МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1990

УДК 534.22:539.3

А. С. СТУЛОВ

ПРИМЕНЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В НАСЛЕДСТВЕННЫХ СРЕДАХ

Предлагается алгебраический метод построения стационарного решения интегродифференциального уравнения первого порядка, описывающего распространение акустического импульса в нелинейной наследственной среде. Показано, что в наследственной среде с E-памятью и квадратичной нелинейностью могут распространяться как «быстрые», так и «медленные» импульсы постоянного профиля. Получена явная зависимость скорости импульса от его амплитуды на фронте.

1. Постановка задачи. Рассматривается процесс распространения акустической волны в нелинейной наследственной среде. Волна, распространяющаяся в положительном направлении оси x без взаимодействия с другими волнами, описывается интегродифференциальным уравнением первого порядка

$$cf(U, U')U'(x,t)+U^{\cdot}(x,t)+{}^1/_2K_1(t)*U^{\cdot}(x,t)=0$$

$$U^{\cdot}(x,t)\equiv\partial U(x,t)/\partial t,\ U'(x,t)\equiv\partial U(x,t)/\partial x$$

$$K_1(t)*U^{\cdot}(x,t)\equiv\int_0^t K_1(t-y)U^{\cdot}(x,y)\,dy \tag{1.1}$$

при нулевом начальном условии $U(x, 0)=0$ и при краевом условии

$$U(0, t)=H(t)\Psi(t),\ \Psi(0)=0 \tag{1.2}$$

Здесь $U(x, t)$ — функция, описывающая перемещение материальных точек среды, $f(U, U')$ — функция нелинейности, $K_1(t)$ — модифицированное ядро ползучести, $H(t)$ — функция Хевисайда, $\Psi(t)$ — непрерывная функция, определяющая временную зависимость краевого воздействия, c — положительная постоянная, имеющая размерность скорости.

Функция нелинейности $f(U, U')$ может быть, например, выбрана в виде $f(U, U')=f(U)=1+kU(x,t)$, и тогда эволюционное уравнение (1.1) для некоторых случаев приводится [1] к уравнению Кортевега де Вриза — Бюргерса, решения которого известны.

Поскольку $U'(x, t)$ с физической точки зрения определяет деформацию, а при малых деформациях уравнение (1.1) должно описывать распространение волны в линейной наследственной среде, естественно выбрать функцию нелинейности вида [2]:

$$f(U, U')=f(U')=1+kU'(x, t) \tag{1.3}$$

Оказывается, что решение уравнения (1.1) с функцией нелинейности вида (1.3) имеет некоторые особенности, которые отмечены в [3, 4]. В этих работах было показано, что в нелинейной наследственной среде могут распространяться импульсы постоянного профиля со скоростью как большей, так и меньшей, чем скорость звука в линейной среде. Однако, из-за того что решение было получено в неявном виде, что не только затрудняет построение профиля импульса, но и не позволяет установить с какими скоростями такой импульс может распространяться, необходимо более подробное исследование уравнения (1.1) с функцией налинейности вида (1.3).

2. Вывод определяющего уравнения. Для случая наследственной среды с квадратичной нелинейностью и, так называемой, E-памятью [2], когда

$$K_1(t)=(\varepsilon/\tau)\exp(-t/\tau) \quad (\varepsilon>0,\ \tau>0) \tag{2.1}$$

где ε и τ — наследственные параметры среды, будем искать решение уравнения (1.1) в виде импульса постоянного профиля, распространяющегося с постоянной скоростью $v>0$ в положительном направлении оси x:

$$U(x,\ t)=H(\xi)\Psi(\xi),\quad \xi=(2\tau)^{-1}(t-x/v) \tag{2.2}$$

Введем обозначения

$$\frac{d\Psi(\xi)}{d\xi}=\frac{2\tau\varepsilon v^2}{ck}y(\xi),\qquad 1-\frac{c}{v}=a\varepsilon \tag{2.3}$$

тогда

$$U^{\cdot}(x,t)=\frac{\varepsilon v^2}{ck}H(\xi)y(\xi),\qquad U'(x,t)=-\frac{\varepsilon v}{ck}H(\xi)y(\xi)$$

$$\frac{1}{2}K_1(t)*U^{\cdot}(x,t)=\frac{\varepsilon^2v^2}{ck}H(\xi)\int\limits_0^\xi e^{2(\omega-\xi)}y(\omega)\,d\omega$$

и так как согласно (2.2), $U(x,\ t)$ тождественно равна нулю при $\xi<0$, то при $\xi\geqslant 0$ уравнение (1.1) приобретает вид

$$y(\xi)[a+y(\xi)]+\int\limits_0^\xi e^{2(\omega-\xi)}y(\omega)\,d\omega=0 \tag{2.4}$$

Дифференцируя (2.4), а затем интегрируя, найдем

$$A\ln y+(1-A)\ln(y+a+{}^1/_2)=-\xi+C \tag{2.5}$$

$$A=a/(2a+1)$$

где C — константа интегрирования, которая находится из условия $y(0)=-a$, следующего из (2.4), так как функция $y(\xi)$ — интегрируемая. Неявное решение (2.5) исследовалось в [3], где определена возможная область существования функции $y(\xi)$. Там же было показано, что скорость распространения импульса постоянного профиля в нелинейной наследственной среде не может быть произвольной, однако, диапазон возможных скоростей не был определен.

Для некоторых частных случаев из (2.5) можно получить явный вид функции, описывающей профиль импульса. Так если $v=c$, т. е. $a=0$ из (2.5) следует, что импульс постоянного профиля имеет вид $y(\xi)=={}^1/_2[\exp(-\xi)-1]$, а импульс, распространяющийся со скоростью $v=c/(1+\varepsilon)$ $(a=-1)$ имеет экспоненциальную форму $y(\xi)=\exp(-\xi)$.

Для определения всех возможных скоростей распространения импульса постоянного профиля в нелинейной наследственной среде используем метод, предложенный в [5, 6] и основанный на алгебраическом подходе к построению решения уравнения в виде бесконечного ряда по затухающим экспонентам.

3. Алгебраическое решение. Будем искать решение уравнения (2.4) в виде

$$y(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\exp(-np\xi)\qquad(p>0) \tag{3.1}$$

Подставляя (3.1) в (2.4) нетрудно установить, что коэффициенты ряда должны определяться из соотношения

$$\left(a+\frac{1}{2-np}\right)a_n+\sum_{m=0}^{n}a_m a_{n-m}=0 \tag{3.2}$$

и при этом должно выполняться условие

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{np-2}=0 \tag{3.3}$$

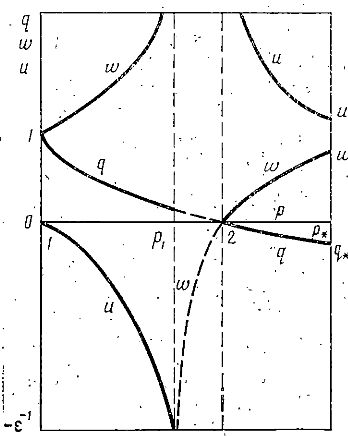
Из (3.2) легко найти вид коэффициентов a_n и явную зависимость константы a от параметра p:

$$a_n=\frac{a_0(1-p)\,q^n\Gamma(np-1)}{\Gamma(n)\Gamma(np-n+1)}\qquad (n\geqslant 1) \tag{3.4}$$

$$a_0={}^1/_2 p/(p-2),\; a=(1-p)/(p-2)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, а $q=q(p)$ — является корнем уравнения (3.3), если туда подставить полученные коэффициенты (3.4). Используя асимптотику гамма-функции, можно показать, что ряды (3.3) и (3.1) сходятся для $p\geqslant 1$ при условии

$$q<z=(p-1)^{p-1}/p^p \tag{3.5}$$



Уравнение (3.3) решалось численно методом Ньютона; вид функции $q=q(p)$ показан на фигуре. Для значений параметра $p>p_*=2{,}3833$ корни уравнения (3.3) не удовлетворяют условию (3.5), так как $q>q_*=z(p_*)$ для $p>p_*$, и, значит, ряд (3.3) расходится. Таким образом значения параметра p, которые удовлетворяют (3.1) лежат в интервале $(1,\ p_*)$. Из (2.3) и (3.4) можно найти зависимость скорости волны постоянного профиля от параметра p:

$$w(p)=v/c=(p-2)\,[(\varepsilon+1)(p-1)-1]^{-1}$$

Эта зависимость $w=w(p)$ показана на фигуре.

Учитывая ограниченность области изменения параметра p, очевидно, что в наследственной среде с E-памятью и квадратичной нелинейностью могут распространяться волны постоянного профиля двух типов. Первый — это «быстрые» волны, бегущие со скоростью $v\geqslant c$ $(w\geqslant 1)$. Этим волнам соответствует область изменения параметра $1\leqslant p<p_1$, где $p_1=1+(1+\varepsilon)^{-1}$. При этом $q(p)>0$. Другой тип волн — «медленные», бегущие со скоростью $v\leqslant v_*<c$ $(w\leqslant w_*<1)$, где $w_*=v_*/c=(1+\varepsilon u_*)^{-1}$ и $u_*=(p_*-1)/(p_*-2)=3{,}609$. Для этих волн параметр p изменяется в пределах $2\leqslant p\leqslant p_*$, а $q(p)<0$. Интервал $(p_1,\ 2)$ значений p является запретным, так как в этом интервале $v<0$. Зависимость амплитуды импульса на фронте $u=u(p)=y(0)$ от параметра p также показана на фигуре. Оказывается, для того, чтобы в нелинейной наследственной среде с E-памятью распространялся без искажений «медленный» импульс, амплитуда на его фронте должна быть $u>u_*$, а для существования «быстрого» импульса, его амплитуда на фронте должна находиться в интервале $(0,\ -\varepsilon^{-1})$.

Профиль волны, определяемый по формуле (3.1) — квазиэкспоненциальный, затухающий за фронтом быстрее, чем $\exp(-p\xi)$ для «быстрых» $(v>c)$ волн и медленнее, чем $\exp(-p\xi)$ для «медленных» $(v<v_*)$ волн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пелиновский Е. Н., Фридман В. Е., Энгельбрехт Ю. К.* Нелинейные эволюционные уравнения/Таллинн: Валгус, 1984. С. 154.
2. *Nigul U.* The modified theory of viscoelasticity for description of the one-dimensional deformation waves. Tallinn: Acad. Sci. EstSSR, 1983. 64 p.
3. *Нигул У. К., Стулов А. С.* Продольные волны стационарного профиля в средах с E-памятью при квадратичной и кубической нелинейности // Проблемы нелинейной акустодиагностики. Таллинн: Валгус, 1986. С. 95–101.
4. *Stulov A.* Front velocity of self-similar waves in a nonlinear hereditary medium. Проблемы нелинейной акустики: Сб. тр. симпоз. IUPAP – IUTAM по нелинейной акустике. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1987. Т. 2. С. 78–80.
5. *Hereman W., Korpel A., Banerjee P. P.* A general physical approach to solitary wave construction from linear solutions // Wave Motion. 1985. V. 7. № 3. P. 283–289.
6. *Hereman W., Banerjee P. P., Korpel A., Assanto G., Van Immerzeele A., Meerpoel A.* Exact solitary wave solutions of nonlinear evolution and wave equations using a direct algebraic method // J. Phys. A: Math. Gen. 1986. V. 19. № 5. P. 607–628.

Таллинн

Поступила в редакцию 31.V.1988