МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1990

УДК 539.374

А. Д. ДРОЗДОВ

ОБЪЕМНЫЙ РОСТ ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ

Получены определяющие соотношения теории объемного роста вязкоупругих тел, подверженных старению, при конечных деформациях. Дан анализ задач объемного роста прямолинейного стержня и цилиндрического сосуда. Численно и аналитически исследовано влияние притока материала на напряженно-деформированное состояние растущего тела.

1. Постановка задачи и основные уравнения. Вязкоупругое тело находится в недеформированном состоянии и занимает область Ω с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Введем в области Ω систему координат (ξ_1, ξ_2, ξ_3). Координаты $\xi=(\xi_i)$ примем за лагранжевы координаты точек растущего тела. В момент времени $t=0$ к телу прикладываются массовые силы $F(t, \xi)$, поверхностные усилия $f(t, \xi)$ и начинается процесс объемного роста, который осуществляется на отрезке времени $[0, T]$. Под объемным ростом понимается процесс непрерывного притока вещества, за счет которого увеличивается масса элементов тела. Примером объемного роста является рост биологических объектов. Различные модели роста биологической ткани сформулированы в [1—5]. Согласно этим представлениям биологическая ткань (например, кость) представляет собой двухфазную среду, состоящую из твердого пористого каркаса и фильтрующейся жидкости. Жидкость обеспечивает приток к твердой фазе дополнительного вещества. За счет фильтрации жидкости и биохимических реакций происходит объемный рост (накопление) материала в твердой фазе. Предположим, что вещество в твердой и жидкой фазах несжимаемое и концентрация жидкости в элементе объема растущего тела постоянна. Пренебрегая смещением жидкости относительно твердой фазы, примем для описания процесса объемного роста соотношение

$$d/dt(V/V_0)=\beta(t, \xi) \tag{1.1}$$

Здесь $V_0(\xi)$ — объем элемента тела в окрестности точки ξ в начальной конфигурации, $V(t, \xi)$ — объем этого элемента в актуальной конфигурации в момент времени t, $\beta(t, \xi)$ — скалярная функция, характеризующая скорость притока вещества. Согласно (1.1) за время $d\tau$ к элементу тела присоединяется новый элемент, занимающий объем $dV(\tau, \xi)=\beta(\tau, \xi)V_0(\xi)d\tau$. Относительный объем присоединяемого элемента в момент времени t равен

$$\frac{dV(\tau,\xi)}{V(t,\xi)}=\frac{\beta(\tau,\xi)}{v(t,\xi)}d\tau, \qquad v=1+\int_0^t \beta(\tau,\xi)\,d\tau \tag{1.2}$$

Пусть $S(t, \xi)$ — площадь поверхности элемента тела в момент времени t, $S_0(t, \xi)$ — площадь поверхности элемента тела, занятая исходным материалом, $dS(t, \tau, \xi)$ — площадь поверхности элемента тела, занятая веществом, которое присоединилось в момент времени τ. Примем стандартную для механики пористых сред [6] гипотезу о равенстве пористости и просветности

$$S_0(t, \xi)/S(t, \xi)=V_0(\xi)/V(t, \xi),\ dS(t, \tau, \xi)/S(t, \xi)= \\ =dV(\tau, \xi)/V(t, \xi) \tag{1.3}$$

Обозначим через $\sigma_0(t, \tau, \xi)$ тензор напряжений Коши в момент времени t в элементе материала, который присоединился в момент времени τ. Тензор напряжений Коши в растущем теле $\sigma(t, \xi)$ найдем из соотношений (1.2), (1.3) и равенства

$$\sigma(t,\xi)S(t,\xi)=\sigma_0(t,0,\xi)S_0(t)+\int_0^t \sigma_0(t,\tau,\xi)dS(t,\tau,\xi)d\tau$$

Имеем

$$\sigma(t,\xi)=\frac{1}{v(t,\xi)}\left[\sigma_0(t,0,\xi)+\int_0^t \sigma_0(t,\tau,\xi)\beta(\tau,\xi)d\tau\right] \tag{1.4}$$

Для материала основного тела момент зарождения совпадает с моментом приложения внешней нагрузки, а естественная конфигурация совпадает с начальной. Для элемента, присоединяемого в момент времени τ, момент зарождения совпадает с моментом присоединения к растущему телу, а естественная конфигурация совпадает с актуальной конфигурацией в момент времени τ. Обозначим: $u(t, \xi)$ — вектор перемещения, $A(t, \xi)=E+\nabla u^T(t, \xi)$ — тензор градиента деформации при переходе из недеформированной в актуальную конфигурацию, $A_0(t, \tau, \xi)=A(t, \xi)\cdot A^{-1}(\tau, \xi)$ — тензор градиента деформации при переходе из актуальной конфигурации в момент времени τ в актуальную конфигурацию в момент времени t, E — единичный тензор, ∇ — оператор ковариантного дифференцирования в базисе актуальной конфигурации, T — символ транспонирования.

Механическое поведение вещества растущего тела в жидкой фазе описывается уравнением состояния идеальной жидкости, а в твердой фазе — уравнением состояния простого вязкоупругого тела [7]:

$$\sigma_{0f}=-pE,\quad \sigma_{0s}=-pE+s_0 \tag{1.5}$$

$$s_0(t,\tau,\xi)=A_0(t,\tau,\xi)\cdot\Phi(t-\tau,\xi,C_0(\tau_1,\tau,\xi))\cdot A_0^T(t,\tau,\xi)\quad(\tau\leqslant\tau_1\leqslant t)$$

Здесь p — давление, s_0 — девиатор тензора напряжений Коши σ_{0s}, $C_0=A_0^T\cdot A_0$ — мера деформаций Коши — Грина, Φ — оператор, отображающий симметричную тензорную функцию $C_0(\tau_1, \tau, \xi)$ на множество симметричных тензоров с нулевым первым инвариантом, который зависит от аргументов $t-\tau$ и ξ как от параметров.

Тензор напряжений Коши σ_0 в двухфазном материале определяется по формуле (η — концентрация вязкоупругого каркаса):

$$\sigma_0=\eta\sigma_{0s}+(1-\eta)\sigma_{0f}=-pE+\eta s_0 \tag{1.6}$$

Предположим, что процессы приложения нагрузки и объемного роста происходят достаточно медленно и силами инерции можно пренебречь. Пусть ρ — плотность материала растущего тела. Уравнения состояния (1.4)—(1.6) совместно с уравнением равновесия $\nabla\cdot\sigma_0+\rho F=0$ и выражением для тензора градиента деформации A представляют собой систему определяющих соотношений для описания напряженно-деформированного состояния в растущем вязкоупругом теле при конечных деформациях. Если усилия f заданы на всей поверхности тела, то граничные условия имеют вид $n\cdot\sigma_0=f$, где n — вектор единичной внешней нормали к поверхности тела в актуальной конфигурации.

2. Растяжение растущего стержня. Рассмотрим объемный рост прямолинейного стержня из несжимаемого вязкоупругого материала. В недеформированной конфигурации длина стержня равна l, а площадь поперечного сечения Σ_0. Введем декартову систему координат (x_1, x_2, x_3), ось x_1 которой совпадает с продольной осью стержня. Единичные векторы декартовой системы координат обозначим e_1, e_2, e_3. В момент времени $t=0$ к торцам стержня прикладывается растягивающее усилие интенсивностью $P=P(t)$ и начинается процесс объемного роста. Боковая поверхность стержня свободна от нагрузки. Массовые силы отсутствуют. Элементарный объем стержня изменяется по закону (1.1), в котором функция $\beta=$

$=\beta(t)$ не зависит от лагранжевых координат. Поведение материала стержня в твердой фазе подчиняется уравнению состояния вязкоупругого тела Трелоара [8, 9]:

$$\sigma_{0s}=-pE+\mu A_0\cdot(I-Q)(E-{}^1/_3 J_0 C_0^{-1})\cdot A_0^T \tag{2.1}$$

Здесь $\mu=\mu(t)$ — обобщенный модуль сдвига, J_0 — первый инвариант меры деформаций Коши — Грина C_0, I — единичный оператор, Q — оператор релаксации с ядром $Q^\circ(t,\tau)$. Для любой функции $e(t)$ имеем

$$Ie=e(t),\quad Qe=\int_\tau^t Q^\circ(t-\tau,\tau_1-\tau)e(\tau_1)d\tau_1$$

При одноосном растяжении стержня декартовы координаты в актуальной конфигурации (X_1, X_2, X_3) определяются по формулам [10]:

$$X_1=\alpha(t)x_1,\quad X_2=\alpha_0(t)x_2,\quad X_3=\alpha_0(t)x_3 \tag{2.2}$$

где $\alpha=\alpha(t)$, $\alpha_0=\alpha_0(t)$ — подлежащие определению функции времени. Из соотношений (1.1) и (2.2) следует равенство $[\alpha(t)\alpha_0^2(t)]^\cdot=\beta(t)$, где точкой обозначена производная по времени. Интегрируя это соотношение с начальными условиями $\alpha(0)=1$, $\alpha_0(0)=1$, получим

$$\alpha(t)\alpha_0^2(t)=v(t),\quad v(t)=1+\int_0^t\beta(\tau)d\tau \tag{2.3}$$

Согласно (2.2), (2.3) тензор $A_0(t,\tau)$ равен

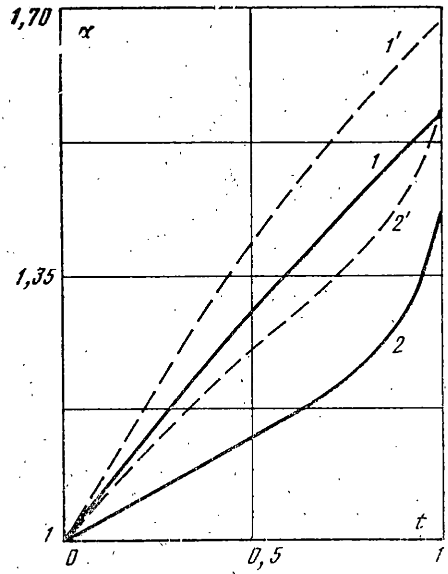
$$A_0(t,\tau)=\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}e_1e_1+\left[\frac{v(t)\alpha(\tau)}{v(\tau)\alpha(t)}\right]^{1/2}(e_2e_2+e_3e_3)\quad(0\leqslant\tau\leqslant t)$$

Подставим это выражение в уравнение состояния вязкоупругого материала (2.1). С помощью (1.4) — (1.6) найдем ненулевые физические компоненты тензора напряжений Коши $\sigma=\sigma_1e_1e_1+\sigma_2e_2e_2+\sigma_3e_3e_3$

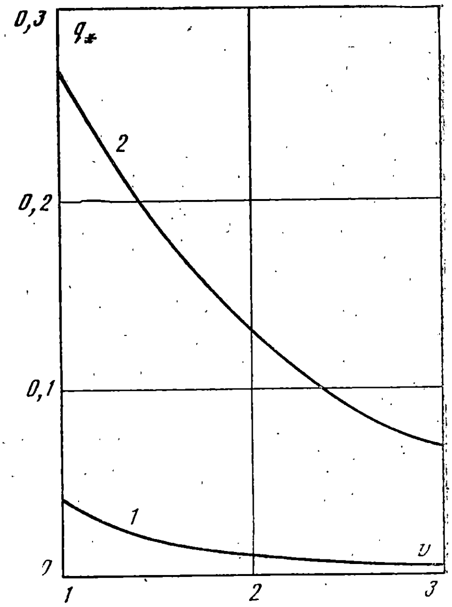
$$\sigma_1=-p+\frac{2}{3v(t)}\left\{\mu_0(t)\alpha^2(t)\left[\left(1-\frac{v(t)}{\alpha^3(t)}\right)-\int_0^t Q^\circ(t,\tau)\left(1-\frac{v(\tau)}{\alpha^3(\tau)}\right)d\tau\right]+\right.$$
$$+\int_0^t\mu_0(t-\tau_1)\left(\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau_1)}\right)^2\left[\left(1-\frac{v(t)}{v(\tau_1)}\left(\frac{\alpha(\tau_1)}{\alpha(t)}\right)^3\right)-\right.$$
$$\left.\left.-\int_{\tau_1}^t Q^\circ(t-\tau_1,\tau-\tau_1)\left(1-\frac{v(\tau)}{v(\tau_1)}\left(\frac{\alpha(\tau_1)}{\alpha(\tau)}\right)^3\right)d\tau\right]\beta(\tau_1)d\tau_1\right\}$$

$$\sigma_2=\sigma_3=-p+\frac{1}{3v(t)}\left\{\mu_0(t)\frac{v(t)}{\alpha(t)}\left[\left(1-\frac{\alpha^3(t)}{v(t)}\right)-\int_0^t Q^\circ(t,\tau)\left(1-\frac{\alpha^3(\tau)}{v(\tau)}\right)d\tau\right]+\right.$$
$$+\int_0^t\mu_0(t-\tau_1)\frac{v(t)\alpha(\tau_1)}{v(\tau_1)\alpha(t)}\left[\left(1-\frac{v(\tau_1)}{v(t)}\left(\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau_1)}\right)^3\right)-\right.$$
$$\left.\left.-\int_{\tau_1}^t Q^\circ(t-\tau_1,\tau-\tau_1)\left(1-\frac{v(\tau_1)}{v(\tau)}\left(\frac{\alpha(\tau)}{\alpha(\tau_1)}\right)^3\right)d\tau\right]\beta(\tau_1)d\tau_1\right\}\quad(\mu_0=\eta\mu) \tag{2.4}$$

Для определения величины p положим $\sigma_2=\sigma_3=0$. Подставляя найденное выражение в (2.4), получим единственную ненулевую физическую компоненту тензора напряжений Коши. Выражения (2.4) удовлетворяют



Фиг. 1



Фиг. 2

уравнениям равновесия и граничным условиям на боковой поверхности стержня. Удовлетворим граничные условия на торцах стержня в интегральном смысле

$$P(t)=\int \sigma_1\, dX_2\, dX_3=\sigma_1\Sigma_0 v(t)/\alpha(t)$$

Из этого соотношения и (2.4) найдем ($P_*=P/(\mu_0(0)\Sigma_0)$):

$$P_*(t)\alpha(t)=\frac{\mu_0(t)}{\mu_0(0)}\alpha^2(t)\left[\left(1-\frac{v(t)}{\alpha^3(t)}\right)-\right.$$

$$-\frac{1}{3}\int\limits_0^t Q^\circ(t,\tau)\left(1-\frac{v(\tau)}{\alpha^3(\tau)}\right)\left(2+\frac{v(t)}{v(\tau)}\left(\frac{\alpha(\tau)}{\alpha(t)}\right)^3\right)d\tau\Bigg]+$$

$$+\int\limits_0^t \frac{\mu_0(t-\tau_1)}{\mu_0(0)}\left(\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau_1)}\right)^2\left[\left(1-\frac{v(t)}{v(\tau_1)}\left(\frac{\alpha(\tau_1)}{\alpha(t)}\right)^3\right)-\right.$$

$$-\frac{1}{3}\int\limits_{\tau_1}^t Q^\circ(t-\tau_1,\tau-\tau_1)\left(1-\frac{v(\tau)}{v(\tau_1)}\left(\frac{\alpha(\tau_1)}{\alpha(\tau)}\right)^3\right)\times$$

$$\times\left(2+\frac{v(t)}{v(\tau)}\left(\frac{\alpha(\tau)}{\alpha(t)}\right)^3\right)d\tau\Bigg]\beta(\tau_1)\,d\tau_1 \qquad (2.5)$$

При заданной функции $\beta(t)$ соотношение (2.5) представляет собой нелинейное интегральное уравнение для определения функции $\alpha(t)$. Для нестареющего упругого материала Трелоара ($\mu_0(t)=\mu_0$, $Q^\circ(t,\ \tau)=0$) это соотношение эквивалентно интегродифференциальному уравнению

$$\alpha^{\cdot}(t)=\left\{P_*^{\cdot}(t)\alpha(t)+\frac{\beta(t)}{\alpha(t)}\left[1+\int\limits_0^t\frac{\beta(\tau)}{v(\tau)}\alpha(\tau)\,d\tau\right]\right\}\times$$

$$\times\left\{3\alpha(t)\left[1+\int\limits_0^t\frac{\beta(\tau)}{\alpha^2(\tau)}d\tau\right]-2P_*(t)\right\}^{-1},\quad \alpha(0)=1 \qquad (2.6)$$

Для исследования влияния объемного роста на формирование напряженно-деформированного состояния проведем численное интегрирование уравнения (2.6) при $\beta(t)=\text{const}$, $T=1$, $P_*=t^m$. Графики зависимости $\alpha=\alpha(t)$ представлены на фиг. *1*. Сплошные кривые соответствуют значению $\beta=1$, штриховые кривые — значению $\beta=2$. Кривые *1* и *1'* получены при $m=1$, а кривые *2* и *2'* — при $m=10$. Результаты расчетов свидетельствуют о существенном влиянии процесса роста и закона изменения во времени растягивающего усилия на коэффициент осевого удлинения стержня. При $m=1$ в конечный момент времени коэффициент осевого удлинения равен 1,56 при $\beta=1$ и 1,68 при $\beta=2$. Возрастание объема присоединяемого вещества приводит к увеличению коэффициента относительного осевого удлинения $\Delta=\alpha(1)-\alpha(0)$ на 22%. При $\beta=1$ в конечный момент времени коэффициент осевого удлинения равен 1,56 при $m=1$ и 1,45 при $m=10$. Уменьшение параметра m приводит к увеличению коэффициента относительного осевого удлинения Δ на 23%.

3. Задача Ламе для растущего цилиндра. Рассмотрим объемный рост полого цилиндра круглого поперечного сечения из несжимаемого вязкоупругого материала. В момент времени $t=0$ цилиндр находится под действием внутреннего давления $q(0)$. Длина цилиндра равна l, внутренний радиус поперечного сечения a_1, внешний радиус a_2. Введем в начальной конфигурации цилиндрическую систему координат (r, ϑ, z), ось z которой совпадает с осью цилиндра. Единичные векторы цилиндрической системы координат обозначим e_r, e_ϑ, e_z. Деформация растущего тела осуществляется под действием давления $q=q(t)$, приложенного к внутренней боковой поверхности цилиндра. Внешняя боковая поверхность свободна от нагрузки. Массовые силы отсутствуют. Торцы цилиндра закреплены относительно продольного смещения. Элементарный объем цилиндра изменяется по закону (1.1), в котором функция $\beta=\beta(t)$ не зависит от лагранжевых координат. Поведение твердой фазы материала описывается уравнением состояния вязкоупругого тела Трелоара (2.1).

Под действием нагрузки в цилиндре реализуется осесимметричная деформация. Цилиндрические координаты в актуальной конфигурации (R, Θ, Z) выражаются через цилиндрические координаты в начальной конфигурации по формулам

$$R=\Psi(t,r),\quad \Theta=\vartheta,\quad Z=z \tag{3.1}$$

Здесь $\Psi(t,r)$ — подлежащая определению функция. Согласно (1.1) эта функция удовлетворяет уравнению $(\Psi\Psi'/r)^{\cdot}=\beta(t)$, где штрих обозначает производную по r. Проинтегрируем это равенство по t, а затем по r. Учитывая начальное условие $\Psi(0,r)=r$, получим ($C(t)$ — неизвестная функция времени)

$$\Psi^2=v(t)r^2+C(t) \tag{3.2}$$

Из соотношений (3.1) и (3.2) следует, что тензор $A_0(t,\tau,r)$ равен

$$A_0(t,\tau,r)=\frac{v(t)\Psi(\tau,r)}{v(\tau)\Psi(t,r)}e_re_r+\frac{\Psi(t,r)}{\Psi(\tau,r)}e_\vartheta e_\vartheta+e_ze_z\quad (0\leqslant\tau\leqslant t) \tag{3.3}$$

Предположим, что для исходного цилиндра в начальный момент времени переход из естественной в начальную конфигурацию представляет собой осесимметричную деформацию. Цилиндрические координаты в естественной конфигурации (r^*, ϑ^*, z^*) выражаются через цилиндрические координаты в начальной конфигурации по формулам $r^*=\psi(r)$, $\vartheta^*=\vartheta$, $z^*=z$, где $\psi(r)$ — подлежащая определению функция. Из условия несжимаемости материала получим $\psi\psi'=r$. Интегрируя это равенство, найдем (c — неизвестная постоянная):

$$\psi^2=r^2+c \tag{3.4}$$

Для исходного тела тензор $A_0(t,0,r)$ имеет вид

$$A_0(t,0,r)=\frac{v(t)\psi(r)}{\Psi(t,r)}e_re_r+\frac{\Psi(t,r)}{\psi(r)}e_\vartheta e_\vartheta+e_ze_z \tag{3.5}$$

Подставим выражения (3.3), (3.5) в уравнения состояния (1.4)—(1.6), (2.1). Найдем ненулевые физические компоненты тензора напряжений

Коши $\sigma=\sigma_r e_r e_r+\sigma_\vartheta e_\vartheta e_\vartheta+\sigma_z e_z e_z$:

$$\sigma_r=-p+\frac{1}{3v(t)}\Bigg\{\mu_0(t)\Bigg[\Bigg(2\left(\frac{v(t)\psi(r)}{\Psi(t,r)}\right)^2-\left(\frac{\Psi(t,r)}{\psi(r)}\right)^2-1\Bigg)-$$

$$-\int_0^t Q^\circ(t,\tau)\left(2\left(\frac{v(\tau)\psi(r)}{\Psi(\tau,r)}\right)^2-\left(\frac{\Psi(\tau,r)}{\psi(r)}\right)^2-1\right)\left(\frac{v(t)\Psi(\tau,r)}{v(\tau)\Psi(t,r)}\right)^2 d\tau\Bigg]+$$

$$+\int_0^t \mu_0(t-\tau_1)\Bigg[\left(2\left(\frac{v(t)\Psi(\tau_1,r)}{v(\tau_1)\Psi(t,r)}\right)^2-\left(\frac{\Psi(t,r)}{\Psi(\tau_1,r)}\right)^2-1\right)-$$

$$-\int_{\tau_1}^t Q^\circ(t-\tau_1,\tau-\tau_1)\left(2\left(\frac{v(\tau)\Psi(\tau_1,r)}{v(\tau_1)\Psi(\tau,r)}\right)^2-\left(\frac{\Psi(\tau,r)}{\Psi(\tau_1,r)}\right)^2-1\right)\times$$

$$\times\left(\frac{v(t)\Psi(\tau,r)}{v(\tau)\Psi(t,r)}\right)^2 d\tau\Bigg]\beta(\tau_1)\,d\tau_1\Bigg\}$$

$$\sigma_\vartheta=-p+\frac{1}{3v(t)}\Bigg\{\mu_0(t)\Bigg[\left(2\left(\frac{\Psi(t,r)}{\psi(r)}\right)^2-\left(\frac{v(t)\psi(r)}{\Psi(t,r)}\right)^2-1\right)-$$

$$-\int_0^t Q^\circ(t,\tau)\left(2\left(\frac{\Psi(\tau,r)}{\psi(r)}\right)^2-\left(\frac{v(\tau)\psi(r)}{\Psi(\tau,r)}\right)^2-1\right)\left(\frac{\Psi(t,r)}{\Psi(\tau,r)}\right)^2 d\tau\Bigg]+$$

$$+\int_0^t \mu_0(t-\tau_1)\Bigg[\left(2\left(\frac{\Psi(t,r)}{\Psi(\tau_1,r)}\right)^2-\left(\frac{v(t)\Psi(\tau_1,r)}{v(\tau_1)\Psi(t,r)}\right)^2-1\right)-$$

$$-\int_{\tau_1}^t Q^\circ(t-\tau_1,\tau-\tau_1)\left(2\left(\frac{\Psi(\tau,r)}{\Psi(\tau_1,r)}\right)^2-\left(\frac{v(\tau)\Psi(\tau_1,r)}{v(\tau_1)\Psi(\tau,r)}\right)^2-1\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\Psi(t,r)}{\Psi(\tau,r)}\right)^2 d\tau\Bigg]\beta(\tau_1)\,d\tau_1\Bigg\}$$

$$\sigma_z=-p+\frac{1}{3v(t)}\Bigg\{\mu_0(t)\Bigg[\left(2-\left(\frac{v(t)\psi(r)}{\Psi(t,r)}\right)^2-\left(\frac{\Psi(t,r)}{\psi(r)}\right)^2\right)-$$

$$-\int_0^t Q^\circ(t,\tau)\left(2-\left(\frac{v(\tau)\psi(r)}{\Psi(\tau,r)}\right)^2-\left(\frac{\Psi(\tau,r)}{\psi(r)}\right)^2\right)d\tau+\int_0^t \mu_0(t-\tau_1)\times$$

$$\times\Bigg[\left(2-\left(\frac{v(t)\Psi(\tau_1,r)}{v(\tau_1)\Psi(t,r)}\right)^2-\left(\frac{\Psi(t,r)}{\Psi(\tau_1,r)}\right)^2\right)-\int_{\tau_1}^t Q^\circ(t-\tau_1,\tau-\tau_1)\times$$

$$\times\left(2-\left(\frac{v(\tau)\Psi(\tau_1,r)}{v(\tau_1)\Psi(\tau,r)}\right)^2-\left(\frac{\Psi(\tau,r)}{\Psi(\tau_1,r)}\right)^2\right)d\tau\Bigg]\beta(\tau_1)\,d\tau_1\Bigg\} \qquad (3.6)$$

Проинтегрируем уравнение равновесия $\partial\sigma_r/\partial R+(\sigma_r-\sigma_\vartheta)/R=0$ по R в пределах от $\Psi(t, a_1)$ до $\Psi(t, a_2)$. Учитывая (3.2), (3.6) и граничные условия $\sigma_r|_{r=a_1}=-q(t)$, $\sigma_r|_{r=a_2}=0$, получим

$$q(t)=\int_{a_1}^{a_2}\Bigg\{\mu_0(t)\Bigg[\left(\left(\frac{\Psi(t,r)}{\psi(r)}\right)^2-\left(\frac{v(t)\psi(r)}{\Psi(t,r)}\right)^2\right)-\frac{1}{3}\int_0^t Q^\circ(t,\tau)\times$$

$$\times\left(\left(\frac{\Psi(t,r)}{\psi(r)}\right)^2\left(2+\left(\frac{v(t)}{v(\tau)}\right)^2\left(\frac{\Psi(\tau,r)}{\Psi(t,r)}\right)^4\right)-\right.$$

$$-\left(\frac{v(t)\psi(r)}{\Psi(t,r)}\right)^2\left(2+\left(\frac{v(\tau)}{v(t)}\right)^2\left(\frac{\Psi(t,r)}{\Psi(\tau,r)}\right)^4\right)-$$

$$\left.-\left(\frac{\Psi(t,r)}{\Psi(\tau,r)}\right)^2\left(1-\left(\frac{v(t)}{v(\tau)}\right)^2\left(\frac{\Psi(\tau,r)}{\Psi(t,r)}\right)^4\right)\right)d\tau+$$

$$+\int_0^t \mu_0(t-\tau_1)\left[\left(\left(\frac{\Psi(t,r)}{\Psi(\tau_1,r)}\right)^2-\left(\frac{v(t)\Psi(\tau_1,r)}{v(\tau_1)\Psi(t,r)}\right)^2\right)-\right.$$

$$-\frac{1}{3}\int_{\tau_1}^t Q^\circ(t-\tau_1,\tau-\tau_1)\left(\left(\frac{\Psi(t,r)}{\Psi(\tau_1,r)}\right)^2\left(2+\left(\frac{v(t)}{v(\tau)}\right)^2\left(\frac{\Psi(\tau,r)}{\Psi(t,r)}\right)^4\right)-\right.$$

$$-\left(\frac{v(t)\Psi(\tau_1,r)}{v(\tau_1)\Psi(t,r)}\right)^2\left(2+\left(\frac{v(\tau)}{v(t)}\right)^2\left(\frac{\Psi(t,r)}{\Psi(\tau,r)}\right)^4\right)-$$

$$\left.\left.-\left(\frac{\Psi(t,r)}{\Psi(\tau,r)}\right)^2\left(1-\left(\frac{v(t)}{v(\tau)}\right)^2\left(\frac{\Psi(\tau,r)}{\Psi(t,r)}\right)^4\right)\right)d\tau\right]\beta(\tau_1)\,d\tau_1\Bigg\}\frac{r\,dr}{\Psi^2(t,r)} \qquad (3.7)$$

При заданной функции $\beta(t)$ соотношение (3.7) представляет собой нелинейное интегральное уравнение для определения функции $C(t)$. Для нестареющего упругого материала ($\mu_0(t)=\mu_0$, $Q^0(t,\tau)=0$) это соотношение упрощается и принимает вид ($q_*=q/\mu_0$, $D=C/v$):

$$2q_*(t)=\int_{a_1^2}^{a_2^2}\left\{\left[1-\left(\frac{x+c}{x+D(t)}\right)^2\right]\frac{1}{x+c}+\right.$$

$$\left.+\int_0^t\left[1-\left(\frac{x+D(\tau)}{x+D(t)}\right)^2\right]\frac{\beta(\tau)\,d\tau}{v(\tau)\,(x+D(\tau))}\right\}dx \qquad (3.8)$$

Из соотношения (3.8) при $t=0$ следует равенство ($c_*=c/a_1^2$, $\varkappa=a_1^2/a_2^2$):

$$2q_*(0)=\ln\left|\frac{1+\varkappa c_*}{1+c_*}\right|-c_*(1-\varkappa) \qquad (3.9)$$

Задачу объемного роста цилиндра можно рассматривать как модельную задачу для описания роста крупных кровеносных сосудов. При этом величина q равна среднему артериальному давлению крови. Предположим, что течение крови описывается законом Пуазейля [11]. Условие сохранения постоянного расхода крови через сосуд имеет вид $q(t)\Psi^4(t,a_1)=q(0)a_1^4$. Из этого соотношения и (3.2) имеем ($D_*=D/a_1^2$):

$$q_*(t)=q_*(0)\,[v(t)\,(1+D_*(t))\,]^{-2} \qquad (3.10)$$

Согласно (3.8), (3.10) функция $D_*=D_*(v)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{dD_*}{dv}=-\frac{1}{v}\left\{\frac{1}{1+D_*}+\frac{(1-\varkappa)v^2(1+D_*)}{2q_*(0)\,(1+\varkappa D_*)}\times\right.$$

$$\left.\times\left[(1+\ln v)+D_{1*}\frac{1/2(1+\varkappa)+\varkappa D_*}{(1+D_*)\,(1+\varkappa D_*)}\right]\right\}^{-1} \qquad (3.11)$$

$$dD_{1*}/dv=-(1+\ln v)\,dD_*/dv$$

$$D_*(1)=0,\quad D_{1*}(1)=c_*$$

Для исследования влияния объемного роста сосуда на артериальное давление крови проведем численное интегрирование уравнений (3.11) при $a_1=0{,}9\ a_2$, $v(T)=3$. Графики зависимости давления от относительного объема присоединившегося вещества $q_*=q_*(v)$ представлены на фиг. 2. Кривая *1* соответствует значению $q_*(0)=0{,}04$ ($c_*=-0{,}1$), а кривая *2* – значению $q_*(0)=0{,}27$ ($c_*=-0{,}5$). Результаты расчетов свидетельствуют о существенном влиянии притока вещества на артериальное давление. Для малой интенсивности начального давления ($q_*(0)=0{,}04$) при увеличении массы сосуда в 3 раза давление уменьшается в 7,82 раза. Возрастание начального давления приводит к ослаблению влияния процесса роста на артериальное давление. Для большой интенсивности начального давления ($q_*(0)=0{,}27$) при увеличении массы сосуда в 3 раза артериальное давление уменьшается в 3,97 раза.

Автор выражает глубокую благодарность Е. Ш. Штенгольду за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cowin S. C., Hegedus D. H.* Bone remodelling. 1. Theory of adaptive elasticity // J. Elast. 1976. V. 6. No 3. P. 313–325.
2. *Cowin S. C., Van Buskirk W. C.* Internal bone remodelling induced by a medullary pin // J. Biomech. 1978. V. 11. No 5. P. 269–275.
3. *Штейн А. А.* О континуальных моделях растущего материала // Механика композитн. материалов. 1979. № 6. С. 1105–1110.
4. *Регирер С. А.* О моделях биологических сплошных сред // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 531–542.
5. *Мелихов А. В., Регирер С. А., Штейн А. А.* Механические напряжения как фактор морфогенеза // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271. № 6. С. 1341–1344.
6. *Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А.* Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970. 335 с.
7. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
8. *Адамов А. А.* Об идентификации модели наследственной вязкоупругости при конечных деформациях // Структурная механика неоднородных сред. Свердловск: Изд-е УНЦ АН СССР, 1982. С. 8–11.
9. *Адамов А. А., Санников Л. С., Селиванов Е. И.* Вязкоупругая реакция цилиндра из резины при сложном многопараметрическом нагружении // Краевые задачи упругих и неупругих систем. Свердловск: Изд-е УНЦ АН СССР, 1985. С. 32–36.
10. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
11. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.11.1988