МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1990

УДК 539.376


Ю. Н. РАДАЕВ

# О КАНОНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ПУАНКАРЕ И ИНВАРИАНТАХ УРАВНЕНИЙ ПЛАСТИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

Рассматриваются трехмерные уравнения равновесия жесткопластической среды с условием пластичности Треска и ассоциированным с ним законом течения для напряженного состояния, соответствующего ребру поверхности текучести. При условии расслоенности поля собственных векторов тензора напряжений, отвечающих наибольшему (или наименьшему) главному напряжению, вводятся такие криволинейные координаты, что уравнения равновесия, преобразованные к новым переменным, сводятся к трем интегрируемым уравнениям. Найдены инварианты, сохраняющие свои значения вдоль линий главных напряжений. Выделены классы пространственных задач равновесия жесткопластических тел, для которых пластические поля напряжений являются расслоенными. Доказано, что интегрирование уравнений пластичности для задач этих классов сводится к отысканию канонических в смысле Пуанкаре отображений пространственных областей. Вводятся канонические координаты пространственной, плоской и осесимметричной задачи. В плоском и осесимметричном случае относительно производящих функций соответствующих канонических отображений получены нелинейные уравнения в частных производных второго порядка и показана инвариантность этих уравнений при преобразованиях Лежандра и Ампера. Указанные уравнения затем приводятся к телеграфному уравнению и соответственно квазилинейному уравнению второго порядка.

**1. Уравнение равновесия жесткопластического тела для ребра призмы Треска.** Уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности впервые были получены Леви [1]. Пространственная задача в общем случае при условии пластичности Мизеса является статически неопределимой, и кроме того, уравнения принадлежат к эллиптическому типу [2], а это не позволяет обобщить методы интегрирования, развитые для плоской задачи [2—4].

Исследованию уравнений осесимметричной и пространственной задач теории пластичности посвящены работы [5—12].

Смысл гипотезы полной пластичности Хаара — Кармана [6], как такого напряженного состояния пластической среды, при котором точка, представляющая тензор напряжений в пространстве главных напряжений, расположена на ребре призмы Треска, был установлен в [7]. Осесимметричная жесткопластическая задача с использованием гипотезы полной пластичности исследовалась в [8], где было доказано, что уравнения статики принадлежат к гиперболическому типу, найдены их характеристики и предложен численный метод интегрирования этих уравнений.

В [13] показано, что пространственная задача статически определима, если напряженное состояние жесткопластической среды соответствует ребру призмы Треска, система уравнений пластического равновесия принадлежит к гиперболическому типу и нормали к характеристическим поверхностям совпадают с нормалями к площадкам максимальных касательных напряжений (площадкам скольжения). Ассоциированный закон течения для ребра призмы Треска [14] не фиксирует направление вектора, представляющего приращение тензора пластической деформации. Поэтому появляется дополнительная функция — угол, определяющий положение вектора приращения пластической деформации между нормалями к граням призмы, — которой можно воспользоваться для построения согласованного поля скоростей.

Необходимо также отметить то обстоятельство, что решения уравнений статики, полученные в известных работах [5, 8], соответствуют именно ребру призмы Треска, так как условие пластичности Мизеса в сочетании с условием Хаара — Кармана оставляет только те напряженные состояния, которые соответствуют прямым, по которым пересекается цилиндр Мизеса и вписанная в него призма Треска.

Принципиально важным является тот факт, что соотношения вдоль характеристик являются неинтегрируемыми в отличии от случая плоской пластической деформации. Конечные соотношения можно получить, как это будет доказано в п. 3, только вдоль линий главных напряжений. Поэтому отличительной чертой предлагаемого подхода является то, что уравнения пространственной задачи исследуются не методом характеристик, а с помощью канонических преобразований Пуанкаре.

Рассмотрим, следуя [13], уравнения равновесия жесткопластического тела для ребра призмы Треска. Пусть в жесткопластическом теле, материал которого характеризуется константой $k$ — пределом текучести при чистом сдвиге, осуществляется напряженное состояние, соответствующее ребру призмы Треска. Обозначим через $\boldsymbol{\sigma}$ тензор напряжений; $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ — ортонормированный базис из собственных векторов тензора напряжений; $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ — соответствующие собственные значения (главные напряжения). Спектральное разложение тензора напряжений имеет вид

$$\boldsymbol{\sigma}=\sigma_1\mathbf{l}\otimes\mathbf{l}+\sigma_2\mathbf{m}\otimes\mathbf{m}+\sigma_3\mathbf{n}\otimes\mathbf{n} \tag{1.1}$$

В пространстве главных напряжений условие текучести Треска изображается поверхностью шестигранной призмы с ребрами $\sigma_1\pm2k=\sigma_2=\sigma_3$, $\sigma_1=\sigma_2\pm2k=\sigma_3$, $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3\pm2k$. Так как напряженное состояние соответствует ребру призмы, то всегда можно занумеровать главные направления тензора напряжений так, чтобы выполнялось равенство $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3\pm2k$. Так как $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ — ортонормированный базис, то

$$\mathbf{l}\otimes\mathbf{l}+\mathbf{m}\otimes\mathbf{m}+\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}=\mathbf{I} \tag{1.2}$$

где $\mathbf{I}$ — единичный тензор. Учитывая (1.1), (1.2), а также уравнение ребра призмы $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3\pm2k$, получим

$$\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_3\pm2k)\mathbf{I}\mp2k\mathbf{n}\otimes\mathbf{n} \tag{1.3}$$

Таким образом, тензор напряжений определяется скалярным полем $\sigma_3$ и единичным векторным полем $\mathbf{n}$. Уравнение равновесия $\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{0}$ после подстановки в него разложения (1.3) можно представить в следующем виде:

$$\operatorname{grad}\sigma_3\mp2k\operatorname{div}(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})=\mathbf{0},\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=1 \tag{1.4}$$

Следовательно, задача о равновесии жесткопластического тела для ребра призмы Треска статически определима, если граничные условия заданы в напряжениях. Уравнения равновесия могут быть рассмотрены независимо от кинематических уравнений. Обозначим $\sigma=\sigma_3/(\mp2k)$ и приведем уравнение (1.4) к виду

$$\operatorname{grad}\sigma+\operatorname{div}(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})=\mathbf{0},\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=1 \tag{1.5}$$

В декартовых координатах уравнение (1.5) эквивалентно системе уравнений [13]:

$$\partial\sigma/\partial x_i+n_k\partial n_i/\partial x_k+n_i\partial n_k/\partial x_k=0,\ n_kn_k=1\ (i,k=1,2,3)$$

Условимся, что в дальнейшем латинские индексы будут пробегать значения 1, 2, 3, а греческие — 1, 2.

Уравнение (1.5) принадлежит к гиперболическому типу [13]. В каждой точке $M$ существуют три характеристических направления. Если обозначить через $\mathbf{n}^{(1)}$, $\mathbf{n}^{(2)}$, $\mathbf{n}^{(3)}$ единичные нормали к характеристическим поверхностям в точке $M$ то $\mathbf{n}^{(1)}\cdot\mathbf{n}=2^{-1/2}$, $\mathbf{n}^{(2)}\cdot\mathbf{n}=-2^{-1/2}$, $\mathbf{n}^{(3)}\cdot\mathbf{n}=0$. Характеристическими являются не только поверхности скольжения, но и интегральные поверхности поля $\mathbf{n}$.

**2. Расслоенные пластические поля напряжений.** Поле напряжений в области $G$ назовем расслоенным, если существует семейство поверхностей $\Sigma$, заполняющее область $G$, такое, что векторное поле единичных нормалей к поверхностям семейства $\Sigma$ совпадает с полем $\mathbf{n}$ собственных векторов тензора напряжений. Для того чтобы векторное поле $\mathbf{a}$ было расслоенным в области $G$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathbf{a}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{a}=0,\ \mathbf{x}\in G \tag{2.1}$$

Слой поля $\mathbf{a}$, т. е. поверхности семейства $\Sigma$, образуются векторными линиями поля $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ следующим образом: сначала выбирается некоторая поверхность $S$ так, чтобы поле $\mathbf{a}$ касалось ее в каждой точке, и на поверхности $S$ строится однопараметрическое семейство ортогональных к $\mathbf{a}$ траекторий, затем из каждой точки ортогональной траектории выпускается векторная линия поля $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ и составляется слой поля $\mathbf{a}$. Для единичного векторного поля $\mathbf{n}$ введем углы $\vartheta$, $\varphi$, определяющие его ориентацию в пространстве: $\mathbf{n}=\sin\psi\sin\vartheta\mathbf{i}-\cos\psi\sin\vartheta\mathbf{j}+\cos\vartheta\mathbf{k}$. Тогда условие расслоенности поля напряжений можно получить из (2.1) в следующем виде:

$$\cos\psi\frac{\partial\vartheta}{\partial x_1}+\sin\psi\frac{\partial\vartheta}{\partial x_2}-\frac{1}{2}\sin 2\vartheta\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial x_1}+$$
$$+\frac{1}{2}\sin 2\vartheta\cos\psi\frac{\partial\psi}{\partial x_2}+\sin^2\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial x_3}=0$$

Таким образом, для напряженного состояния, соответствующего ребру призмы Треска, которое кроме того является расслоенным в области $G$, поле собственных векторов тензора напряжений с наибольшим (или наименьшим) собственным значением должно удовлетворять уравнениям

$$\operatorname{rot}\operatorname{div}(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})=0,\ \mathbf{n}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{n}=0,\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=1 \tag{2.2}$$

*Замечание.* Уравнения равновесия жесткопластического тела в случае плоской деформации имеют вид [6]:

$$\begin{aligned}&\partial p/\partial x_1-2k(\sin 2\theta\partial\theta/\partial x_1-\cos 2\theta\partial\theta/\partial x_2)=0\\&\partial p/\partial x_2+2k(\cos 2\theta\partial\theta/\partial x_1+\sin 2\theta\partial\theta/\partial x_2)=0\end{aligned} \tag{2.3}$$

где $p={}^1/_2(\sigma_1+\sigma_2)$, $\theta$ — угол наклона главного направления, соответствующего наибольшему собственному значению $\sigma_1$, к оси $x_1$. Как известно [13], если тело подвергается плоскому деформированию, то напряженное состояние соответствует грани призмы Треска (но не ребру). Тем не менее, если ввести обозначения $\sigma=p/(2k)$ и плоское векторное поле $\mathbf{n}$ с компонентами $n_1=\cos\theta$, $n_2=\sin\theta$, то уравнения (2.3) приводятся к двумерному уравнению (1.5). Следует отметить, что любое плоское векторное поле в трехмерном пространстве будет расслоенным. Поэтому плоская задача как частный случай входит в рассматриваемый класс полей напряжений.

**3. Интегралы уравнений равновесия для расслоенного поля напряжений.** Векторное уравнение (1.5) имеет инвариантную форму. Преобразуем его к криволинейным координатам $\xi^1$, $\xi^2$, $\xi^3$. Ковариантные компоненты поля $\operatorname{div}(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})$ равны [15]:

$$(\operatorname{div}(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}))_l=g^{-1/2}g_{kl}\frac{\partial}{\partial\xi^m}(g^{1/2}n^kn^m)+n^rn^s[rs,l] \tag{3.1}$$

где $g_{ij}$ — компоненты метрического тензора, $g=\det\|g_{ij}\|$, $[rs,\ l]$ — символы Кристоффеля первого рода. Через $n^m$ обозначены контравариантные компоненты векторного поля $\mathbf{n}$. Используя равенство (3.1), представим уравнение (1.5) в ковариантной форме

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\xi^l}+g^{-1/2}g_{kl}\frac{\partial}{\partial\xi^m}(g^{1/2}n^kn^m)+n^rn^s[rs,l]=0 \tag{3.2}$$

Воспользуемся предположением о расслоенности векторного поля $\mathbf{n}$ и выберем криволинейные координаты $\xi^m$ специальным образом: поверхности

$\xi^3=\text{const}$ есть слои поля $\mathbf{n}$, а поверхности $\xi^1=\text{const}$, $\xi^2=\text{const}$ — интегральные поверхности поля $\mathbf{n}$. При таком выборе криволинейных координат имеем $g_{13}\equiv 0$, $g_{23}\equiv 0$, $n^1\equiv 0$, $n^2\equiv 0$, что позволяет существенно упростить уравнения (3.2):

$$\partial\sigma/\partial\xi^1-{}^1/_2(n^3)^2\partial g_{33}/\partial\xi^1=0,\ \partial\sigma/\partial\xi^2-{}^1/_2(n^3)^2\partial g_{33}/\partial\xi^2=0$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\xi^3}+g_{33}\frac{\partial(n^3)^2}{\partial\xi^3}+\frac{1}{2}g_{33}(n^3)^2\frac{\partial}{\partial\xi^3}\ln(g_{33}g)=0$$

Так как $(n^3)^2=1/g_{33}$, то последние уравнения эквивалентны следующим

$$\frac{\partial}{\partial\xi^1}\left(\sigma-\frac{1}{2}\ln g_{33}\right)=0,\quad \frac{\partial}{\partial\xi^2}\left(\sigma-\frac{1}{2}\ln g_{33}\right)=0 \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi^3}\left(\sigma-\frac{1}{2}\ln g_{33}+\frac{1}{2}\ln g\right)=0$$

Уравнения (3.3) интегрируются вдоль линий главных напряжений. Инвариант $I_1=\sigma-{}^1/_2\ln g_{33}$ сохраняет свое значение на каждом из слоев поля $\mathbf{n}$. Инвариант $I_2=\sigma-{}^1/_2\ln g_{33}+{}^1/_2\ln g$ не изменяется вдоль векторной линии поля $\mathbf{n}$.

Отметим, что пространственная задача для жесткопластической среды с критерием текучести Мизеса исследовалась [16] в координатной сетке линий главных напряжений. Осесимметричная жесткопластическая задача также анализировалась при помощи криволинейной сетки линий главных напряжений в [17—19].

Необходимое и достаточное условие интегрируемости системы (3.3) состоит в возможности разложения детерминанта $g$ на произведение двух положительных функций

$$g=G_1(\xi^3)G_2(\xi^1,\xi^2) \tag{3.4}$$

Уравнение (3.4) является одновременно и общим интегралом уравнений (2.2): если задаться криволинейными координатами $\xi^1$, $\xi^2$, $\xi^3$ так, чтобы $g_{13}\equiv 0$, $g_{23}\equiv 0$ и выполнялось (3.4), то векторное поле $\text{grad}\,\xi^3/|\text{grad}\,\xi^3|$ будет тождественно удовлетворять уравнениям (2.2).

В качестве примеров расслоенного поля напряжений можно привести осесимметричную задачу и задачу о плоской деформации. Действительно, любое осесимметричное и плоское векторное поле является расслоенным. Если ввести цилиндрические координаты $r$, $\varphi$, $z$, то слоями осесимметричного поля $\mathbf{n}$ будут поверхности, образованные вращением вокруг оси симметрии ортогональных полю $\mathbf{n}$ траекторий, расположенных в плоскости $\varphi=0$. Слоями плоского векторного поля являются цилиндрические поверхности над ортогональными линиями поля $\mathbf{n}$.

**4. Классы пространственных задач с расслоенными полями напряжений.** Рассмотрим жесткопластическое тело $\Omega$, часть границы А которого свободна или на нее действует нормальная поверхностная нагрузка $p(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in A$. Физическая задача Коши приводится к двум математическим задачам Коши с начальными данными на поверхности $A$ ($\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор нормали к поверхности $A$): $\mathbf{n}=\boldsymbol{\nu}$, $\sigma=p/(\pm 2k)$ на поверхности $A$; $\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nu}=0$, $\sigma=1+p/(\pm 2k)$ на поверхности $A$. Рассмотрим первую из указанных задач и покажем, что поле напряжений, примыкающее к поверхности $A$, является расслоенным для любой заданной поверхностной нагрузки $p(\mathbf{x})$. Однако, прежде выделим еще один класс задач пространственного равновесия с расслоенными полями напряжений.

Пусть жесткопластическое тело $\Omega$ симметрично относительно плоскости П и подвергается действию симметричной поверхностной нагрузки так, что материал, расположенный в плоскости симметрии, переходит в состояние пластического течения. Плоскую область, являющуюся сечением тела $\Omega$ плоскостью П, обозначим через $A$. В силу симметрии плоская область $A$ будет слоем векторного поля $\mathbf{n}$. Если через $\boldsymbol{\nu}$ обозначить единичную нормаль к $A$, имеющую направление поля $\mathbf{n}$, а через $p(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in A$ —

абсолютную величину вектора напряжения на площадке с нормалью $\mathbf{v}$, то на поверхности $A$ имеем следующие условия: $\mathbf{n}=\mathbf{v}$, $\sigma=p/(\pm 2k)$.

Таким образом, для $\mathbf{n}$ и $\sigma$ в каждом из рассматриваемых случаев имеем формально эквивалентные математические задачи Коши: в области, примыкающей к поверхности $A$, требуется определить единичное векторное поле $\mathbf{n}$ и скалярное поле $\sigma$, удовлетворяющие уравнению (1.5) и начальным условиям $\mathbf{n}=\mathbf{v}$, $\sigma=\sigma_A$ на поверхности $A$. Оказывается, что векторное поле $\mathbf{n}$, являющееся решением сформулированной задачи Коши, независимо от выбора начальной функции $\sigma_A(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in A$ будет расслоенным в некоторой области, примыкающей к поверхности $A$. Именно, справедливо следующее утверждение.

*Утверждение.* В некоторой области $D$, примыкающей к аналитической поверхности $A$, существует единственное аналитическое решение задачи Коши для уравнения

$$\operatorname{grad}\sigma+\operatorname{div}(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})=0,\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=1$$

с аналитическими начальными данными $\mathbf{n}=\mathbf{v}$, $\sigma=\sigma_A$ на поверхности $A$ ($\mathbf{v}$ — вектор единичной нормали к поверхности $A$), причем векторное поле $\mathbf{n}$ будет расслоенным в области $D$.

Докажем это утверждение. Параметризуем поверхность $A$ при помощи аналитических функций $x_i=\lambda_i(\xi^1, \xi^2)$ $(i=1, 2, 3)$. Один из миноров второго порядка матрицы $\|\partial\lambda_i/\partial\xi^\alpha\|$ $(i=1, 2, 3;\ \alpha=1, 2)$ отличен от нуля. Предположим, что

$$W=\det\|\partial\lambda_\alpha/\partial\xi^\beta\|\neq 0\quad (\alpha,\ \beta=1, 2) \tag{4.1}$$

На множестве расслоенных полей $\mathbf{n}$ уравнение (1.5) в специальных координатах $\xi^1$, $\xi^2$, $\xi^3$ эквивалентно уравнениям (3.3). Первые два уравнения системы (3.3) и начальные условия для функции $\sigma$ дают возможность найти компоненту $g_{33}$ на поверхности $A$ ($c$ — постоянная):

$$g_{33}|_A=c\exp[2\sigma_A(\xi^1, \xi^2)] \tag{4.2}$$

Пусть начальному слою $A$ векторного поля $\mathbf{n}$ соответствует значение $\xi^3=0$. Так как $g|_A=ag_{33}|_A$, где $a$ $(\xi^1, \xi^2)$ — детерминант первой квадратичной формы поверхности $A$, то, учитывая равенство (4.2), получим

$$g|_A=ca\exp[2\sigma_A(\xi^1, \xi^2)] \tag{4.3}$$

Координатная система $\xi^k$ такова, что $g$ разлагается в виде произведения (3.4). Сравнивая (3.4) и (4.3) при $\xi^3=0$, получим, что $G_2(\xi^1, \xi^2)=cG_1^{-1}(0)a\exp(2\sigma_A)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $G_1(\xi^3)=c_1^{-1}\exp(2\xi^3)$, так как любая замена $\xi^3=\xi^3(\xi'^3)$ не изменяет слоев поля $\mathbf{n}$. Таким образом, положив $cG_1^{-1}(0)=c_1$, имеем следующее равенство:

$$g=a(\xi^1, \xi^2)\exp[2\sigma_A(\xi^1, \xi^2)+2\xi^3] \tag{4.4}$$

Утверждение будет доказано, если доказать разрешимость следующей задачи Коши:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial f_1}{\partial\xi^1}\frac{\partial f_1}{\partial\xi^3}+\frac{\partial f_2}{\partial\xi^1}\frac{\partial f_2}{\partial\xi^3}+\frac{\partial f_3}{\partial\xi^1}\frac{\partial f_3}{\partial\xi^3}=0\\
\frac{\partial f_1}{\partial\xi^2}\frac{\partial f_1}{\partial\xi^3}+\frac{\partial f_2}{\partial\xi^2}\frac{\partial f_2}{\partial\xi^3}+\frac{\partial f_3}{\partial\xi^2}\frac{\partial f_3}{\partial\xi^3}=0\\
\frac{\partial f_k}{\partial\xi^3}\frac{\partial f_k}{\partial\xi^3}\left[\left(\frac{\partial f_p}{\partial\xi^1}\frac{\partial f_p}{\partial\xi^1}\right)\left(\frac{\partial f_r}{\partial\xi^2}\frac{\partial f_r}{\partial\xi^2}\right)-\left(\frac{\partial f_s}{\partial\xi^1}\frac{\partial f_s}{\partial\xi^2}\right)^2\right]=\\
=a(\xi^1,\xi^2)\exp[2\sigma_A(\xi^1,\xi^2)+2\xi^3]
\end{gathered} \tag{4.5}$$

с аналитическими начальными данными на плоскости $\xi^3=0$:

$$f_i(\xi^1, \xi^2, \xi^3)|_{\xi^3=0}=\lambda_i(\xi^1, \xi^2) \tag{4.6}$$

Тогда поверхности $\xi^3=\mathrm{const}$ криволинейной системы координат $x_i=f_i(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ можно будет принять в качестве слоев векторного поля $\mathbf{n}$, причем начальные условия на поверхности $A$ также будут удовлетворены как для $\mathbf{n}$, так и для $\sigma$.

Теорема Коши — Ковалевской [20] приводит к заключению о разрешимости задачи Коши (4.5), (4.6), если доказать, что система уравнений (4.5) нормальна по переменной $\xi^3$. Для этого разрешим систему относительно частных производных $\partial f_i/\partial\xi^3$. Введем следующие обозначения:

$$\Delta_1=\begin{Vmatrix}\partial f_2/\partial\xi^1 & \partial f_3/\partial\xi^1\\ \partial f_2/\partial\xi^2 & \partial f_3/\partial\xi^2\end{Vmatrix},\quad \Delta_2=\begin{Vmatrix}\partial f_3/\partial\xi^1 & \partial f_1/\partial\xi^1\\ \partial f_3/\partial\xi^2 & \partial f_1/\partial\xi^2\end{Vmatrix},\quad \Delta_3=\begin{Vmatrix}\partial f_1/\partial\xi^1 & \partial f_2/\partial\xi^1\\ \partial f_1/\partial\xi^2 & \partial f_2/\partial\xi^2\end{Vmatrix}$$

Кроме того, обозначим через $Z$ выражение, стоящее в квадратных скобках (4.5). После ряда алгебраических преобразований получим систему уравнений в частных производных (4.5) в нормальной по переменной $\xi^3$ форме

$$\partial f_i/\partial\xi^3=\pm a^{1/2}Z^{-1/2}\exp(\sigma_A+\xi^3)\Delta_i(\Delta_k\Delta_k)^{-1/2}\tag{4.7}$$

Знак в уравнениях (4.7) выберем так, чтобы при возрастании переменной $\xi^3$ от нуля в сторону положительных значений точка $x_i=f_i(\xi^1,\xi^2,\xi^3)$ физического пространства двигалась от поверхности $A$ внутрь тела $\Omega$.

На начальной плоскости $\xi^3=0$ имеем следующие равенства (см. (4.1), (4.3)): $\Delta_3|_{\xi^3=0}=W$, $Z|_{\xi^3=0}=a$. Так как для любой точки $(\xi^1,\xi^2)$ $aW\neq0$, то правые части системы (4.7) будут аналитическими функциями аргументов $\xi^1$, $\xi^2$, $\xi^3$, $\partial f_k/\partial\xi^\alpha$ $(k=1,2,3;\ \alpha=1,2)$ в окрестности любой точки

$$\xi^1=\xi^1_{(0)},\quad \xi^2=\xi^2_{(0)},\quad \xi^3=0,\quad \partial f_k/\partial\xi^\alpha=\partial\lambda_k/\partial\xi^\alpha\big|_{\xi^1=\xi^1_{(0)},\ \xi^2=\xi^2_{(0)}}$$

Из теоремы Коши — Ковалевской следует разрешимость задачи Коши (4.5), (4.6) и справедливость доказываемого утверждения.

Таким образом, для жесткопластического тела $\Omega$, имеющего плоскость симметрии П и подверженного действию симметричной поверхностной нагрузки, такой, что материал, расположенный в плоскости П, переходит в состояние пластического течения, расслоенное поле напряжений является статически допустимым в пластической зоне, примыкающей к плоскости П.

**5. Канонические координаты пространственной, плоской и осесимметричной задачи.** Существует связь между интегралами уравнений пластического равновесия (1.5) и каноническими отображениями пространственных областей. Отображение $y_i=y_i(x_1,x_2,x_3)$ называется каноническим в области $G$, если оно взаимнооднозначно, непрерывно дифференцируемо и объем любой области $B\subset G$ при отображении сохраняется. Аналогично определяется каноническое отображение в $n$-мерном пространстве. Канонические отображения четномерных пространств исследовались Пуанкаре в связи с проблемой интегрирования уравнений Гамильтона и теорией интегральных инвариантов [21]. Особые свойства плоских канонических отображений были отмечены в [22].

Расслоенное статистически допустимое поле напряжений в области $G$ порождает каноническое отображение

$$x_i=f_i(\omega^1,\omega^2,\omega^3)\tag{5.1}$$

некоторой области пространства, арифметизированного переменными $\omega^p$, на область пластического течения $G$. Заметим, что $\omega^p$ — специальные криволинейные координаты, определяемые ниже по векторному полю $\mathbf{n}$. Действительно, выделим слой $A$ векторного поля $\mathbf{n}$. Поскольку гауссову параметризацию поверхности $A$ можно выбирать в достаточной мере произвольно, то выберем ее таким образом, чтобы детерминант $a$ первой квадратичной формы поверхности $A$ принимал в точках поверхности заданные значения, равные $\exp(-2\sigma_A)$. Пусть $\omega^1$, $\omega^2$ — гауссовы параметры на поверхности $A$, удовлетворяющие указанному условию на детерминант $a$. После замены переменной $\omega^3=\exp(\xi^3)$ уравнения (4.5) приводятся к следующему виду:

$$\frac{\partial f_1}{\partial\omega^1}\frac{\partial f_1}{\partial\omega^3}+\frac{\partial f_2}{\partial\omega^1}\frac{\partial f_2}{\partial\omega^3}+\frac{\partial f_3}{\partial\omega^1}\frac{\partial f_3}{\partial\omega^3}=0\tag{5.2}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \omega^2}\frac{\partial f_1}{\partial \omega^3}+\frac{\partial f_2}{\partial \omega^2}\frac{\partial f_2}{\partial \omega^3}+\frac{\partial f_3}{\partial \omega^2}\frac{\partial f_3}{\partial \omega^3}=0$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial \omega^3}\frac{\partial f_k}{\partial \omega^3}\left[\left(\frac{\partial f_p}{\partial \omega^1}\frac{\partial f_p}{\partial \omega^1}\right)\left(\frac{\partial f_r}{\partial \omega^2}\frac{\partial f_r}{\partial \omega^2}\right)-\left(\frac{\partial f_s}{\partial \omega^1}\frac{\partial f_s}{\partial \omega^2}\right)^2\right]=1$$

Если через $J$ обозначить определитель Якоби отображения (5.1), то последнее уравнение в системе (5.2) эквивалентно уравнению $J^2=1$. Таким образом, отображение (5.1) является каноническим. Обратно, если отображение (5.1) удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (5.2), то поверхности $\omega^3=\mathrm{const}$ можно принять в качестве слоев поля $\mathbf{n}$ и затем с помощью интегралов (3.3) восстановить поле напряжений. Криволинейные координаты $\omega^1$, $\omega^2$, $\omega^3$ будем называть каноническими координатами пространственной задачи. В канонических координатах инварианты $I_1$ и $I_2$ совпадают. Следовательно, разность $\sigma-{}^1/_2 \ln g_{33}$ является интегралом уравнений равновесия.

В случае плоской задачи каноническое отображение (5.1) следует искать в форме

$$x_1=f_1(\omega^1, \omega^3),\ x_2=f_2(\omega^1, \omega^3),\ x_3=\omega^2$$

Система (5.2) сводится к следующей системе:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \omega^1}\frac{\partial f_1}{\partial \omega^3}+\frac{\partial f_2}{\partial \omega^1}\frac{\partial f_2}{\partial \omega^3}=0,\qquad \frac{\partial f_1}{\partial \omega^1}\frac{\partial f_2}{\partial \omega^3}-\frac{\partial f_2}{\partial \omega^1}\frac{\partial f_1}{\partial \omega^3}=\pm 1 \tag{5.3}$$

Введем производящую функцию $S(x_1, \omega^1)$ плоского канонического отображения [23]: $x_2=\partial S(x_1, \omega^1)/\partial x_1$, $\omega^3=-\partial S(x_1, \omega^1)/\partial \omega^1$.

Тогда первое уравнение системы (5.3) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 S}{\partial (\omega^1)^2}=\left[\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x_1\,\partial \omega^1}\right)^2-\frac{\partial^2 S}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 S}{\partial (\omega^1)^2}\right]\frac{\partial^2 S}{\partial x_1^2} \tag{5.4}$$

Нелинейное уравнение (5.4) инвариантно относительно преобразования Лежандра: вводя тангенциальные координаты $x_1^*=\partial S/\partial x_1$, $\omega^{1*}=\partial S/\partial \omega^1$, $S^*=x_1\partial S/\partial x_1+\omega^1\partial S/\partial \omega^1-S$, имеем

$$\frac{\partial^2 S^*}{\partial (\omega^{1*})^2}=\left[\left(\frac{\partial^2 S^*}{\partial x_1^*\,\partial \omega^{1*}}\right)^2-\frac{\partial^2 S^*}{\partial x_1^{*2}}\frac{\partial^2 S^*}{\partial (\omega^{1*})^2}\right]\frac{\partial^2 S^*}{\partial x_1^{*2}}$$

Относительно функции $U(x_1, \omega^1)=\partial S/\partial x_1$ уравнение (5.4) будет квазилинейным. После преобразования Лежандра $X=\partial U/\partial x_1$, $Y=\partial U/\partial \omega^1$, $Z=x_1\partial U/\partial x_1+\omega^1\partial U/\partial \omega^1-U$ и последующей замены переменных $u=\operatorname{arctg} X$, $v={}^1/_2\ln(1+X^2)-\ln Y$, $F=Z\cos u$ оно приводится к телеграфному уравнению

$$\partial^2 F/\partial u^2-\partial^2 F/\partial v^2+F=0$$

Другой метод линеаризации уравнений плоской задачи изложен, например, в [2].

В случае осесимметричной задачи каноническое отображение (5.1) можно представить в форме

$$x_1=f(\omega^1, \omega^3)\cos\omega^2,\ x_2=f(\omega^1, \omega^3)\sin\omega^2,\ x_3=h(\omega^1, \omega^3) \tag{5.5}$$

При этом система (5.2) преобразуется к виду

$$\begin{gathered}\frac{\partial f}{\partial \omega^1}\frac{\partial f}{\partial \omega^3}+\frac{\partial h}{\partial \omega^1}\frac{\partial h}{\partial \omega^3}=0\\ \left(\frac{\partial f}{\partial \omega^1}\frac{\partial h}{\partial \omega^3}-\frac{\partial f}{\partial \omega^3}\frac{\partial h}{\partial \omega^1}\right)f=\pm 1\end{gathered} \tag{5.6}$$

Сделаем замену $f^2=2H$, тогда второе уравнение системы (5.6) позволяет утверждать, что трехмерное каноническое отображение (5.5) порождает плоское каноническое отображение

$${}^1/_2 x_1^2=H(\omega^1, \omega^3),\ x_3=h(\omega^1, \omega^3) \tag{5.7}$$

Введем производящую функцию $\Omega(x_3, \omega^1)$ канонического отображения (5.7):

$$H=\partial\Omega(x_3, \omega^1)/\partial x_3, \quad \omega^3=\partial\Omega(x_3, \omega^1)/\partial\omega^1 \tag{5.8}$$

Равенства (5.8) соответствуют знаку плюс во втором уравнении (5.6). Первое уравнение системы (5.6) позволяет получить уравнение относительно производящей функции

$$2\frac{\partial\Omega}{\partial x_3}\frac{\partial^2\Omega}{\partial(\omega^1)^2}=\left[\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial x_3\,\partial\omega^1}\right)^2-\frac{\partial^2\Omega}{\partial x_3^2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial(\omega^1)^2}\right]\frac{\partial^2\Omega}{\partial x_3^2} \tag{5.9}$$

Уравнение (5.9) инвариантно относительно преобразования Ампера: вводя переменные по формулам $x_3^*=x_3$, $\omega^{1*}=-\partial\Omega/\partial\omega^1$, $\Omega^*=\Omega-\omega^1\partial\Omega/\partial\omega^1$, имеем

$$2\frac{\partial\Omega^*}{\partial x_3^*}\frac{\partial^2\Omega^*}{\partial(\omega^{1*})^2}=\left[\left(\frac{\partial^2\Omega^*}{\partial x_3^*\,\partial\omega^{1*}}\right)^2-\frac{\partial^2\Omega^*}{\partial x_3^{*2}}\frac{\partial^2\Omega^*}{\partial(\omega^{1*})^2}\right]\frac{\partial^2\Omega^*}{\partial x_3^{*2}}$$

В плоскости $x_1$, $x_3$ интегральные кривые поля $\mathbf{n}$ определяются уравнением $^1/_2x_1^2=\partial\Omega(x_3, \omega^1)/\partial x_3$ при фиксированном значении $\omega^1$. Кроме того, для канонических координат $\omega^p$: $g\equiv1$, следовательно, согласно (3.3) $2\sigma=\ln g_{33}+c$ и вводя в это выражение производящую функцию, получим

$$2\sigma=\ln\left\{\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial x_3^2}\right)^2\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x_3}\right)^{-1}\right]\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial x_3\,\partial\omega^1}\right)^{-2}\right\}+c$$

Поэтому $\sigma$ и $\mathbf{n}$ — определяются только по производной $\partial\Omega/\partial x_3$. Для функции $u=(2\partial\Omega/\partial x_3)^{1/2}$ имеем уравнение второго порядка, являющееся следствием (5.9),

$$q^2\frac{p^2-1}{p^2+1}r-2pqs+(p^2+1)t+\frac{u}{q^2}=0 \tag{5.10}$$

где использованы обозначения: $p=\partial u/\partial x_3$, $q=\partial u/\partial\omega^1$, $r=\partial^2u/\partial x_3^2$, $s=\partial^2u/(\partial x_3\partial\omega^1)$, $t=\partial^2u/\partial(\omega^1)^2$. Дискриминант уравнения (5.10) равен единице, поэтому уравнение принадлежит к гиперболическому типу. Уравнения характеристик имеют следующий вид [24]:

$$\begin{gathered} q(p-1)\,d\omega^1+(p^2+1)\,dx_3=0,\ du-p\,dx_3-q\,d\omega^1=0\\ q(p^2-1)(p^2+1)^{-1}dp-(p-1)\,dq+qu^{-1}dx_3=0 \end{gathered} \tag{5.11}$$

$$\begin{gathered} q(p+1)\,d\omega^1+(p^2+1)\,dx_3=0,\ du-p\,dx_3-q\,d\omega^1=0\\ q(p^2-1)(p^2+1)^{-1}dp-(p+1)\,dq+qu^{-1}dx_3=0 \end{gathered} \tag{5.12}$$

Если ввести обозначения

$$\Xi={}^1/_2\ln(1+p^2)-\ln|q|+\operatorname{arctg}p$$
$$\Theta={}^1/_2\ln(1+p^2)-\ln|q|-\operatorname{arctg}p,\quad \Psi=\ln u$$

то соотношения вдоль характеристик (третьи уравнения систем (5.11), (5.12)) можно представить в форме

$$d(\Xi-\Psi)+\operatorname{tg}[(\Xi-\Theta)/2]\,d\Xi=0 \tag{5.13}$$
$$d(\Theta-\Psi)-\operatorname{tg}[(\Xi-\Theta)/2]\,d\Theta=0 \tag{5.14}$$

Эти уравнения симметричны относительно переменных $\Xi$ и $\Theta$: уравнение (5.14) получается из уравнения (5.13) заменой $\Xi$ на $\Theta$ и соответственно $\Theta$ на $\Xi$.

Следует отметить также, что симметрия соотношений вдоль характеристик достигается вследствие перехода от физической плоскости $\varphi=0$ к плоскости переменных $x_3$, $\omega^1$ (соотношения (5.13), (5.14) справедливы вдоль характеристических линий, расположеных в плоскости $x_3$, $\omega^1$).

Таким образом, установлена связь между пространственной задачей теории пластичности и каноническими отображениями, найдены инварианты пространственной задачи, а также преобразования (преобразования Лежандра и Ампера), характеризующие инвариантные свойства производящих функций в случае трансляционной и осевой симметрии.

Автор благодарит А. Ю. Ишлинского и Г. И. Быковцева за внимание и поддержку работы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Леви М.* К вопросу об общих уравнениях внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости // Сб. ст.: Теория пластичности. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры. 1948. С. 20–23.
2. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
3. *Прагер В., Ходж Ф.* Теория идеально пластических тел. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1956. 398 с.
4. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
5. *Генки Г.* О некоторых статически определимых случаях равновесия в пластических телах // Сб. ст.: Теория пластичности. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры. 1948. С. 80–101.
6. *Хаар А., Карман Т.* К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах // Сб. ст.: Теория пластичности. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры. 1948. С. 41–56.
7. *Ишлинский А. Ю.* Пространственное деформирование не вполне упругих и вязкопластических тел // Изв. АН СССР. ОТН. 1945. № 3. С. 250–260.
8. *Ишлинский А. Ю.* Осесимметрическая задача пластичности и проба Бринелля // Прикл. матем. и механика. 1944. Т. 8. Вып. 3. С. 201–224.
9. *Thomas T. Y.* On the characteristic surfaces of the von Mises plasticity equations // J. Rat. Mech. Anal. 1952. V. 1. No 3. P. 343–357.
10. *Thomas T. Y.* Singular surfaces and flow lines in the theory of plasticity // J. Rat. Mech. Anal. 1953. V. 2. No 2. P. 339–381.
11. *Craggs J. W.* Characteristic surfaces in ideal plasticity in three dimensions // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1954. V. 7. No. 1. P. 35–51.
12. *Ericksen J. L.* Singular surfaces in plasticity // J. Math. Physics. 1955. V. 34. No 1. P. 74–79.
13. *Ивлев Д. Д.* Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статики сыпучих сред // Прикл. матем. и механика. 1958. Т. 22. Вып. 1. С. 90–96.
14. *Койтер В. Т.* Общие теоремы теории упругопластических сред. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961. 78 с.
15. *Сокольников И. С.* Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 374 с.
16. *Jenne W.* Räumliche Spannungsverteilungen in festen Körpern bei plastischer Deformation // ZAMM. 1928. Bd. 8. H. 1. S. 18–44.
17. *Schield R. T.* On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry // Proc. Roy. Soc. Lond. 1955. V. A233. No. 1193. P. 267–287.
18. *Lippman H.* Principal line theory of axially-symmetric plastic deformation // J. Mech. and Phys. Solids. 1962. V. 10. No. 2. P. 111–122.
19. *Lippman H.* Statics and dynamics of axially-symmetric plastic flow // J. Mech. and Phys. Solids. 1965. V. 13. No. 1. P. 29–39.
20. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. 352 с.
21. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. Т. 3 // В кн.: Пуанкаре А. Избранные труды. Т. 2. М.: Наука, 1972. С. 9–445.
22. *Пуанкаре А.* Об одной геометрической теореме // В кн.: Пуанкаре А. Избранные труды. Т. 2. М.: Наука, 1972. С. 775–807.
23. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 431 с.
24. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.


Москва

Поступила в редакцию 5.11.1988