяют реализовать этот метод в случае рассмотренных задач при существенной зависимости механических свойств материала от заданной неоднородной и нестационарной температуры  $T=T(t, x_i)$  (задачи III типа [21]). Для решения задачи с применением одних из соотношений (2.1)–(2.4), функции  $\kappa_i, \omega_i, f_i, \varphi_i$  ( $i=1, 2$ ) представим в виде:  $\kappa_i(T)=1+\kappa_i^\circ(T)$ ;  $\omega_i(T)=1-\omega_i^\circ(T)$ ;  $f_i(\sigma_+/b_T)=1+f_i^\circ(\sigma_+/b_T)$ ;  $\varphi_i(\varepsilon_+/v_T)=1-\varphi_i^\circ(\varepsilon_+/v_T)$ . При этом каждое из уравнений (2.1) и (2.3) может быть записано в виде

$$2G_0(e_{ij}-e_{ij}')=s_{ij}+\int_0^t \Gamma(t-\tau)s_{ij}d\tau \quad (3.4)$$

где в случае использования уравнений (2.1):

$$2G_0e_{ij}'=\kappa_1^\circ(T)s_{ij}+\int_0^t \Gamma(t-\tau)\kappa_2^\circ(T)s_{ij}d\tau \quad (3.5)$$

в случае уравнения (2.3):

$$2G_0e_{ij}'=f_1^\circ\left(\frac{\sigma_+}{b_T}\right)s_{ij}+\int_0^t \Gamma(t-\tau)f_2^\circ\left(\frac{\sigma_+}{b_T}\right)s_{ij}d\tau \quad (3.6)$$

Разрешим уравнение (3.4) относительно  $s_{ij}$ :

$$s_{ij}=2G_0\left[e_{ij}-e_{ij}'-\int_0^t R(t-\tau)(e_{ij}-e_{ij}')d\tau\right] \quad (3.7)$$

Уравнения (2.2) и (2.4) выпишем в виде:

$$s_{ij}=-s_{ij}'+2G_0\left[e_{ij}-\int_0^t R(t-\tau)e_{ij}d\tau\right] \quad (3.8)$$

где в случае использования уравнения (2.2):

$$s_{ij}'=2G_0\left[\omega_1^\circ(T)e_{ij}-\int_0^t R(t-\tau)\omega_2^\circ(T)e_{ij}d\tau\right] \quad (3.9)$$

в случае уравнения (2.4):

$$s_{ij}'=2G_0\left[\varphi_1^\circ\left(\frac{\varepsilon_+}{v_T}\right)e_{ij}-\int_0^t R(t-\tau)\varphi_2^\circ\left(\frac{\varepsilon_+}{v_T}\right)e_{ij}d\tau\right] \quad (3.10)$$

Воспользуемся следующим способом построения линейных приближений в перемещениях. При первом приближении принимаем:  $\kappa_i^\circ=0$ ,  $\omega_i^\circ=0$ ,  $f_i^\circ=0$ ,  $\varphi_i^\circ=0$  ( $i=1, 2$ ). Тогда из (3.5) и (3.6) следует  $e_{ij}^{(0)'}=0$ , из (3.9) и (3.10) —  $s_{ij}^{(0)'}=0$ . В этом случае уравнения (3.7) и (3.8) совпадают и если их и соотношение (2.5) учесть в уравнениях и граничных условиях (3.1), то при первом приближении будем иметь следующую задачу:

$$2G_0\left(e_{ij}^{(1)}-\int_0^t R(t-\tau)e_{ij}^{(1)}d\tau\right)+K\Theta_i^{(1)}+F_i+F_i'=0 \quad (3.11)$$

$$2G_0\left(e_{ij}^{(1)}-\int_0^t R(t-\tau)e_{ij}^{(1)}d\tau\right)l_j+K\Theta^{(1)}l_i=R_i+R_i' \text{ на } S_0 \quad (3.12)$$

$$u_i^{(1)} = u_{0i} \text{ на } S_u, \quad 2\varepsilon_{ij}^{(1)} = u_{i,j}^{(1)} + u_{j,i}^{(1)} \quad (3.13)$$

$$F_i' = -3K(\alpha(T)\Delta T)_{,i}, \quad R_i' = 3K\alpha(T)\Delta T l_i \quad (3.14)$$

Очевидно, что задача (3.11)–(3.13) является задачей линейной вязкоупругости изотермического нагружения при заданных  $F_i$ ,  $R_i$  и фиктивных  $F_i'$ ,  $R_i'$  силах, определяемых через известное поле температур и при наличии граничных перемещений  $u_{0i}$ . Допустим, что эта задача решена: найдены  $u_i^{(1)}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ ,  $\sigma_{ij}^{(1)}$ . По формулам (3.5) и (3.6) определяем  $e_{ij}^{(1)}$ , по (3.9) и (3.10) —  $s_{ij}^{(1)}$ . При известных  $e_{ij}^{(1)}$  и  $s_{ij}^{(1)}$  решается задача второго приближения. Для любого  $k$ -го приближения имеем задачу

$$2G_0 \left( e_{ij}^{(k)} - \int_0^t R(t-\tau) e_{ij}^{(k)} d\tau \right) + K\Theta_{,i}^{(k)} + F_i + F_i' + F_i^{(k-1)} = 0 \quad (3.15)$$

$$2G_0 \left( e_{ij}^{(k)} - \int_0^t R(t-\tau) e_{ij}^{(k)} d\tau \right) l_j + K\Theta^{(k)} l_i = R_i + R_i' + R_i^{(k-1)} \text{ на } S_\sigma \quad (3.16)$$

$$u_i^{(k)} = u_{0i} \text{ (на } S_u), \quad 2\varepsilon_{ij}^{(k)} = u_{i,j}^{(k)} + u_{j,i}^{(k)} \quad (3.17)$$

Здесь при использовании уравнений (3.7):

$$F_i^{(k-1)} = -2G_0 \left( e_{ij}^{(k-1)} - \int_0^t R(t-\tau) e_{ij}^{(k-1)} d\tau \right) \quad (3.18)$$

$$R_i^{(k-1)} = 2G_0 \left( e_{ij}^{(k-1)} - \int_0^t R(t-\tau) e_{ij}^{(k-1)} d\tau \right) l_j \quad (3.19)$$

при использовании уравнений (3.8):

$$F_i^{(k-1)} = -s_{ij}^{(k-1)}, \quad R_i^{(k-1)} = s_{ij}^{(k-1)} l_j \quad (3.20)$$

Отметим, что в зависимости от используемых уравнений (2.1) и (2.3), в формулах (3.18), (3.19) компоненты  $e_{ij}$  определяются в соответствии с (3.5) и (3.6). Если же используются уравнения (2.2) и (2.4), то  $s_{ij}$  в (3.20) находятся по формулам (3.9) и (3.10).

Как видим, задача  $k$ -го приближения (3.15)–(3.17) совпадает с задачей линейной вязкоупругости для изотропных однородных тел, но при наличии дополнительных объемных  $F_i + F_i^{(k-1)}$  и поверхностных  $R_i + R_i^{(k-1)}$  сил. При этом  $F_i'$  и  $R_i'$  определяется через температурное поле тела  $T(t, x_i)$  в соответствии с формулами (3.14),  $F_i^{(k-1)}$  и  $R_i^{(k-1)}$  — формулами (3.18), (3.19) (или (3.20)), предшествующим приближением. Задача (3.15)–(3.17) может быть решена с помощью одного из существующих эффективных методов решения задач линейной вязкоупругости [14, 16, 17, 19, 21, 23, 24].

Если к соотношениям (3.15)–(3.17) применить преобразование Лапласа, то процесс построения приближений в изображениях будет аналогичным процессу построения приближений в методе упругих решений Ильющина в теории малых упруго-пластических деформаций [27]; доказательство сходимости которого известно [28–31]. Поэтому при ограничениях  $|\kappa_i^\circ|$ ,  $|\omega_i^\circ| < 1$ ;  $|f_i^\circ|$ ,  $|\varphi_i^\circ| \ll |d[f_i^\circ(z)z]/dz|$ ,  $|d[\varphi_i^\circ(z)z]/dz| < 1$  ( $i=1, 2$ ) можно говорить о сходимости рассматриваемых линейных однородных приближений при условии, что существуют интегралы, выражающие работу объемных и поверхностных сил на перемещениях [28–31].

Как отмечено выше, найденные поля напряжений и деформаций будут соответствовать напряженно-деформированному состоянию тела до времени  $t'$ , которое определится из условия (1.8).

Теперь рассмотрим вопрос о решениях задач с применением одной из групп соотношений (2.6)–(2.9), учитывающих влияние накопленных повреждений. Заметим, что эти задачи существенно нелинейны, так как во все эти соотношения входит функционал  $\Pi$ , который определяется через неизвестное поле напряжений в соответствии с (1.7). Кроме того, в (2.8) входит неизвестная  $\sigma_+$ , в (2.9) — неизвестная  $\varepsilon_+$ . Приведем кратко два подхода построения приближений к решению на примере задачи (2.8), (2.5), (1.7), (3.1), (3.2).

4. За исходное приближение принимаем решение задачи (2.3), (2.5), (3.1), (3.2) при  $t > t'$ . По ним находим  $\sigma_*$ , после чего по формуле (1.7) определяем  $\Pi(t, x_i)$ . Учитывая это значение  $\Pi(t, x_i)$  в уравнениях (2.8) и добавляя к ним недостающие соотношения (2.5), (3.1), (3.2) имеем задачу следующего приближения. Таким образом, при любом последующем приближении будем иметь задачу (2.8), (2.5), (3.1), (3.2), где входящая в (2.8) величина  $\Pi(t, x_i)$  будет известна из решения задачи предыдущего приближения. При этом задачи в каждом приближении будут аналогичными к исходной задаче (2.3), (2.5), (3.1), (3.2) и поэтому они могут быть решены рассмотренным выше методом.

2. Функции  $F_i(\sigma_+/b_T, \Pi)$  представим в виде  $F_i(\sigma_+/b_T, \Pi) = 1 + F_i^\circ(\sigma_+/b_T, \Pi)$  ( $i = 1, 2$ ). Тогда с учетом обозначений

$$2G_0 e_{ij}' = F_1^\circ\left(\frac{\sigma_+}{b_T}, \Pi\right) s_{ij} + \int_0^t \Gamma(t-\tau) F_2^\circ\left(\frac{\sigma_+}{b_T}, \Pi\right) s_{ij} d\tau \quad (3.21)$$

уравнения (2.8) приводятся к виду (3.7). При первом приближении принимаем  $F_1^\circ = F_2^\circ = 0$ . В этом случае имеем задачу (3.11)–(3.13). По ее решению находим  $\sigma_*$ , которое позволяет определить  $\Pi(t, x_i)$  по формуле (1.7). После этого становятся известными  $e_{ij}'^{(1)}$ , определяемые формулами (3.21). Поступая так в дальнейшем для любого  $k$ -го приближения будем иметь задачу линейной вязкоупругости (3.15)–(3.17), где силы  $F_i'$ ,  $R_i'$  определяются по формулам (3.14),  $F_i^{(k-1)}$ ,  $R_i^{(k-1)}$  – по формулам (3.18), (3.19). Входящие в (3.18) и (3.19) компоненты  $e_{ij}^{(k-1)}$  находятся в соответствии с формулами (3.21), решением задачи предыдущего приближения.

Другие задачи с использованием одних из уравнений (2.6), (2.7), (2.9) могут быть решены аналогичным образом.

Как только становится известным поле напряжений при  $t > t'$ , долговечность  $t_*$  работы конструкции определяется из условия (1.9).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотин В. В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1984. 312 с.
2. Ильюшин А. А. Об одной теории длительности прочности // Инж. ж. МТТ. 1967. № 3. С. 21–35.
3. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. Сопrotивление жестких полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1972. 498 с.
4. Москвитин В. В. Некоторые вопросы длительной прочности вязкоупругих тел // Проблемы прочности. 1971. № 2. С. 55–58.
5. Москвитин В. В. Циклические нагружения элементов конструкций. М.: Наука, 1981. 344 с.
6. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
7. Суворова Ю. В. О критерии прочности, основанном на накоплении повреждаемости и его приложение к композитам // Изв. АН СССР МТТ. 1979. № 4. С. 107–111.
8. Тамуж В. П. Об одной возможности построения теории длительного разрушения // Проблемы прочности. 1971. № 2. С. 59–64.
9. Гольдман А. Я. Прочность конструкционных пластмасс. М.: Машиностроение, 1979. 320 с.
10. Суворова Ю. В., Викторова И. В., Машинская Г. П. Длительное разрушение неупругих композитов // Механика композитных материалов. 1979. № 5. С. 794–798.
11. Талыблы Л. Х. К нелинейной теории температурных напряжений в вязкоупругих телах // Механика композитных материалов. 1983. № 4. С. 587–593.
12. Талыблы Л. Х. Об одном случае приведения задач нелинейной термовязкоупругости к задаче нелинейной вязкоупругости // Изв. АН АзербССР. Сер. физ.-техн. и мат. н. 1982. № 6. С. 33–37.
13. Талыблы Л. Х. Об одном способе учета влияния температуры на механические свойства физически линейных вязкоупругих сред // Материалы конференции по прикладной математике и механике. Кировабад, 1984. Баку: Элм, 1984. С. 88–91.
14. Москвитин В. В. Сопrotивление вязкоупругих материалов применительно к рядам ракетных двигателей на твердом топливе. М.: Наука, 1972. 327 с.
15. Ильюшин А. А., Огибалов П. М. Квазилинейная теория вязкоупругости и метод малого параметра // Механика полимеров. 1966. № 2. С. 170–189.
16. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.: Гостехиздат, 1952. 385 с.
17. Колгунов М. А. Ползучесть и реология. М.: Высш. школа, 1976. 277 с.
18. Ledderman H. Elastic and creep properties of filamentous and other high polymers. Textile Foundation. Washington, 1943. 278 p.
19. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.
20. Розовский М. И. О нелинейных уравнениях ползучести и релаксации материалов при сложном напряженном состоянии // ЖТФ. 1955. Т. 25. Вып. 13. С. 2339–2354.

21. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
22. *Москвитин В. В., Хабиб Р. И.* Некоторые вопросы деформации вязкоупругих тел с учетом влияния накопленных повреждений // *Механика полимеров*. 1978. № 5. С. 802–807.
23. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
24. *Огибалов П. М., Ломакин В. А., Кишкин Б. П.* Механика полимеров. М.: Изд-во МГУ, 1976. 368 с.
25. *Победря Б. Е.* Математическая теория нелинейной вязкоупругости. В кн.: *Упругость и неупругость*. М.: Изд-во МГУ, 1973. Вып. 3. С. 95–172.
26. *Трояновский И. Е.* Об одном методе решения нелинейных интегральных уравнений вязкоупругости // *Механика полимеров*. 1974. № 3. С. 529.
27. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Ч. 1. Упругопластические деформации. М.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
28. *Ворович И. И., Красовский Ю. П.* О методе упругих решений // *ДАН СССР*. 1959. № 4. С. 740–743.
29. *Быков Д. Л.* О некоторых методах решения задач теории пластичности // В кн.: *Упругость и неупругость*. М.: Изд-во МГУ, 1975. Вып. 4. С. 119–138.
30. *Панферов В. М.* О сходимости метода упругих решений в теории упругопластических деформаций оболочек // *ПММ*. 1949. Т. 13. Вып. 1. С. 79–94.
31. *Победря Б. Е.* О сходимости метода упругих решений в нелинейной вязкоупругости // *ДАН СССР*. 1970. Т. 195. № 2. С. 307–310.

Баку

Поступила в редакцию  
22.IX.1987