МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1990

УДК 539.214;539.374


А. А. МАРКИН

# ОБ ИЗМЕНЕНИИ УПРУГИХ И ПЛАСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПРИ КОНЕЧНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

Предложен вариант теории пластичности для процессов конечного деформирования, основанный на гипотезе существования поверхности обратимости. Из доказательства совпадения поверхности обратимости с эквипотенциальной поверхностью свободной энергии, устанавливается характер приобретаемой анизотропии и нелинейности упругих свойств, а также эволюция поверхности обратимости в процессе активного нагружения. Указаны эксперименты, необходимые для конкретизации предлагаемых соотношений.

**1. Поверхность обратимости и ее свойства.** Рассматривается процесс однородного, изотермического конечного деформирования начально изотропного твердого тела. Процесс деформирования описывается неголономной тензорной мерой $K^\wedge$, а процесс нагружения — обобщенным тензором истинных напряжений $\Sigma^\wedge$. Образы процессов строятся в пятимерном пространстве Ильюшина [1], на основе декартовых компонент тензоров — девиаторов $K^\vee$, $\Sigma^\vee$ в полярном базисе. Тензором $K^\vee$, $\Sigma^\vee$ соответствуют пятимерные векторы $\mathbf{k}$, $\boldsymbol{\tau}$. Выражение элементарной работы напряжений, отнесенной к начальному объему, имеет следующий вид [1]:

$$d'A=\Sigma^\vee\cdot\cdot dK^\vee+\sigma d\theta=\boldsymbol{\tau}\cdot d\mathbf{k}+\sigma d\theta$$

где $\sigma={}^1/_3\Sigma^\wedge\cdot\cdot E^\wedge$ — гидростатическая составляющая процесса нагружения; $\theta=K^\wedge\cdot\cdot E^\wedge$ — параметр процесса деформирования, описывающий изменение объема; $E^\wedge$ — единичный тензор. Класс упругопластических процессов выделяется на основании известного положения [1], согласно которому при постоянных напряжениях деформации не изменяются со временем и наоборот.

Введем ряд положений, отражающих свойства твердых тел при упругопластическом деформировании.

1°. Процессу активного нагружения соответствует поверхность в пятимерном пространстве $w(\boldsymbol{\tau})=w^s$, ограничивающая область обратимого течения процессов — граница обратимости. Процесс активного нагружения описывается вектором активного нагружения $\boldsymbol{\tau}^s$, конец которого принадлежит поверхности обратимости. Процессы, протекающие внутри и на данной поверхности не сопровождаются производством диссипации и изменением вектора активного нагружения. Таким образом, при элементарном изменении напряженного состояния $d\boldsymbol{\tau}$, выполняются условия: $d\boldsymbol{\tau}^s=d\boldsymbol{\tau}$, если $\mathbf{n}\cdot d\boldsymbol{\tau}>0$; $d\boldsymbol{\tau}^s=0$, если $\mathbf{n}\cdot d\boldsymbol{\tau}\leqslant 0$; $\mathbf{n}$ — единичный вектор, нормальный к границе обратимости и направленный в необратимую область.

2°. В процессе активного нагружения — $d\boldsymbol{\tau}^s$ выполняются термодинамические соотношения, являющиеся следствием первого и второго законов термодинамики сплошной среды [2]:

$$d'\varphi_s=\boldsymbol{\tau}^s\cdot d\mathbf{k}^s-d'w,\quad d'w>0 \tag{1.1}$$

$$d\varphi_s{}^\theta=\sigma^s\cdot d\theta^s \tag{1.2}$$

---

[1] *Маркин А. А.* Определяющие соотношения конечного упругопластического деформирования. Тула, 1985. 17 с.– Деп. в ВИНИТИ 8.04.85, № 2358–85.

где $\varphi_s+\varphi_s^\theta$ — удельная свободная энергия; $\varphi_s[\boldsymbol{\tau}^s(t)]_0^{t_s}$ — свободная энергия формоизменения, являющаяся в общем случае функционалом процесса активного нагружения, который полагается независимым от гидростатической составляющей; $\varphi_s^\theta(\sigma^s)$ — свободная энергия объемного изменения; $w[\boldsymbol{\tau}^s(t)]_0^{t_s}$ — функционал диссипации.

Функцонал энергии формоизменения полагаем положительно определенным, ограниченным $-0<\varphi_{s0}\leqslant\varphi_s\leqslant\varphi_{s\,\max}$ и неубывающим при активном нагружении:

$$d'\varphi_s=\xi d'w,\ \xi>0\ (\varphi_s<\varphi_{s\,\max}),\ \xi=0\ (\varphi_s=\varphi_{s\max}) \tag{1.3}$$

3°. В пятимерном пространстве конечного деформирования считаем справедливым частный постулат изотропии [1], тогда начальная поверхность обратимости сфера — $\tau=\tau_0^s$, где $\tau=(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\tau})^{1/2}$ — интенсивность нагружения. Термодинамические соотношения в обратимой области при $\tau^s=\tau_0^s$ имеют вид $d\varphi=\boldsymbol{\tau}\cdot d\mathbf{k}$, $d\varphi^\theta=\sigma d\theta$.

Из частного постулата следует, что энергия формоизменения в этом случае есть функция интенсивности нагружения — $\varphi=\varphi(\tau)$ и $d\varphi=\tau\cdot dk$. После активного нагружения, когда $\tau^s>\tau_0^s$, термодинамическое соотношение принимаем в форме

$$d(\varphi+\varphi^\theta)=\boldsymbol{\tau}\cdot d\mathbf{k}+\sigma d\theta \tag{1.4}$$

Здесь энергия формоизменения есть функция вектора нагружения, составляющая $\varphi^\theta$ также может зависеть от него $\varphi^\theta=\varphi^\theta(\sigma,\boldsymbol{\tau})$. При этом должны выполняться условия непрерывности перехода от активного нагружения к обратимому

$$\varphi^\theta(\boldsymbol{\tau},\sigma)|_{\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}^s}=\varphi_s^\theta(\sigma^s),\ \varphi(\boldsymbol{\tau})|_{\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}^s}=\varphi_s(\boldsymbol{\tau}^s) \tag{1.5}$$

Материал в обратимой области считаем устойчивым при нагружении вдоль силовых линий, перпендикулярных эквипотенциальным поверхностям $\varphi(\boldsymbol{\tau})=\varphi_C$. Условие материальной устойчивости имеет вид

$$\operatorname{grad}\varphi|_{\varphi=\varphi_C}\cdot\mathbf{n}_C>0 \tag{1.6}$$

где $\mathbf{n}_C$ — вектор нормальный к эквипотенциальной поверхности и направленный во внешнюю область.

На основании положений 1°—3° докажем, что эквипотенциальная поверхность свободной энергии формоизменения $\varphi=\varphi_s$ совпадает с поверхностью обратимости. Рассмотрим из точки $\boldsymbol{\tau}^s$ процесс, для которого $\varphi=\varphi_s$, причем $\varphi_s<\varphi_{s\,\max}$, $\xi>0$. Так как в этом случае $d'\varphi_s=0$ в любой точке процесса, то из (1.3) следует, что и $d'w=0$. Отсутствие производства диссипации означает, что эквипотенциальная поверхность $\varphi(\boldsymbol{\tau})=\varphi_s$ расположена внутри поверхности обратимости, либо совпадает с ней.

Если эквипотенциальная поверхность $\varphi=\varphi_s$ лежит в обратимой зоне, из (1.6) имеем, что движение по нормали к ней в сторону поверхности обратимости приводят к росту свободной энергии — $\varphi>\varphi_s$ и, согласно (1.3), к производству диссипации. Но производство диссипации внутри области обратимости невозможно, следовательно, эквипотенциальная поверхность должна совпадать с границей обратимости. Таким образом, теорема доказана.

В зависимости от характера изменения свободной энергии и диссипации будем различать следующие стадии процесса нагружения начально изотропного тела:

А. Обратимая (упругая) $0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_{s0}$, $d'w=0$;

В. Активная упругопластическая $\varphi_{s0}<\varphi_s\leqslant\varphi_{s\,\max}$, $d'\varphi_s>0$, $d'w_s>0$;

С. Активная пластическая $\varphi_s=\varphi_{s\,\max}$, $d'\varphi_s=0$, $d'w_s>0$.

После разгрузки из стадии $B$ или $C$ материал может подвергаться повторному упругому, упругопластическому и пластическому нагружениям. Существенно, что свойства материала при вторичных нагружениях уже не будут изотропными [1]. В частности, в самом процессе разгрузки, происходящей в обратимой области, упругие свойства материала отличаются от начальных. В связи с этим, теория процессов конечного упругопластического деформирования наряду с определяющими соотношениями, описывающими стадии A, B, C, должны включать соотношения, предсказывающие свойства материала после активного нагружения.

**2. Изменение упругих свойств в результате активного нагружения по плоской траектории.** Рассмотрим активное нагружение по плоской траектории с дуговой координатой $s_\tau$. С произвольной точкой $S$ траектории свяжем диссипативный базис $\boldsymbol{\tau}^s$, $\boldsymbol{\tau}_1^s=\partial\boldsymbol{\tau}^s/\partial s_\tau$. В дальнейшем полагаем функционал $\varphi_s$ функцией интенсивности нагружения. При разгрузке от достигнутого диссипативного базиса и вторичных упругих нагружениях, составляющие свободной энергии есть функции смешанных инвариантов $\chi=(\boldsymbol{\tau}^s\cdot\boldsymbol{\tau})/\tau^s$, $\chi_1=\boldsymbol{\tau}_1^s\cdot\boldsymbol{\tau}$:

$$\varphi^\theta=\varphi^\theta(\sigma, \chi, \chi_1) \qquad (2.1)$$

$$\varphi=\varphi(\tau, \chi, \chi_1) \qquad (2.2)$$

Из (1.4), (2.1), (2.2) получаем систему уравнений, определяющих связь процессов нагружения и деформирования в обратимой области

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau}=\boldsymbol{\tau}\cdot\frac{\partial\mathbf{k}}{\partial\tau}+\sigma\frac{\partial\theta}{\partial\tau},\quad \frac{\partial\psi}{\partial\chi}=\boldsymbol{\tau}\cdot\frac{\partial\mathbf{k}}{\partial\chi}+\sigma\frac{\partial\theta}{\partial\chi}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\chi_1}=\boldsymbol{\tau}\cdot\frac{\partial\mathbf{k}}{\partial\chi_1}+\sigma\frac{\partial\theta}{\partial\chi_1},\quad \frac{\partial\psi}{\partial\sigma}=\frac{\partial\varphi^\theta}{\partial\sigma}=\boldsymbol{\tau}\cdot\frac{\partial\mathbf{k}}{\partial\sigma}+\frac{\partial\theta}{\partial\sigma},\quad \psi=\varphi+\varphi^\theta \qquad (2.3)$$

Представим решение системы (2.3) в следующем виде: $\mathbf{k}=\mathbf{k}_p+\mathbf{k}_\tau+\mathbf{k}_\sigma$, где $\mathbf{k}_p$ — вектор-константа

$$\mathbf{k}_\tau=C_0(\tau, \chi, \chi_1)\boldsymbol{\tau}+C_1(\tau, \chi, \chi_1)\boldsymbol{\tau}^s+C_2(\tau, \chi, \chi_1)\boldsymbol{\tau}_1^s \qquad (2.4)$$

$$\mathbf{k}_\sigma=C_1^\theta(\sigma, \chi, \chi_1)\boldsymbol{\tau}^s+C_2^\theta(\sigma, \chi, \chi_1)\boldsymbol{\tau}_1^s \qquad (2.5)$$

Придавая $\mathbf{k}_p$ смысл вектора остаточного формоизменения $\mathbf{k}_p=\mathbf{k}|_{\tau=0}$, имеем следующие начальные условия:

$$C_1|_{\sigma=0}=C_2|_{\tau=0}=0,\ C_1^\theta|_{\sigma=0}=C_2^\theta|_{\sigma=0}=0. \qquad (2.6)$$

Таким образом, существенный при конечном деформировании вопрос о способе введения пластической составляющей, при данном подходе решается естественным образом, как следствие гипотезы о существовании поверхности обратимости. Определение упругих составляющих $\mathbf{k}_\tau$ и $\mathbf{k}_\sigma$ на основании (2.3)—(2.6) сводится к нахождению функций $C_i$, $C_i^\theta$ из следующих систем уравнений:

$$\varphi_\tau=\tau^2C_{0\tau}+\tau C_0+\tau^s\chi C_{1\tau}+\chi_1C_{2\tau} \qquad (2.7)$$

$$\varphi_\chi=\tau^2C_{0\chi}+\tau^2\chi C_{1\chi}+\chi_1C_{2\chi}$$

$$\varphi_{\chi_1}=\tau^2C_{0\chi_1}+\tau^2\chi C_{1\chi_1}+\chi_1C_{2\chi_1}$$

$$\varphi_\sigma^\theta=\sigma\theta_\sigma+C_{1\sigma}^\theta\tau^s\chi+C_{2\sigma}^\theta\chi_1 \qquad (2.8)$$

$$\varphi_\chi^\theta=\tau^sC_{1\chi}^\theta+\sigma\theta_\chi,\quad \varphi_{\chi_1}^\theta=C_{2\chi_1}^\theta\chi_1+\sigma\theta_{\chi_1}$$

где $\varphi_\tau=\partial\varphi/\partial\tau$, $\varphi_\chi=\partial\varphi/\partial\chi$. Соответствующие системам (2.7) и (2.8) условия совместности имеют вид:

$$\tau^sC_{1\tau}=\tau C_{0\chi},\quad C_{2\tau}=\tau C_{0\chi_1},\quad C_{2\chi}=\tau^sC_{1\chi_1} \qquad (2.9)$$

$$\tau^sC_{1\sigma}^\theta=\theta_\chi,\quad C_{2\sigma}^\theta=\theta_{\chi_1},\quad \tau^sC_{1\chi\chi_1}^\theta=\chi_1C_{2\chi\chi_1}^\theta \qquad (2.10)$$

Из условия непрерывности упругих составляющих при переходе от активного нагружения к обратимому, с учетом (1.1), (1.2), (1.5) следует

$$C_2|_{\tau=\tau^s}=0,\ C_1^\theta|_{\tau=\tau^s}=C_2^\theta|_{\tau=\tau^s}=0 \qquad (2.11)$$

Включение в выражение свободной энергии инвариантов $\chi$, $\chi_1$ позволяет отразить развитие анизотропии в процессе диссипации. При этом сохраняется симметрия упругих свойств относительно плоскости $\boldsymbol{\tau}^s$, $\boldsymbol{\tau}_1^s$. Кроме того, меняется характер скалярных свойств материала. Так, первоначально линейный в упругой области материал может приобрести существенную нелинейность вследствие активного нагружения.

**3. Изменение характеристик процесса при элементарном активном нагружении.** Рассмотрим изменения свободной энергии и диссипации, происходящие вследствие активного процесса — $d\tau^s$, совершаемого из точки $S$ поверхности обратимости в сколь угодно близкую точку $P$ необратимой области. Так как вектор $\boldsymbol{\tau}_1{}^s$ остается неизменным в данном процессе, то не меняется и инвариант $\chi_1$. Изменение свободной энергии в произвольной, фиксированной точке обратимой области с радиус-вектором $\boldsymbol{\tau}$ принимает вид

$$d'\varphi=\left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{\tau^s}-\boldsymbol{\tau}\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\tau}^s}{(\tau^s)^3}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\chi}\cdot d\boldsymbol{\tau}^s+\frac{\partial\varphi}{\partial\tau^s}d\tau^s \qquad (3.1)$$

Производство диссипации находим, рассматривая элементарный замкнутый процесс $SPS$. Из термодинамических соотношений (1.1), (1.2) и выражения (3.1) при $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}^s$, имеем

$$d'w_{sp}=\boldsymbol{\tau}^s\cdot d\mathbf{k}_p-\frac{\partial\varphi}{\partial\tau^s}\cdot d\tau^s$$

Отсюда скорость производства диссипации приобретает вид

$$w^{\bullet}=\boldsymbol{\tau}^s\cdot(\mathbf{k}_p-R\boldsymbol{\tau}^{s\bullet}),\qquad R=\frac{1}{\tau^s}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau^s}\bigg|_{\tau=\tau^s} \qquad (3.2)$$

С целью конкретизации направления необратимой составляющей $\mathbf{k}_p$, дополним термодинамические соотношения принципом максимума производства диссипации [3]. Используем силовую версию принципа, согласно которой скорость диссипации истинного состояния $\boldsymbol{\tau}^s$ превосходит скорость диссипации возможного состояния $\boldsymbol{\tau}^s+\Delta\boldsymbol{\tau}^s$. Сравниваемые процессы имеют одинаковые скорости пластического деформирования и активного нагружения. Таким образом, для любого вектора $\Delta\boldsymbol{\tau}^s$ с началом в точке $\boldsymbol{\tau}^s$ и концом на поверхности обратимости должно выполняться неравенство

$$\Delta w^{\bullet}=w^{\bullet}(\boldsymbol{\tau}^s)-w^{\bullet}(\boldsymbol{\tau}^s+\Delta\boldsymbol{\tau}^s)>0 \qquad (3.3)$$

Рассмотрим поле векторов $\Delta\boldsymbol{\tau}^s$ в окрестности точки $\boldsymbol{\tau}^s$. Тогда для точки с дуговой координатой $\Delta s$ нормального сечения поверхности обратимости, с точностью до малых второго порядка, вектор $\Delta\boldsymbol{\tau}^s$ имеет вид

$$\Delta\boldsymbol{\tau}^s=\mathbf{t}\Delta s+{}^1/_2\mathbf{m}(\Delta s)^2 \qquad (3.4)$$

$$\mathbf{t}=\partial\boldsymbol{\tau}/\partial s,\quad \mathbf{m}=\partial^2\boldsymbol{\tau}^s/\partial s^2$$

На основании (3.2)—(3.4) находим условие выполнения принципа в рассматриваемой окрестности

$$-\Delta w^{\bullet}=\mathbf{P}^{\bullet}\cdot\mathbf{t}\Delta s+{}^1/_2(\mathbf{k}_p-R\boldsymbol{\tau}^s)\cdot\mathbf{m}(\Delta s)^2+$$

$$+\left[\frac{1}{2}\tau^s\frac{d}{d\tau^s}\left(\frac{1}{\tau^s}\frac{dR}{d\tau^s}\right)+\frac{3}{2\tau^s}\frac{dR}{d\tau^s}\right](\mathbf{t}\cdot\boldsymbol{\tau}^{\bullet s})(\mathbf{t}\cdot\boldsymbol{\tau}^s)(\Delta s)^2 \qquad (3.5)$$

Так как вектор $\mathbf{t}$ может иметь произвольное направление в плоскости касательной поверхности обратимости в точке $\boldsymbol{\tau}^s$, для выполнения неравенства (3.5) достаточно удовлетворить следующим условиям:

$$\mathbf{P}^{\bullet}=\mathbf{k}^{\bullet}-(R+\tau^s dR/d\tau^s)\boldsymbol{\tau}^{\bullet s}=\lambda^{\bullet}\mathbf{n},\quad \boldsymbol{\tau}^s=\mathbf{n}\tau^s \qquad (3.6)$$

$$(\mathbf{k}_p{}^{\bullet}-R\boldsymbol{\tau}^{\bullet s})\cdot\mathbf{m}<0 \qquad (3.7)$$

Выполнение ассоциированных с поверхностью обратимости условий (3.6) обращает в ноль первое и третье слагаемые в (3.5). Совместным следствием принципа максимума (3.6) и второго закона термодинамики (1.1) является термодинамическое неравенство, которое должно выполняться в процессе активного нагружения начально изотропного тела

$$w^{\bullet}=\lambda^{\bullet}\tau^s+(\tau^s)^2\tau^{\bullet s}dR/d\tau^s>0 \qquad (3.8)$$

Второе термодинамическое неравенство — есть непосредственное следствие принципа максимума и получается из (3.7) с учетом (3.6) в виде

$$\lambda^{\cdot}\mathbf{n}\cdot\mathbf{m}+\tau^s(\boldsymbol{\tau}^{\cdot s}\cdot\mathbf{m})\,dR/d\tau^s<0 \qquad (3.9)$$

Одновременное выполнение неравенств (3.8) и (3.9) будет обеспечено, если 1) $\mathbf{n}\cdot\mathbf{m}<0$ — поверхность обратимости выпукла в окрестности точки $S$; 2) $\lambda^{\cdot}>0$ — множитель $\lambda^{\cdot}$ положителен; 3) $\boldsymbol{\tau}^{\cdot s}\cdot\mathbf{m}<0$ — вектор скорости активного нагружения направлен от поверхности обратимости; 4) $\tau^{\cdot s}>0$ — интенсивность активного нагружения возрастает; 5) функция свободной энергии удовлетворяет условию

$$dR/d\tau^s\geqslant 0 \qquad (3.10)$$

Основным следствием принципа максимума является закон пластического формоизменения, который на основании (3.6) и (3.8) имеет вид

$$\mathbf{k}_p^{\cdot}=\left(\frac{w^{\cdot}}{\tau^s}-\tau^s\frac{dR}{d\tau^s}\right)\frac{\boldsymbol{\tau}^s}{\tau^s}+\left(R+\tau^s\frac{dR}{d\tau^s}\right)\boldsymbol{\tau}^{\cdot s} \qquad (3.11)$$

Второе слагаемое в правой части выражения (3.11) отражает отклонение вектора $\mathbf{k}_p$ от нормали к поверхности обратимости. Это связано с влиянием необратимого нагружения на упругие свойства. Если положить в (3.11) функцию $R(\tau^s)$, отражающую данный эффект, тождественно равной нулю, то получим аналог теории течения с изотропным упрочнением.

Запишем определяющие соотношения в точке $S$ для произвольного продолжения — $d\boldsymbol{\tau}$. Из (2.4) и (3.11) при $\tau^{\cdot}>0$ имеем

$$d\mathbf{k}_s=d\mathbf{k}_p+\boldsymbol{\tau}^s dC^s+C^s d\boldsymbol{\tau}^s \qquad (3.12)$$

$$d\mathbf{k}_p=(d'w/\tau^s-\tau^s dR)\,\boldsymbol{\tau}^s/\tau^s+(R+\tau^s dR/d\tau^s)\,d\boldsymbol{\tau}^s$$

$$C^s=C_0+C_1\,|_{\tau=\tau^s};\qquad dC^s=\frac{dC^s}{d\tau^s}d\tau^s$$

При направлении процесса в обратимую зону, когда $\tau^{\cdot}\leqslant 0$, соотношения в приращениях получают вид

$$d\mathbf{k}=\boldsymbol{\tau}^s dC+C_0{}^s d\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{\tau}_1{}^s dC_2,\ d\mathbf{k}_p=0$$

$$dC=\frac{d(C_0+C_1)}{d\boldsymbol{\tau}}\bigg|_{\tau=\tau^s}\cdot d\boldsymbol{\tau},\qquad dC_2=\frac{dC_2}{d\boldsymbol{\tau}}\bigg|_{\tau=\tau^s}\cdot d\boldsymbol{\tau} \qquad (3.13)$$

Для сохранения непрерывности приращений вектора $d\mathbf{k}$ при переходе от нагрузки ($\tau^{\cdot}>0$) к разгрузке ($\tau^{\cdot}\leqslant 0$) потребуем выполнения условия $d\mathbf{k}^s\to d\mathbf{k}$ при $d\boldsymbol{\tau}^s\to d\boldsymbol{\tau}=\mathbf{t}\Delta s$. Из сравнения (3.12) и (3.13) получаем указанные условия непрерывности

$$R+\tau^s dR/d\tau^s+C_1{}^s=0 \qquad (3.14)$$

$$\frac{dC^s}{d\boldsymbol{\tau}^s}\cdot\mathbf{t}=\frac{dC}{d\boldsymbol{\tau}}\bigg|_{\tau=\tau^s}\cdot\mathbf{t},\qquad \frac{dC_2{}^s}{d\boldsymbol{\tau}^s}\cdot\mathbf{t}=\frac{dC_2}{d\boldsymbol{\tau}}\bigg|_{\tau=\tau^s}\cdot\mathbf{t} \qquad (3.15)$$

**4. Конкретизация определяющих соотношений.** Задача описания процесса конечного деформирования в стадиях $A$, $B$, $C$ и при вторичном нагружении в упругой области будет решена, если конкретизированы формы составляющих $\varphi$ и $\varphi^\theta$ свободной энергии и производства диссипации на основании частной системы экспериментов. Необходимость выполнения условий (2.1), (2.6), (2.11), (3.10), (3.14) и (3.15) позволяет существенно ограничить формы возможных аппроксимаций выражений (2.1), (2.2). Из анализа уравнений (2.6), (2.7), (2.9) находим, согласованные с указанными условиями, наиболее простые аппроксимации выражений (2.2) и (2.4)

$$\varphi=\tau^2/(4G)-a_0\tau^s\tau(\chi-\tau)+a_2\tau^s(\tau-\tau^s)^2\chi\tau+b(\tau^s-\chi_1{}^s)\left[\int\chi_1(\chi_1-\chi_1{}^s)^2\,d\chi_1+\right.$$
$$\left.+2\int\chi_1{}^2(\chi_1-\chi_1{}^s)\,d\chi_1\right]+\varphi_2(\tau^s)$$

$$C_0=1/(2G)-a_0\tau^s\tau^{-1}+2a_0\tau^s+\tau^s\tau^{-1}a_2(\tau-\tau^s)^2\chi \tag{4.1}$$

$$C_1={}^1/_2a_2(\tau-\tau^s)^3+{}^1/_3a_2(\tau^s)^3-a_0\tau$$

$$C_2=b(\tau^s-\chi_1^s)(\chi_1-\chi_1^s)^2\chi_1$$

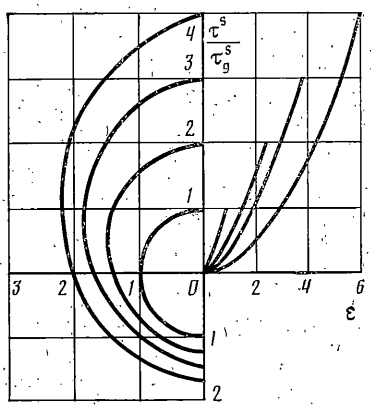
Здесь $a_0$, $a_2$, $b$ — функции интенсивности активного нагружения, причем $a_0(\tau_0^s)=a_2(\tau_0^s)=b(\tau_0^s)=0$; $2G$ — модуль сдвига начально изотропного тела; $\varphi_2$ — скрытая свободная энергия, накапливаемая в активном процессе, $\varphi_2(\tau_0^s)=0$.

На основании (3.14) $\varphi_2$ определяется из уравнения

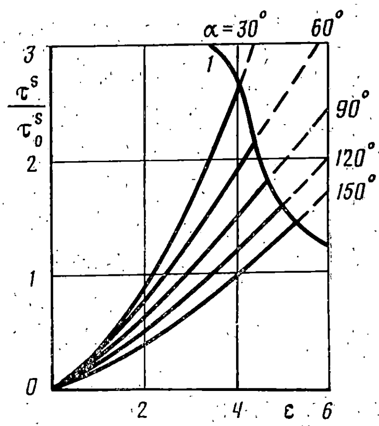
$$\frac{1}{\tau^s}\frac{d\varphi_2}{d\tau^s}+\tau^s\frac{d}{d\tau^s}\frac{1}{\tau^s}\frac{d\varphi_2}{d\tau^s}=a_0\tau^s-\frac{a_2}{3}(\tau^s)^3$$

Параметры $a_0(\tau^s)$ и $a_2(\tau^s)$ могут конкретизироваться, исходя из известного эффекта уменьшения начального сдвигового модуля при вторичном упругом нагружении [4]. В частности, аппроксимируя экспериментальные данные для $2G_0=d\tau/dk_e|_{\tau=0,\,\alpha=0}$ зависимостью $G/G_0-1=\beta(\tau^s/\tau_0^s-1)$, $\cos\alpha=\chi/\tau^s$, получим $2a_2(\tau_s)^3=\beta(\tau^s/\tau_0^s-1)/(2G)$, где $\beta$ — экспериментальная константа. Из условия непрерывности касательного модуля сдвига $d\tau/dk_\tau|_{\alpha=0;\ \tau=0}=d\tau/dk_\tau|_{\alpha=\pi,\ \tau=0}$ следует $a_0=(\tau^s)^2a_2$.

На фиг. 1, 2 показан характер эволюции поверхности обратимости $\tau=\tau_0^s$ и упругих свойств материала в процессе простого активного нагружения. Слева от оси $OZ$, где $Z=\tau^s/\tau_0^s$, на фиг. 1, исходя из (4.1) при $\beta=1$ для $\tau^s/\tau_0^s=1, 2, 3, 4$ построены кривые от пересечения поверхностей обратимости с полуплоскостью, проходящей через ось их симметрии — вектор $\tau^s$. Справа приведены соответствующие данным




Фиг. 1




Фиг. 2

степеням упрочнения зависимости $\tau(\varepsilon)/\tau_0^s$, $\varepsilon=2Gk_\tau/\tau_0^s$ при вторичных нагружениях в упругих областях по траектории активного процесса ($\alpha=0$). Видно, что упругие свойства становятся существенно нелинейными, так как в начальный период нагружения касательный сдвиговый модуль быстро растет, а затем его значение стабилизируется и при $\tau=\tau^s$ становится равным начальному модулю (до пластического деформирования). Таким образом, как это и наблюдается в экспериментах [4], примерная пропорциональность сдвиговых характеристик имеет место после достижения некоторого значения интенсивности нагружения.

На фиг. 2 показаны зависимости $\tau(\varepsilon)/\tau_0^s$ при фиксированном упрочнении ($\tau/\tau_0^s=3$) и различных значениях угла $\alpha$. Кривая *1* ограничивает область упругого изменения. Здесь отражается анизотропия упругих сдвиговых свойств, приобретенная при пластическом деформировании. При этом наблюдается непрерывное уменьшение стабильного значения модуля сдвига при переходе от траектории начального нагружения ($\alpha=0$) к противоположной ($\alpha=\pi$).

Определяющие соотношения (3.12), описывающие процесс активного нагружения, представим в форме [1]:

$$d\mathbf{k}^s=\frac{1}{N}d\boldsymbol{\tau}^s+\left(\frac{1}{P}-\frac{1}{N}\right)\frac{\boldsymbol{\tau}^s}{\tau^s}d\tau^s \tag{4.2}$$

$$\frac{1}{N}=C^s+R+\frac{\tau^s dR}{d\tau^s},\qquad \frac{1}{P}=\frac{\tau^s dC^s}{d\tau^s}+R+\frac{1}{\tau^s}\frac{d'w}{d\tau^s}$$

Так как при нагружении в направлении перпендикулярном к нормали границы обратимости диссипация отсутствует, то представим $w^{\bullet}$ в следующем виде

$$w^{\bullet}=\mu(\tau^s, \chi_1^s)\,\boldsymbol{\tau}^{\bullet s}\cdot\mathbf{n} \tag{4.3}$$

Правую часть (4.3) разложим по степеням $\chi_1^s$:

$$\mu(\tau^s, \chi_1^s)=\mu_0(\tau^s)+\mu_1(\tau^s)\chi_1^s+\mu_2(\tau^s)(\chi_1^s)^2+\ldots \tag{4.4}$$

Рассмотрим основной вариант определяющих соотношений, в котором полагаем $\mu(\tau^s, \chi_1^s)=\mu_0(\tau^s)$, $b=0$. В этом случае для определения функций $a_0(\tau^s)$, $a_2(\tau^s)$, $\mu_0(\tau^s)$ достаточно эксперимента на простое нагружение с промежуточными разгрузками. Из зависимости $k^s(\tau^s)$, полученной в данном эксперименте, находим

$$(\tau^s)^{-1}\mu_0(\tau^s)=(2G')^{-1}-N^{-1} \tag{4.5}$$

где $(2G')^{-1}=dk^s/d\tau^s$ — величина обратная касательному модулю.

Интегрируя уравнение (3.14), с учетом принятых аппроксимаций $a_0(\tau^s)$ и $a_2(\tau^s)$, получим

$$\begin{gathered} R=\frac{\beta}{12G_0}\left(\frac{\tau^s}{\tau_0^s}+\frac{\tau_0^s}{\tau^s}-2\right)\\ \varphi_2=\frac{\beta}{12G_0}\left[\frac{(\tau^s)^3}{3\tau_0^s}-\frac{(\tau_0^s)^2}{3}+\tau^s(\tau_0^s-\tau^s)\right] \end{gathered} \tag{4.6}$$

Из (4.3—4.6) находим выражения функционалов Ильюшина в основном варианте определяющих соотношений

$$\frac{1}{N}=\frac{1}{2G_0}+\frac{\beta}{12G_0}\left(\frac{\tau^s}{\tau_0^s}-1\right),\qquad \frac{1}{P}=\frac{1}{N}+\frac{1}{\tau^s}\mu_0(\tau^s) \tag{4.7}$$

Таким образом, основной вариант определяющих соотношений включает выражения (4.2), (4.7), описывающие процесс активного нагружения и выражения (4.1), (4.6), позволяющие учесть характер изменения пластических (эволюция поверхности обратимости) и упругих свойств материала в данном процессе.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
2. *Левитас В. И.* Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев: Наук. думка, 1987. 228 с.
3. *Циглер Г.* Экстремальные принципы термодинамики необратимых процессов и механика сплошной среды. М.: Мир, 1966. 133 с.
4. *Белл Дж. Ф.* Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч. 2. Конечные деформации. М.: Наука, 1984. 431 с.



Тула

Поступила в редакцию 22.IX.1987