

УДК 539.3.01

© 1990 г.

В. В. ЛОБОДА

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ОРТОТРОПНОГО ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Рассматривается плоская задача теории упругости для ортотропного прямоугольника, на двух противоположных сторонах которого задана система напряжений, а условия на двух других сторонах произвольны. С использованием конечного интегрального преобразования Фурье проблема сведена к сингулярным интегральным уравнениям с обобщенным ядром Коши, аналитическое исследование которых позволило получить трансцендентные уравнения для определения степеней особенности напряжений в окрестности угловых точек. Численным методом, учитывающим характер особенности решения, для конкретных типов граничных условий построены графики распределения напряжений вдоль заземленной стороны.

1. Построение фундаментальных соотношений. Решению плоской задачи теории упругости для изотропного прямоугольника посвящено большое число работ, обзор которых дан, например, в [1, 2]. При этом в большинстве исследований не рассматривается вопрос об особенностях напряженного состояния, порождаемых наличием угловых точек, что в ряде случаев отрицательно сказывается на точности решения. Метод, позволяющий учесть особенность на основании анализа поведения неизвестных бесконечной системы уравнений, к которой сводится исследование, развит в [1]. В [3, 4] задача сжатия упругого прямоугольника двумя жесткими штампами сведена к сингулярному интегральному уравнению с обобщенным ядром Коши, анализ которого [3] позволил учесть особенности в угловых точках. В случае ортотропного материала и граничных условий специального вида поставленная задача решалась методом однородных решений [5]. Особенности в угловых точках учитывались путем введения дополнительного решения, связанного с локальной системой координат. В настоящей работе исследование плоской задачи теории упругости для ортотропного прямоугольника проводится методом, допускающим построение решения для любых граничных условий на его сторонах. Основное внимание уделено анализу особенностей решения в случае, если угловая точка является точкой смены характера граничных условий.

Рассмотрим ортотропный прямоугольник $0 \leq x_1 \leq \pi$, $|x_2| \leq h$, на боковых сторонах которого задана произвольная нагрузка

$$\sigma_{12}(x_1, \pm h) = \left\{ \begin{array}{l} \pm P_1(x_1) \\ P_1(x_1) \end{array} \right\}, \quad \sigma_{22}(x_1, \pm h) = \left\{ \begin{array}{l} P_2(x_1) \\ \pm P_2(x_1) \end{array} \right\} \quad (1.1)$$

которую без уменьшения общности считаем либо симметричной, либо антисимметричной (соответственно верхние и нижние выражения в фигурных скобках), а на торцах $x_1 = 0, \pi$ реализован один из следующих вариантов граничных условий:

$$u_1 = V_1(x_2), \quad u_2 = V_2(x_2) \quad (1.2)$$

$$\sigma_{11} = Q_1(x_2), \quad \sigma_{12} = Q_2(x_2) \quad (1.3)$$

$$u_1 = V_1(x_2), \quad \sigma_{12} = Q_2(x_2) \quad (1.4)$$

$$\sigma_{11} = Q_1(x_2), \quad u_2 = V_2(x_2) \quad (1.5)$$

Считается, что в случае граничных условий (1.3) внешняя нагрузка (1.4), (1.3) является самоуравновешенной, для симметричной задачи функции $V_1(x_2)$, $Q_1(x_2)$ — четны, $V_2(x_2)$, $Q_2(x_2)$ — нечетны, для антисимметричной наоборот.

Используем следующие соотношения закона Гука [6]:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= A_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, & \sigma_{22} &= A_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \sigma_{12} &= A_{66} (\partial u_1 / \partial x_2 + \partial u_2 / \partial x_1)\end{aligned}\quad (1.6)$$

и соответствующие уравнения Ляме

$$b_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + b_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad b_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + b_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \quad (1.7)$$

$$b_0 = b_{12} + 1, \quad b_{11} = A_{11} A_{66}^{-1}, \quad b_{22} = A_{22} A_{66}^{-1}, \quad b_{12} = A_{12} A_{66}^{-1}$$

где A_{11} , A_{12} , A_{22} , A_{66} — жесткостные характеристики материала.

Вводя неизвестные функции

$$\begin{aligned}q_{2i-1}(x_2) &= \sigma_{12}(a_i, x_2), & q_{2i}(x_2) &= \partial u_1 / \partial x_2(a_i, x_2) \\ a_1 &= 0, & a_2 &= \pi \quad (i=1, 2)\end{aligned}\quad (1.8)$$

применим к уравнениям (1.7) конечные интегральные преобразования Фурье [7]:

$$u_1^\sim(t, x_2) = \int_0^\pi u_1(x_1, x_2) \sin tx_1 dx_1, \quad u_2^\sim(t, x_2) = \int_0^\pi u_2(x_1, x_2) \cos tx_1 dx_1$$

В предположении, что корни характеристического уравнения

$$k^4 - 2\alpha_1^2 k^2 + \alpha_2^4 = 0$$

$$\alpha_1^2 = [b_{11} - (2 + \nu_2) b_{12}] / 2, \quad \alpha_2^4 = A_{11} A_{22}^{-1}, \quad \nu_i = A_{12} A_{66}^{-1}$$

действительны ($\alpha_1^2 > \alpha_2^2$), т. е. рассматривается наиболее распространенный на практике материал первого типа (см. [8]), получаем следующие выражения для необходимых в последующем анализе величин

$$\partial u_2 / \partial x_2(a_m, x_2) = \Omega_{1m}(x_2), \quad \sigma_{11}(a_m, x_2) = A_{11} \Omega_{2m}(x_2) \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned}\Omega_{im}(x_2) &= (-1)^{m-1} \left[\sum_{j=1}^2 \eta_{ij} \int_{-h}^h \frac{q_{2m+j-2}(y)}{x_2 - y} dy + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^4 \int_{-h}^h F_{ij}^{(m)}(x_2, y) q_j(y) dy \right] + Q_{im}(x_2)\end{aligned}\quad (1.10)$$

$$\eta_{11} = \gamma_2 / (2\pi A_{22}), \quad \eta_{12} = \gamma_1 / 2\pi, \quad \eta_{21} = -\gamma_4 / \pi A_{11}$$

$$\eta_{22} = \gamma_3 / \pi, \quad F_{im}^{(2)} = F_{i, m+2}^{(1)}, \quad F_{i, m+2}^{(2)} = F_{im}^{(1)}$$

$$F_{ij}^{(1)}(x_2, y) = (2\pi)^{-1} M_{ij}(x_2, y) + K_{ij}(x_2, y) \quad (1.11)$$

$$M_{im}(x_2, y) = \sum_{t=0}^{\infty} r_t \Delta_t^{-1} M_{im}^*(x_2, y, t),$$

$$M_{i, m+2}(x_2, y) = \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^{t-1} r_t \Delta_t^{-1} M_{im}^*(x_2, y, t) \quad (1.12)$$

$$M_{im}^*(x_2, y, t) = \{Z_{n-1}(x_2, t) \exp[-k_2(h-y)t] + \\ + Z_n(x_2, t) \exp[-k_1(h-y)t] - \delta_i^0 M_{im}^{**}(x_2, y, t)\} \eta_{im}^0 \\ \eta_{1m}^0 = 2\pi\eta_{1m}, \quad \eta_{21}^0 = \pi, \quad \eta_{22}^0 = \pi\eta_{22}$$

$$Z_k(x_2, t) = [l_{k1} - l_{k2}X_4(t)]X_1(x_2, t) - [l_{k3} - l_{k4}X_3(t)]X_2(x_2, t)$$

$$X_i(x_2, t) = \chi_i(t, x_2) / \chi_i(t, h), \quad X_{i+2}(t) = \chi_2(t, h) / \chi_1(t, h)$$

$$\Delta_i = S_1 S_4 X_3(t) - S_2 S_3 X_4(t), \quad t_i = k_i t, \quad r_0 = 0, 5, \quad r_i = 1 \quad (l=1, 2, \dots)$$

$$M_{im}^{**}(x_2, y, t) = \left\{ \begin{array}{l} l_{n-1,1} - l_{n-1,3} + l_{n,1} - l_{n,3} \\ x_2 h^{-2} [t^{-1} k_1^{-1} (l_{n-1} + l_n) + y (\lambda^{-1} l_{n-1} + l_n)] \end{array} \right\}$$

$$\chi_1(x) = \begin{Bmatrix} \operatorname{ch} x \\ \operatorname{sh} x \end{Bmatrix}, \quad \chi_2(x) = \begin{Bmatrix} \operatorname{sh} x \\ \operatorname{ch} x \end{Bmatrix}, \quad n = \begin{cases} 2i, & m=1 \\ 10-2i, & m=2 \end{cases}$$

$$l_k = l_{k4} - l_{k2}, \quad \lambda = k_1/k_2.$$

Здесь γ_i , l_{kj} , c_{ji} , k_i — константы, определяемые жесткостными характеристиками материала, выражения для которых даны в [8]; δ_i^0 — символ Кронеккера, $k=1, 2, \dots, 8$:

$$K_{ij}(x_2, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \theta_{ij}(p) \sin p(x_2 - y) dp.$$

$$\theta_{i, 2m-1}(p) = (-1)^m [e_{i3} \beta_{m1}(p) - e_{i4} \beta_{m2}(p)] / 2$$

$$\theta_{i, 2m}(p) = (-1)^m [e_{i1} \beta_{m1}(p) - e_{i2} \beta_{m2}(p)] / 2$$

$$e_{i1} = (v_2 + k_i^2) \varepsilon_i^{-1}, \quad e_{i, i+2} = (1 - b_{22} k_i^2) \varepsilon_i^{-1} A_{22}^{-2}$$

$$e_{2i} = (v_1 v_2 - 1) \varepsilon_i^{-1}, \quad e_{2, i+2} = e_{1i} A_{11}^{-1}, \quad \varepsilon_i = \alpha_2^{-2} \alpha_3 k_i$$

$$\beta_{1i}(p) = \operatorname{cth}(\pi k_i \alpha_2^{-2} p) - 1, \quad \beta_{2i}(p) = \operatorname{csch}(\pi k_i \alpha_2^{-2} p).$$

Функции $Q_{im}(x_2)$ в формулах (1.10) зависят от внешней нагрузки на боковых сторонах прямоугольника и имеют вид

$$Q_{im}(x_2) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} r_i (-1)^{i(m-1)} \Delta_i^{-1} W_{i+4}(x_2, t)$$

$$W_{i+4}(x_2, t) = W_{2i-1}(x_2, t) P_1^\vee(t) + W_{2i}(x_2, t) P_2^\vee(t) - \delta_i^0 W_{i+4}^*(x_2, t)$$

$$W_{2i-1}(x_2, t) = c_{2i-1, 1} X_1(x_2, t) - c_{2i-1, 2} X_2(x_2, t)$$

$$W_{2i}(x_2, t) = c_{2i, 2} X_3(t) X_2(x_2, t) - c_{2i, 1} X_4(t) X_1(x_2, t)$$

$$P_1^\vee(t) = A_{66}^{-1} \int_0^{\pi} P_1(x_1) \sin tx_1 dx_1, \quad P_2^\vee(t) = A_{22}^{-1} \int_0^{\pi} P_2(x_1) \cos tx_1 dx_1$$

$$W_{i+4}^*(x_2, t) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ x_2 t^{-1} h^{-2} (c_{2i, 2} k_1^{-1} - c_{2i, 1} k_2^{-1}) P_2^\vee(0) \end{array} \right\}$$

Исследуем поведение функций $M_{im}(x_2, y)$ ($m=1, 2$), которые посредством формул (1.11) входят в выражения (1.10). Эти функции при $y \rightarrow h$, $x_2 \rightarrow \pm h$ становятся неограниченными. Используя асимптотические свойства $M_{im}^*(x_2, y, t)$ при $t \rightarrow \infty$ и учитывая

$$\sum_{i=0}^{\infty} \exp(-X_{mi}t) = [1 - \exp(-X_{m1}t)]^{-1} = X_{m1}^{-1} + O(1)$$

$$X_{ml} = y - h - \omega_l \theta_m(x_2), \quad \theta_m(x_2) = h + (-1)^m x_2, \quad \omega_l = \lambda^{2-l} \\ (l=1, 2, 3; \quad m=1, 2)$$

получаем, что $M_{im}(x_2, y)$ представимы в форме

$$M_{im}(x_2, y) = M_{im}^\infty(x_2, y) + M_{im}^0(x_2, y) \quad (1.13)$$

При этом $M_{im}^0(x_2, y) \in H$ (H — множество функций, удовлетворяющих в интервале $[-h, h]$ по каждой из переменных условию Гельдера [9]), а $M_{im}^\infty(x_2, y)$, содержащие неподвижные особенности, имеют вид

$$M_{im}^\infty(x_2, y) = -\frac{\eta_{im}^0}{S_5} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^3 \frac{d_{im}^{(l)}}{y - h - \omega_l \theta_k(x_2)} \quad (1.14)$$

$$S_5 = S_1 S_4 - S_2 S_3, \quad d_{im}^{(1)} = (l_{n-1,1} - l_{n-1,2}) k_2^{-1},$$

$$d_{im}^{(2)} = (l_{n1} - l_{n2}) k_1^{-1} - (l_{n-1,3} - l_{n-1,4}) k_2^{-1}, \quad d_{im}^{(3)} = (l_{n4} - l_{n3}) k_1^{-1}$$

Исследование функций $M_{i, m+2}(x_2, y)$ свидетельствует об их принадлежности классу H .

2. Формулировка и исследование систем СИУ. Формулы (1.9) дают возможность построить решение для любых вариантов граничных условий на торцах. При этом, в случае граничных условий (1.4) неизвестные функции (1.8) оказываются заданными и формулы (1.9) определяют решение в квадратурах. Аналогично просто находится решение и в случае граничных условий (1.5). Для наиболее же распространенных на практике граничных условий (1.2) или (1.3) решение в квадратурах построено быть не может, однако формулы (1.9) позволяют сформулировать интегральные уравнения для нахождения необходимых компонент напряженно-деформированного состояния.

Рассмотрим конкретные наиболее важные с практической точки зрения варианты граничных условий на торцах.

Пусть оба торца заземлены, а нагрузка на боковых сторонах симметрична относительно $x_1 = \pi/2$. В этом случае из граничных условий $u_1(a_i, x_2) = 0$ и соотношений (1.8) следует $q_{2i}(x_2) = 0$, а из условий $u_2(a_i, x_2) = 0$ с учетом (1.9) получается система интегральных уравнений относительно $q_{2i-1}(x_2)$. Однако из условий симметрии внешней нагрузки и граничных условий на торцах относительно $x_1 = \pi/2$ следует $q_3(x_2) = -q_1(x_2)$ и полученная система сводится к одному сингулярному интегральному уравнению вида

$$\int_{-h}^h \left[\frac{\eta_{11}}{x_2 - y} + L(x_2, y) \right] q_1(y) dy = -Q_{11}(x_2) \quad (2.1)$$

$$L(x_2, y) = F_{11}^{(1)}(x_2, y) - F_{13}^{(1)}(x_2, y)$$

Из формул (1.11), (1.13) следует, что ядро уравнения (2.1) помимо подвижной особенности при $y = x_2$ содержит также неподвижные особенности вида (1.14) при $y = h, x_2 = \pm h$.

Предполагая, что неизвестная функция имеет интегрируемую особенность, ищем $q_1(y)$ в форме

$$q_1(y) = q_1^*(y) (h^2 - y^2)^{-\alpha}, \quad q_1^*(y) \in H, \quad 0 \leq \text{Re}(\alpha) < 1 \quad (2.2)$$

Вводя частично-голоморфную функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-h}^h \frac{q_1(y)}{y - z} dy$$

и учитывая соотношения (1.11), (1.13), (1.14), запишем уравнение (2.1) в виде

$$-\pi\Phi(x_2) - \pi S_5^{-1} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^3 d_{11}^{(l)} \Phi[h + \omega_l \theta_k(x_2)] = R_1^*(x_2), \quad R_1^* \in H \quad (2.3)$$

Рассматривая уравнение (2.3) при $x_2 \rightarrow h$ слева и используя формулы [9]

$$\Phi(x_2) = -\operatorname{ctg}(\pi\alpha)(2h)^{-\alpha}(h-x_2)^{-\alpha} q_1^*(h) + \Phi_1^*(x_2)$$

$$\Phi[h + \omega_l \theta_1(x_2)] = -(\sin \pi\alpha)^{-1} (2h)^{-1} \omega_l^{-\alpha} (h-x_2)^{-\alpha} q_1^*(h) + \Phi_{l+1}^*(x_2) \quad (2.4)$$

справедливые при этих же значениях x_2 , приходим к соотношению

$$\frac{\pi q_1^*(h)}{(2h)^\alpha (h-x_2)^\alpha \sin \pi\alpha} \left[\cos \pi\alpha + \frac{1}{S_5} \sum_{l=1}^3 \frac{d_{11}^{(l)}}{\omega_l^\alpha} \right] = \Phi_1^*(x_2) \quad (2.5)$$

$$|\Phi_j^*(z)| < C_j (z-h)^{-\alpha_0}, \quad \operatorname{Re}(\alpha_0) < \operatorname{Re}(\alpha)$$

где C_j ($j=1, \dots, 4$) — действительные постоянные.

Принимая во внимание, что в общем случае $q_1^*(h) \neq 0$, получаем из (2.5) характеристическое уравнение для определения степени особенности α

$$L_1(\alpha) = S_5 \cos \pi\alpha + \sum_{l=1}^3 d_{11}^{(l)} \omega_l^{-\alpha} = 0 \quad (2.6)$$

Следует отметить, что полученное уравнение полностью совпадает с соответствующим уравнением для определения степени особенности напряжений в угловой точке ортотропной полуполосы [8].

Из формул (1.9), (1.10) получаем следующее выражение для нормального напряжения в заделке:

$$\sigma_{11}(0, x_2) = A_{11} \int_{-h}^h \left[\frac{\eta_{21}}{x_2 - y} + F_{21}^{(4)}(x_2, y) - F_{23}^{(4)}(x_2, y) \right] q_1(y) dy + A_{11} Q_{21}(x_2)$$

С использованием формул (2.2), (2.4) из анализа последней формулы вытекает, что сингулярная часть напряжения $\sigma_{11}(0, x_2)$ имеет в окрестности угловых точек степень особенности α .

Рассмотрим теперь случай граничных условий, когда нижний торец заземлен, а на верхний действует нормальная нагрузка $P(x_2)$:

$$u_i(0, x_2) = 0, \quad \sigma_{11}(\pi, x_2) = P(x_2), \quad \sigma_{12}(\pi, x_2) = 0 \quad (2.7)$$

Решение в этом случае ищем как сумму двух составляющих

$$u_i = u_i^I + u_i^{II}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^I + \sigma_{ij}^{II} \quad (j=1, 2) \quad (2.8)$$

Первая составляющая

$$\sigma_{11}^I = \begin{Bmatrix} P^0 \\ P^0 x_2 \end{Bmatrix}, \quad \sigma_{12}^I = \sigma_{22}^I = 0, \quad A_0 u_1^I = \begin{Bmatrix} P^0 x_1 \\ P^0 x_1 x_2 \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

$$A_0 u_2^I = \begin{Bmatrix} -\nu_2 P^0 x_2 \\ -(x_1^2 + \nu_2 x_2^2) P^0 / 2 \end{Bmatrix}, \quad P^0 = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2h} \int_{-h}^h P(x_2) dx_2 \\ \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h x_2 P(x_2) dx_2 \end{Bmatrix}, \quad A_0 = A_{11} - \nu_2 A_{12}$$

описывает равномерное растяжение — сжатие, если $P(x_2)$ четна либо

чистый изгиб, если $P(x_2)$ нечетна, а граничные условия на торцах для второй составляющей имеют вид

$$\begin{aligned} u_1^{\text{II}}(0, x_2) = 0, \quad u_2^{\text{II}}(0, x_2) = -u_2^{\text{I}}(0, x_2), \quad \sigma_{11}^{\text{II}}(\pi, x_2) = P(x_2) - \sigma_{11}^{\text{I}}(\pi, x_2), \\ \sigma_{12}^{\text{II}}(\pi, x_2) = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из первого и четвертого соотношений (2.10) следует $q_2(x_2) = 0, q_3(x_2) = 0$, а второе и третье с учетом формул (1.9) приводят к следующей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\sum_{j=1}^2 \int_{-h}^h \left[\frac{d_{ij}}{x_2 - y} + E_{ij}(x_2, y) \right] G_j(y) dy = R_i(x_2) \quad (2.11)$$

$$G_1(y) = q_1(y), \quad G_2(y) = q_4(y), \quad d_{11} = \eta_{11}, \quad d_{22} = \eta_{22}, \quad d_{12} = d_{21} = 0$$

$$E_{i1}(x_2, y) = F_{i1}^{(1)}(x_2, y), \quad E_{i2}(x_2, y) = F_{i2}^{(1)}(x_2, y)$$

$$R_1(x_2) = -Q_{11}(x_2) - u_2^{\text{I}}(0, x_2), \quad R_2(x_2) = Q_{22}(x_2) - A_{11}^{-1} [P(x_2) - \sigma_{11}^{\text{I}}(\pi, x_2)]$$

Ядро каждого из уравнений (2.11) имеет структуру аналогичную ядру уравнения (2.1) и содержит помимо подвижной особенности неподвижные вида (1.14). Разыскивая решение системы в форме

$$G_i(y) = G_i^*(y) (h^2 - y^2)^{-\alpha_i}, \quad 0 \leq \alpha_i < 1, \quad G_i^*(y) \in H \quad (2.12)$$

и проводя анализ, аналогичный вышеизложенному, получаем

$$\begin{vmatrix} L_1(\alpha_1) & 0 \\ 0 & L_2(\alpha_2) \end{vmatrix} = 0, \quad L_2(\alpha_2) \equiv S_5 \cos \pi \alpha_2 + \sum_{l=1}^3 d_{22}^{(l)} \omega_l^{-\alpha_2} = 0$$

Это означает, что степень особенности напряжений α_i в окрестности нижних углов прямоугольника определяется из трансцендентного уравнения (2.6), а в окрестности верхних углов — из уравнения

$$L_2(\alpha_2) = 0 \quad (2.13)$$

Распределение нормального напряжения вдоль заземленного торца на основании (1.9), (2.8) определяется по формуле

$$\sigma_{11}(0, x_2) = \sum_{j=1}^2 \int_{-h}^h \left[\frac{d_j}{x_2 - y} + E_j(x_2, y) \right] G_j(y) dy + R_3(x_2) \quad (2.14)$$

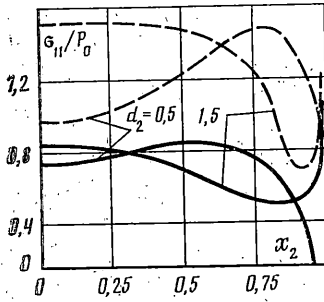
$$d_1 = A_{11} \eta_{21}, \quad d_2 = 0, \quad E_i(x_2, y) = A_{11} F_{2,3i-2}^{(1)}(x_2, y)$$

$$R_3(x_2) = A_{11} Q_{21}(x_2) + \left\{ \begin{matrix} P^0 \\ P^0 x_2 \end{matrix} \right\}$$

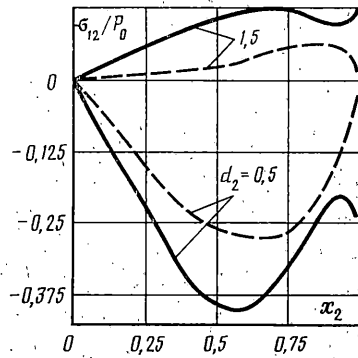
3. Численный метод и обсуждение результатов. Численное исследование трансцендентных уравнений (2.6), (2.13) показывает, что корни первого зависят от трех параметров b_{11}, b_{12}, b_{22} и сосредоточены в интервале $[0; 0,5]$, а уравнение (2.13) имеет в интервале $[0,1]$ только нулевой корень. Это означает, что в случае граничных условий (2.7) напряжения не имеют особенностей в окрестности верхних углов прямоугольника.

С целью нахождения распределения напряжений вдоль заземленного торца получим численные решения уравнения (2.1) и системы (2.11). Для уравнения (2.1) используем дополнительное условие

$$\int_{-h}^h q_1(y) dy = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ P_2^0 \end{matrix} \right\}, \quad P_2^0 = A_{22} P_2^{\sim}(0) \quad (3.1)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

а для системы (2.11):

$$\int_{-h}^h D_i(y) G_i(y) dy = T_i, \quad D_1 = 1, \quad D_2 = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ y \end{matrix} \right\}, \quad T_1 = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 2P_2^0 \end{matrix} \right\}, \quad T_2 = 0 \quad (3.2)$$

Применяем метод, основанный на формуле наивысшей алгебраической точности Гаусса — Якоби [10]:

$$\int_{-1}^1 f(\tau) (1-\tau^2)^{-\alpha} d\tau = \sum_{k=1}^N B_k f(\tau_k) \quad (3.3)$$

который позволяет учесть сингулярность неизвестных функций и свести исследование к нахождению регулярных функций $q_i^*(y)$ либо $G_i^*(y)$. В формуле (3.3) τ_k — нули многочлена Якоби $P_N^{(-\alpha, -\alpha)}(\tau)$, B_k — весовые коэффициенты. Эта формула справедлива также и в случае $f(\tau) = f^0(\tau) (z_m - \tau)^{-1}$, если z_m есть нули функции Якоби второго рода [11]:

$$g_N^{(-\alpha, -\alpha)}(z) = \int_{-1}^1 \frac{P_N^{(-\alpha, -\alpha)}(\tau) d\tau}{(z - \tau) (1 - \tau^2)^\alpha}$$

Не останавливаясь на численном анализе уравнения (2.1), отметим, что после замены $x_2 = hz$, $y = h\tau$, применения процедуры коллокаций и использования формул (2.2), (2.3), получаем алгебраическую систему порядка $2N$, соответствующую системе (2.11), (3.2):

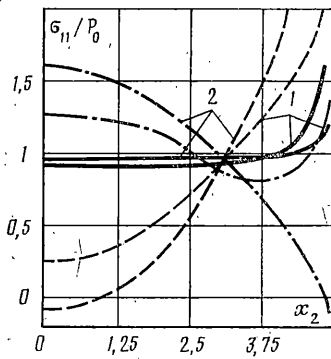
$$\sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^N B_{jk} \left[\frac{d_{ij}}{z_{im} - \tau_{jk}} + hE_{ij}(hz_{im}, h\tau_{jk}) \right] \Lambda_j(h\tau_{jk}) = R_i(hz_{im}) \quad (3.4)$$

$$\sum_{k=1}^N B_{ik} D_i(h\tau_{ik}) \Lambda_i(h\tau_{ik}) = h^{-1} T_i$$

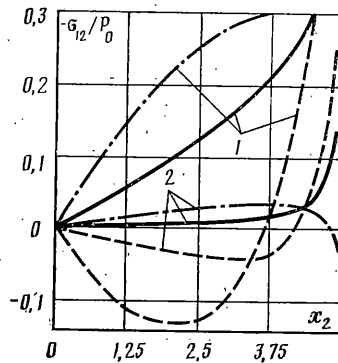
где z_{im} ($m=1, 2, \dots, N-1$) — нули функции $g_N^{(-\alpha_i, -\alpha_i)}(z)$, τ_{ik} ($k=1, 2, \dots, N$) нули функции $P_N^{(-\alpha_i, -\alpha_i)}(\tau)$:

$$\Lambda_i(y) = h^{-2\alpha_i} (h^2 - y^2)^{\alpha_i} G_i(y)$$

$$B_{ik} = 2^{1-2\alpha_i} \frac{\Gamma^2(N+1-\alpha_i)}{\Gamma(N+1-2\alpha_i) (1-\tau_{ik}^2) [P_N^{(-\alpha_i, -\alpha_i)'(\tau_{ik})]^2}$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Рассматривая (2.14) в точках коллокации и применяя (3.3) получаем

$$\sigma_{11}(0, hz_{1m}) = \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^N B_{jk} \left[\frac{d_j}{z_{1m} - \tau_{jk}} + hE_j(hz_{1m}, h\tau_{jk}) \right] \Lambda_j(h\tau_{jk}) + R_3(hz_{1m})$$

На фиг. 1, 2 показаны результаты вычисления напряжений в заделке соответствующие случаю, когда оба торца жестко зашпемлены, а на боковых сторонах действует сосредоточенная нагрузка $P_1(x_1) = 0$, $P_2(x_1) = P_0[\delta(x_1 - d_2) + \delta(x_1 - \pi + d_2)]$, симметричная относительно центральных осей прямоугольника. Сплошные линии построены для изотропного материала с коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$, штриховые — для ортотропного боропластика с жесткостными параметрами $b_{11} = 26,9$, $b_{22} = 3,6$, $b_{12} = 3,15$.

На фиг. 3, 4 приведены распределения напряжений вдоль нижнего зашпемленного торца, когда на верхний действует три вида нагрузки $P(x_2) = P_0$ — сплошные линии, $P(x_2) = 3P_0x_2^2/h^2$ — штриховые линии и $P(x_2) = 0,5\pi \cos(0,5\pi x_2/h)$ — штрихпунктирные линии. Кривые 1 и 2 построены соответственно для изотропного и ортотропного материалов с теми же жесткостными характеристиками, что и в предыдущем примере.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев: Наук. думка, 1978. 264 с.
2. Развитие теории контактных задач в СССР/Под ред. Л. А. Галина. М.: Наука, 1976. 493 с.
3. Gupta G. D. The problem of a finite strip compressed between two rough rigid stamps // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1975. V. 42. No. 1. P. 81-87.
4. Попов Г. Я. О расширении возможностей метода интегральных преобразований при решении задач механики // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 1. С. 130-142.
5. Васильев В. В., Лурье С. А. Плоская задача теории упругости для ортотропной консольной полосы // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 5. С. 125-135.
6. Лезницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.-Л.: Гостехиздат, 1950. 300 с.
7. Трангер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике. М.: Гостехиздат, 1956. 204 с.
8. Лобода В. В. Об особенностях напряженного состояния ортотропной полуполосы // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 2. С. 263-270.
9. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
10. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М.: Физматгиз, 1959. 327 с.
11. Корнейчук А. А. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов // Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М.: Наука, 1964. С. 64-74.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
13.1.1987