

УДК 539.3

© 1990 г.

К. С. АДАМОВА, М. А. КАНИБОЛОТСКИЙ

## ПРИМЕНЕНИЕ П-СИСТЕМЫ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ГЛОБАЛЬНОГО ЭКСТРЕМУМА ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрена задача оптимизации структуры звукоотражающего экрана минимальной толщины, имеющего заданный коэффициент прохождения потока волновой энергии. Выявлена многоэкстремальность решения этой задачи, что вызвано волновым характером физического процесса. Предложен метод нахождения глобального экстремума путем сведения исходной оптимизационной задачи к решению однопараметрического семейства задач Коши для соответствующей П-системы.

**1. Постановка задачи.** Пусть плоская монохроматическая волна, волновой вектор которой направлен в положительном направлении оси  $z$ , падает из полупространства  $z < 0$  на слоистый экран, занимающий область  $0 \leq z \leq l$ . Требуется из заданного набора упругих материалов синтезировать слоистый экран минимальной толщины при заданном коэффициенте прохождения потока волновой энергии.

Уравнения акустики в слоистом экране описывается следующей системой [1]:

$$\begin{aligned} dv(z)/dz &= -i\omega(\rho c^2)^{-1}p(z), \quad p(0) = w_0 v(0) + 2P_0 \\ dp(z)/dz &= -i\omega\rho v(z), \quad p(l) = -w^0 v(l) \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $v, p$  — комплексные амплитуды скорости и давления,  $\omega = 2\pi f$ ,  $f$  — частота,  $P_0$  — амплитуда давления в падающей волне,  $w_0, w^0$  — волновые сопротивления полупространств  $z < 0$  и  $z > l$ ,  $\rho, c$  — плотность и скорость звука материалов слоев. Граничные условия в (1.1) отражают взаимодействие упругослоистого экрана с окружающими акустическими средами. Минимизируемый функционал имеет вид

$$F_0[u(z), l] = l \rightarrow \min \quad (1.2)$$

где  $l$  — общая толщина панели. Ограничение, накладываемое на поток волновой энергии, прошедший в полупространство  $z > l$ , можно записать в виде

$$F_1[u(z), l] = (|p(l)|^2/w^0 - \eta|P_0|^2/w_0)/2 = 0 \quad (1.3)$$

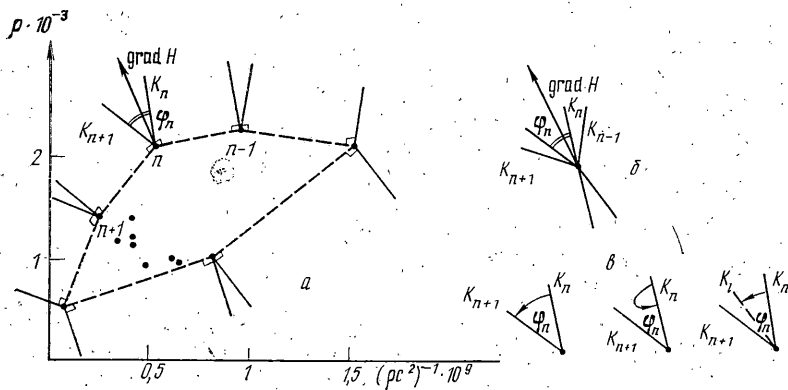
Величина  $0 < \eta < 1$  является энергетическим коэффициентом прохождения.

Для описания структуры слоистой среды введем характеристическую функцию слоистой среды  $u(z)$  [1], которая в каждой точке  $z \in [0, l]$  принимает целочисленное значение, равное порядковому номеру материала из исходного набора, находящегося в этой точке. Задание  $u(z)$  определяет одновременно количество, размеры и материалы слоев. Очевидно,  $\rho = \rho[u(z)]$ ,  $c = c[u(z)]$ . В качестве управления выберем пару  $\{u(z), l\}$ , где  $u(z)$  является кусочно-постоянной функцией

$$u(z) = \{u_s | z_s \leq z < z_{s+1}\}, \quad s = 1, \dots, S, \quad z_1 = 0, \quad z_{S+1} = l \quad (1.4)$$

множество значений которой является целочисленным множеством ( $M$  — количество материалов исходного набора):

$$u_s \in \{1, \dots, M\} \quad (1.5)$$



Фиг. 1

Задача оптимального проектирования формулируется следующим образом: среди функций  $u(z)$ , задаваемых (1.4)–(1.5), и чисел  $l > 0$  найти пару  $\{u^{opt}(z), l^{min}\}$ , доставляющую минимум функционалу (1.2) при ограничении (1.3).

2. Необходимые условия оптимальности, исследование II-системы. Для сформулированной в п. 1 задачи в [1] приведены следующие необходимые условия оптимальности: пусть  $\{u^{opt}(z), l^{min}\}$  — оптимальное управление, доставляющее минимум функционалу (1.2) при ограничении (1.3),

Таблица

№	$\rho \cdot 10^{-3}$	$c \cdot 10^{-3}$	№	$\rho \cdot 10^{-3}$	$c \cdot 10^{-3}$
1	0,55	5,03	8	1,2	1,4
2	0,91	1,5	9	1,4	1,3
3	0,95	1,27	10	1,42	1,64
4	1,01	1,1	11	1,77	0,87
5	1,08	1,25	12	2,14	0,93
6	1,14	1,45	13	2,14	0,55
7	1,18	1,6	14	2,18	0,7

а  $y(z) = \{v(z), p(z)\}$  — соответствующее решение управляемой системы (1.1). Тогда существует сопряженная вектор-функция  $\psi(z) = \{\psi_1(z), \psi_2(z)\}$ , удовлетворяющая сопряженной системе

$$\begin{aligned} d\psi_1(z)/dz &= i\omega \rho \psi_2(z), \quad \psi_1(0) = -w_0 \psi_2(0) \\ d\psi_2(z)/dz &= i\omega (\rho c^2)^{-1} \psi_1(z), \quad \psi_1(l) = w^0 (\psi_2(l) + \overline{p(l)}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

и такая, что составленная с ее помощью функция Гамильтона ( $B$  — константа, определенная в [1]):

$$\begin{aligned} H(y, \psi, u) &= B \omega [\text{Im}(p\psi_1) \{\rho(u) c^2(u)\}^{-1} + \text{Im}(v\psi_2) \rho(u)] \\ B &= H^{-1}[y(l^{min}), \psi(l^{min}), u^{opt}(l^{min})] \end{aligned} \quad (2.2)$$

достигает максимума по аргументу  $u$  на оптимальном управлении:  $H(y, \psi, u^{opt}) = \max_{u \in (1, \dots, m)} H(y, \psi, u)$ .

В координатах  $\{1/(\rho c^2), \rho\}$ , (фиг. 1, а) материалам из исходного набора (см. таблицу) соответствует множество точек, выпуклой оболочкой которого является многоугольник. Поверхности уровня гамильтониана (2.2) при каждом  $z \in (0, l)$  представляют семейство параллельных прямых. Вектор  $\text{grad } H = \{P, Q\}$ , где  $P = B \omega \text{Im}(p\psi_1)$ ,  $Q = B \omega \text{Im}(v\psi_2)$ , нормален к этим прямым и указывает направление наибольшего возрастания гамильтониана.

*Следствие 1.* Из всех исходных материалов в оптимальную конструкцию могут входить только материалы, соответствующие вершинам многоугольника на фиг. 1, а.

*Следствие 2.* В оптимальной конструкции рядом могут находиться только материалы, соответствующие смежным вершинам многоугольника (фиг. 1, а).

Выделим согласно следствиям 1, 2 материалы, соответствующие вершинам многоугольника и занумеруем их от 1 до  $M^* \leq M$ , обходя смежные вершины против часовой стрелки. Проведенные геометрические построения будут использованы ниже для организации процедуры отыскания глобального экстремума.

Рассмотрим уравнение акустики (1.1). Из уравнения баланса энергии, переносимой падающей, отраженной и прошедшей волнами, и граничных условий можно выразить граничные значения  $v$  и  $p$  в виде

$$v(0) = -P_0[1 - (1 - \eta)^{1/2} e^{i\theta}] / w_0, \quad p(0) = P_0[1 + (1 - \eta)^{1/2} e^{i\theta}] \quad (2.3)$$

Угол  $\theta$  является неизвестной пока фазой напряжения в отраженной волне. Из имеющего места равенства  $\langle \mathbf{y}, \boldsymbol{\psi} \rangle = P_0 \eta / w_0 = \text{const}$  вытекают условия для  $\boldsymbol{\psi}$ :

$$\psi_1(0) = -P_0 \eta / 2, \quad \psi_2(0) = P_0 \eta / (2w_0) \quad (2.4)$$

Таким образом, краевые задачи (1.1) и (2.1) можно свести к задаче Коши с начальными условиями (2.3) и (2.4) при  $z=0$ , зависящими от одного свободного параметра  $\theta \in [-\pi, \pi]$ , имеющего смысл фазы отраженной от слоистого пакета волны. Такое сведение позволяет для нахождения оптимального решения использовать П-систему. Выпишем эту систему, предварительно перейдя к удобным для дальнейшего изучения новым сопряженным переменным  $\mathbf{r}$ , связанным со старыми по формулам  $r_1 = -\psi_2$ ,  $r_2 = -\psi_1$ ,  $\mathbf{r} = \{r_1, r_2\}$ . Учитывая последние равенства П-система примет вид

$$\begin{aligned} dv(z)/dz &= -i\omega(\rho(u)c^2(u))^{-1}p(z), \quad v(0) = -P_0[1 - (1 - \eta)^{1/2} e^{i\theta}] / w_0 \\ dp(z)/dz &= -i\omega\rho(u)v(z), \quad p(0) = P_0[1 + (1 - \eta)^{1/2} e^{i\theta}] \\ dr_1(z)/dz &= -i\omega(\rho(u)c^2(u))^{-1}r_2(z), \quad r_1(0) = -P_0\eta / (2w_0) \\ dr_2(z)/dz &= -i\omega\rho(u)r_1(z), \quad r_2(0) = P_0\eta / 2 \\ u(z) &= \arg \max_{\theta \in \{1, \dots, M\}} H(\mathbf{y}, \mathbf{r}, \theta) = f(\mathbf{y}, \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Система (2.5) при каждом  $\theta \in [-\pi, \pi]$  определяет управление  $u(z, \theta)$ , удовлетворяющее принципу максимума,  $\mathbf{y}$  и  $\mathbf{r}$  удовлетворяют управляемой и сопряженной системам. Кроме того, выполняются граничные условия при  $z=0$ . Остаются невыполненными граничные условия при  $z=l$  и неизвестна сама величина  $l$ . Нахождение  $l$  и удовлетворение граничному условию при  $z=l$  достигается путем выбора соответствующего  $\theta^* \in [-\pi, \pi]$  и удовлетворения ограничению (1.3). Ниже предлагается эффективная вычислительная процедура, позволяющая найти глобальный минимум толщины для целого семейства задач при различных значениях  $\eta$ . Кроме того, алгоритм в некоторой степени вскрывает природу неединственности локально-экстремальных решений.

Для построения вычислительной процедуры используем геометрическую интерпретацию необходимых условий оптимальности. Из каждой вершины многоугольника с номером  $n$  (фиг. 1, а) проведем две прямые, перпендикулярные ребрам, выходящим из этой вершины, и обозначим через  $K_n$  и  $K_{n+1}$  тангенсы углов наклона этих прямых к оси абсцисс, а через  $\varphi_n$  острый угол между этими прямыми. Сумма всех углов  $\varphi_n$  равна  $2\pi$ . На фиг. 1, б все  $\varphi_n$  отложены из одной вершины. Пока вектор  $\text{grad } H = \{P, Q\}$  лежит внутри угла  $\varphi_n$ , т. е.  $K_n < Q/P < K_{n+1}$ , максимум гамильтониана (2.2) достигается на  $n$ -ом материале. Пусть  $s$ -ый слой занимает материал с номером  $n$ . Тогда в точке  $z_s$  отношение  $Q(z_s)/P(z_s)$  равно  $K_n$  (либо  $K_{n+1}$ ). В точке  $z_{s+1}$  возможны три случая: 1) вектор  $\text{grad } H$ , поворачиваясь внутри угла  $\varphi_n$ , достигнет противоположной стороны (фиг. 1, в), и  $Q(z_{s+1})/P(z_{s+1})$  становится равным  $K_{n+1}$  (либо  $K_n$ ); 2) вектор  $\text{grad } H$ , поворачиваясь внутри угла  $\varphi_n$  сначала в одну, затем в другую сторону, возвращается к тому же направлению, что и в точке  $z_s$  (фиг. 1, в), т. е. отношение  $Q(z_{s+1})/$

$/P(z_{s+1})$  равно  $K_n$  (либо  $K_{n+1}$ ); 3) пусть внутри угла  $\varphi_n$  лежит прямая с тангенсом угла наклона  $K_l$ , указывающая направление, которое должен принимать  $\text{grad } H$  в конечной точке  $z=l$ , и отношение  $Q(z_{s+1})/P(z_{s+1})$  равно  $K_l$ . Тогда расчет заканчивается при  $z_{s+1}=l$  (фиг. 1, е). Из выражений для  $P$  и  $Q$  и граничных условий для  $y$  и  $r$  в точке  $z=0$  и  $z=l$  можно показать, что  $K_0=-(w_0)^{-2}$ ,  $K_l=-(w^0)^{-2}$ . Заметим, что направление  $\text{grad } H$  определяется отношением  $Q/P$  неоднозначно, а с точностью до поворота на угол  $\pi$ . Для выбора правильного направления нужно учитывать знаки  $P$  и  $Q$ . Получим рекуррентное соотношение, позволяющее последовательно находить толщины слоев конструкции.

Решение системы (1.1) в  $s$ -ом слое  $[z_s, z_{s+1}]$  записывается в виде

$$y(z) = R(z)y(0), \quad r(z) = R(z)r(0), \quad z \in [z_s, z_{s+1}]$$

$$R(z) = R_s(\Delta z)G_{s-1} = R_s(\Delta z) \prod_{j=1}^{s-1} R_{s-j}(\Delta z_{s-j}) \quad (2.6)$$

$$R_j(\Delta z_j) = \begin{vmatrix} \cos(\omega \Delta z_j / c_j) & -i w_j^{-1} \sin(\omega \Delta z_j / c_j) \\ -i w_j \sin(\omega \Delta z_j / c_j) & \cos(\omega \Delta z_j / c_j) \end{vmatrix} \quad (2.7)$$

где  $R(z)$  —  $(2 \times 2)$  матрица,  $w_j = \rho_j c_j$ ,  $\Delta z_j = z_{j+1} - z_j$ ,  $\Delta z = z - z_j$ ,  $\rho_j$ ,  $c_j$  — плотность и скорость звука материала  $j$ -го слоя. Можно показать, что компоненты всех матриц  $R$  и  $G$  являются действительными по главной диагонали и мнимыми по другой диагонали. Поэтому матрицу  $G_{s-1}$  можно записать так

$$G_{s-1} = \begin{vmatrix} G_{11} & iG_{12} \\ iG_{21} & G_{22} \end{vmatrix}$$

Введем обозначения  $t = \text{tg}[\omega c_s^{-1}(z - z_s)]$ ,  $v_s = Q(z_s)/P(z_s)$ . Тогда с учетом (2.6), (2.7) и равенства (случаи 1–3 соответственно):

$$K = \frac{Q(z_{s+1})}{P(z_{s+1})} = \left[ -\frac{\text{Im}(vr_1)}{\text{Im}(pr_2)} \right]_{z=z_{s+1}} = \begin{cases} K_{n+1}, & (1) \\ K_n, & (2) \\ K_l, & (3) \end{cases} \quad (2.8)$$

которое должно выполняться в точке  $z = z_{s+1}$ , в результате громоздких выкладок можно получить квадратное уравнение относительно  $t$ :

$$(w_s^{-2} - w_s^2 v_s K) t^2 + 2m_s (w_s^{-1} + w_s K) t + (v_s - K) = 0 \quad (2.9)$$

где  $v_s$  и  $m_s$  выражаются через компоненты матрицы  $G_{s-1}$  следующим образом  $v_s = (G_{11}^2/w_0^2 - G_{12}^2 + 2w_0^{-1}G_{11}G_{12} \text{ctg } \Theta)/D$ ,  $m_s = (G_{12}G_{22} + G_{11}G_{21}/w_0^2 + \text{ctg } \Theta(G_{21}G_{12} - G_{11}G_{22})/w_0)/D$ ,  $D = G_{21}^2/w_0^2 - G_{22}^2 - 2w_0^{-1}G_{21}G_{22} \text{ctg } \Theta$ .

Пусть найден корень  $t^*$ , при котором величина  $\text{arctg } t > 0$  достигает минимума, когда  $K$  принимает три разных значения из (2.8). Тогда конец интервала  $z_{s+1}$  находится из выражения  $z_{s+1} - z_s = (c_s/\omega) \text{arctg } t^*$ .

Зная  $\Delta z_s = z_{s+1} - z_s$ , можно перейти к следующему слою, полагая  $G_s = -R(z_{s+1}) = R_s(\Delta z_s)G_{s-1}$ . Расчеты начинаются при следующих значениях параметров:

$$v_1 = K_0, \quad m_1 = w_0^{-1} \text{ctg } \Theta \quad (2.10)$$

Из принципа максимума при  $z=0$  следует, что материал первого слоя выбирается из условия

$$u(0) = u_1 = \arg \max_{u \in (1, \dots, M)} \Phi(u) \text{sign } \Phi(u)$$

$$\Phi(u) = \rho(u) \{1 - w_0^2 [\rho(u) c(u)]^{-2}\} \quad (2.11)$$

Таким образом, задав  $\Theta \in [-\pi, \pi]$  и определив из (2.10), (2.11) необходимые для начала расчетов величины, можно построить по (2.9) слоистую систему, удовлетворяющую принципу максимума и граничным условиям

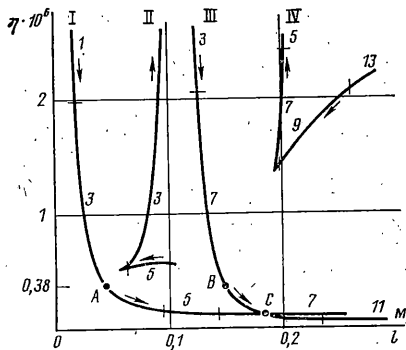
при  $z=0$  и  $z=l$ . Последнее следует из того, что рекуррентный процесс заканчивается при

$$Q(z_{s+1})/P(z_{s+1})=K_i \quad (2.12)$$

При этом  $z_{s+1}=l$ . Единственное невыполненное условие — ограничение (1.3) — можно удовлетворить, подобрав соответствующее значение  $\Theta^* \in [-\pi, \pi]$ . В процессе поиска строятся целое семейство минимальных по толщине экранов с различными энергетическими коэффициентами прохождения  $\eta$ .

Пусть для некоторого  $\Theta \in [-\pi, \pi]$  рекуррентный процесс нахождения границ слоев на  $s$ -м шаге приводит к условию (2.12), т. е.  $z_{s+1}=l$ . При этом коэффициент прохождения принимает некоторое значение  $\eta=\eta_1$ . Рекуррентный процесс можно продолжить, исключив на  $s$ -м шаге минимальный корень уравнения (2.9) при  $K=K_i$  и выбрав толщину  $s$ -го слоя из оставшихся вариантов. Далее процесс продолжается до тех пор, пока условие (2.12) не выполнится вторично. Коэффициент прохождения будет иметь уже другое значение  $\eta=\eta_2$ . Аналогично рекуррентный процесс можно продолжить, вторично исключив условие (2.12), и так далее.

**3. Пример.** Исходный набор материалов приведен в таблице,  $\eta=3,8 \cdot 10^{-7}$ ,  $\omega=2\pi \cdot 2500 \text{ с}^{-1}$ ,  $\rho_0=\rho^0=1,29 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_0=c^0=331 \text{ м/с}$ . Согласно следствиям 1 и 2 отобразим шесть материалов, которые упорядочены соответственно соответствующим вершинам многоугольника на фиг. 1, а. Найдены значения  $K_j$ ,  $j=1, \dots, 6$   $K_0=K_l=-1/\omega_0^2$ . На фиг. 2 приведена зависимость минимальной толщины экрана  $l$  (м) от энергетического коэффициента прохождения  $\eta$ . Кривые I, II соответствуют случаю, когда условие (2.12) выполняется в первый раз. Кривая I получена при изменении  $\Theta$  от  $-\pi$  до 0, кривая II — при изменении от 0 до  $\pi$ . Стрелками указаны направления возрастания параметра  $\Theta$ . Черточки на кривых разделяют их на части, внутри которых число слоев оптимальной структуры одинаково. Цифры на соответствующих частях графика указывают число слоев в оптимальных структурах. Кривые III, IV, имеющие характерный излом, построены аналогично кривым I, II, но для случая, когда условие (2.12) выполнено вторично. График достаточно ясно вскрывает природу неединственности локально-оптимальных структур. Так, для  $\eta=2 \cdot 10^{-6}$  на приведенной части графика соответствует пять локально-оптимальных структур. Глобальный экстремум соответствует нижней огибающей изображенных кривых. Так, на рисунке эта огибающая состоит из двух участков, до точки C — огибающая совпадает с кривой I, а после точки C — с кривой III. Заданному в условии примера коэффициенту затухания соответствуют два локальных экстремума. Первый (точка A на рисунке) представляет собой трехслойную конструкцию толщиной  $l=0,456 \cdot 10^{-1}$  м и имеет следующую структуру: первый и третий слои по  $0,16 \cdot 10^{-2}$  м из 14-го материала, внутренний слой  $0,424 \cdot 10^{-1}$  м из 12-го материала. Это решение соответствует  $\Theta=-0,433 \cdot 10^{-3}$  рад. Второй (точка B) представляет собой семислойную конструкцию толщиной  $l^{\text{min}}=0,1495$  м и имеет следующую структуру: первый и седьмой слои толщиной по  $0,246 \cdot 10^{-2}$  м из 14-го материала, второй и шестой по  $0,2958 \cdot 10^{-1}$  м из 12-го, третий и пятый по  $0,3808 \cdot 10^{-2}$  м из 14-го, четвертый толщиной,  $0,77804 \cdot 10^{-1}$  из 13-го.



Фиг. 2

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адамова К. С., Кариболотский М. А., Яковлева Л. П. Минимизация толщины звукоизолирующего слоя // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. 1987. Вып. 5. С. 30–35.
2. Свешников А. Г., Фурман Ш. А., Тихонравов А. В., Яншин С. А. Общий метод синтеза оптических покрытий // Оптика и спектроскопия. 1985. Т. 59. Вып. 5. С. 1161–1163.
3. Свешников А. Г., Фурман Ш. А., Тихонравов А. В., Яншин С. А. Общий метод синтеза двухкомпонентных многослойных оптических покрытий // Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика и астрономия. 1986. Т. 27. № 5. С. 21–26.
4. Johnson E. H., Rizzi P., Ashley H., Segenreich S. A. Optimization of continuous one-dimensional structures under steady harmonic excitation // AIAA Journal. 1976. V. 14. N. 12. P. 1690–1698.
5. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука. 1978. 487 с.

Якутск

Поступила в редакцию  
22.II.1989