

УДК 539.3

© 1990 г.

О. Д. ПРЯХИНА, О. М. ТУЖОДОВА

ОБ ОДНОЙ ПЛОСКОЙ СМЕШАННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ

Рассматривается плоская динамическая контактная задача об установившихся колебаниях электрода, как простейшего преобразователя упругих волн, на поверхности полуограниченного электроупругого слоя. Электрод моделируется абсолютно жестким полосовым штампом. Предполагается, что слой жестко сцеплен с недеформируемым основанием. В области контакта электрода со средой заданы вектор смещений и электрический потенциал, вне этой области поверхность свободна от механических и электрических нагрузок.

Разработан численный метод построения матрицы-символа системы интегральных уравнений, к решению которой сводится указанная задача, и дисперсионных кривых. Построены эффективные приближенные решения, описывающие поведение контактных напряжений и электрической индукции в области контакта и электроупругого волнового поля вне этой области для случая контакта без трения.

1. Основные уравнения, построение интегрального представления решений. Пусть электроупругий слой занимает область $0 \leq z \leq h$, $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$. В качестве электроупругого материала рассмотрим XZ — срезы пьезокристаллов класса $6mm$ гексагональной сингонии и пьезокерамику, поляризованную по оси z . Движение происходит в плоскости xoz . Электроупругие гармонические колебания слоя описываются следующими уравнениями в квазистатическом приближении [1] (в безразмерных параметрах, общий для всех характеристик множитель $\exp(i\omega t)$ всюду опущен):

$$P_1 u + \Omega^2 P_2 u = 0, \quad P_1 = P_{11} \partial_1^2 + P_{33} \partial_3^2 + P_{13} \partial_1 \partial_3 \quad (1.1)$$

$$P_{11} = \begin{vmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & e_{15} \\ 0 & e_{15} & -\varepsilon_{11} \end{vmatrix}, \quad P_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{33} & e_{33} \\ 0 & e_{33} & -\varepsilon_{33} \end{vmatrix} \quad (1.2)$$

$$P_{13} = \begin{vmatrix} 0 & p & r \\ p & 0 & 0 \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad P_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$p = 1 + c_{13}, \quad r = e_{31} + e_{15}$$

Символы ∂_1 , ∂_3 означают дифференцирование по $x_1 = x/h$, $x_3 = z/h$ соответственно, x , y , z — декартова система координат ($y = x_2 h$).

Вектор-функция $\mathbf{u}(x_1, x_2) = \{u, w, \psi\}$ имеет своими компонентами u , w — амплитуды горизонтального и вертикального смещения точек среды, ψ — амплитуда потенциала электрического поля; $\Omega^2 = \rho \omega^2 h^2 / c_{44}^E$, ω — круговая частота колебаний, ρ — плотность материала, h — толщина слоя; c_{ij} , ε_{ij} , e_{ij} — соответственно безразмерные упругие, пьезоэлектрические и диэлектрические постоянные: $c_{ij} = c_{ij}^E / c_{44}^E$, $e_{ij} = e_{ij} / c_{44}^E$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^S l^2 / c_{44}^E$, l — нормировочный множитель, имеющий размерность электрического поля E .

Вначале рассматривается вспомогательная задача с однородными граничными условиями: на поверхности среды ($x_3 = 1$) заданы нагрузки и электрический заряд $\sigma_3 = q(x_1)$, $\tau_{13} = \tau(x_1)$, $D_3 = d(x_1)$. Эти условия можно записать в виде

$$x_3 = 1, \quad N\mathbf{u} = \mathbf{g}(x_1) \quad (1.3)$$

$$N = \partial_1 N_{11} + \partial_3 N_{33}, \quad \mathbf{g} = \{\tau, q, d\}$$

$$N_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & e_{15} \\ c_{13} & 0 & 0 \\ e_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad N_{33} \equiv P_{33}$$

На нижней грани слоя ($x_3=0$) амплитуды упругих смещений и электрический потенциал обращаются в нуль (I — единичная матрица):

$$x_3=0, Iu=0 \quad (1.4)$$

Применяя преобразование Фурье по x_1 к системе (1.1) и граничным условиям (1.3) — (1.4), получим (Матрицы P_2, P_3 имеют вид (1.2)):

$$P_0U + \Omega^2 P_2U = 0 \quad (1.5)$$

$$P_0 = -\alpha^2 P_{11} + P_{33} \partial_3^2 - i\alpha P_{13} \partial_3$$

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} u \exp(i\alpha x_1) dx_1, \quad U = \{U, W, \Psi\}$$

Граничные условия

$$x_3=1, N_0U = G(\alpha), N_0 = -i\alpha N_{11} + \partial_3 N_{33} \quad (1.6)$$

$$G(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1) \exp(i\alpha x_1) dx_1, \quad G = \{T, Q, D\}$$

$$x_3=0, IU=0 \quad (1.7)$$

Здесь U, W, Ψ, T, Q, D — Фурье-трансформанты функций u, w, ψ, τ, q, d соответственно.

После замены переменных $y_1=U, y_2=y_1', y_3=W, y_4=y_3', y_5=\Psi, y_6=y_5'$ краевая задача для системы трех дифференциальных уравнений (1.5) — (1.7) с параметром сводится к краевой задаче для шести обыкновенных дифференциальных уравнений, которую можно записать в матричной форме [2]:

$$y' = Ay, By(0) + Hy(1) = z \quad (1.8)$$

$$y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}, z = \{0, 0, 0, T, Q, D\}$$

Ненулевые элементы матриц A, B, H (размерности 6×6) равны:

$$B_{11} = B_{23} = B_{35} = 1, H_{12} = 1, H_{43} = -i\alpha, H_{45} = -i\alpha e_{15}$$

$$H_{51} = -i\alpha c_{13}, H_{54} = c_{33}, H_{56} = e_{33}, H_{61} = -i\alpha e_{31}, H_{64} = e_{33}$$

$$H_{66} = -e_{33}, A_{12} = A_{34} = A_{56} = 1, A_{21} = c_{11}\alpha^2 - \Omega^2$$

$$A_{24} = i\alpha p, A_{26} = i\alpha r, A_{42} = i\alpha s^{-1}(p e_{33} + e_{33}r)$$

$$A_{43} = s^{-1}[\alpha^2(e_{33} + e_{33}e_{15}) - e_{33}\Omega^2], A_{45} = s^{-1}\alpha^2(e_{15}e_{33} - e_{33}e_{11})$$

$$A_{62} = -i\alpha s^{-1}(p e_{33} - c_{33}r), A_{63} = s^{-1}[\alpha^2(e_{33} - c_{33}e_{15}) - e_{33}\Omega^2]$$

$$A_{65} = s^{-1}\alpha^2(e_{15}e_{33} + c_{33}e_{11}), s = c_{33}e_{33} + e_{33}^2$$

Для численного интегрирования системы (1.8) применим матричный метод [2]. На поверхности среды $x_3=1$ решение ищем в виде

$$y(1) = \exp(A)y(0) \quad (1.9)$$

Матричная функция $\exp(A)$ строится численно по схеме, изложенной в [2].

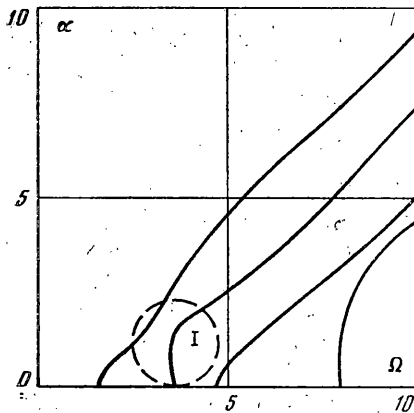
Подставляя (1.9) в граничное условие (1.8), находим $y(0) = R_0^{-1}z, R_0 = B + H \exp(A)$ и соответственно $y(1) = Rz, R = \exp(A)R_0^{-1} = \Delta^{-1} \|R_{ij}\|, \Delta = \det \|R_{0j}\|$ ($i, j=1, \dots, 6$).

Решение же задачи (1.1), (1.3) — (1.4) в преобразованиях Фурье примет вид

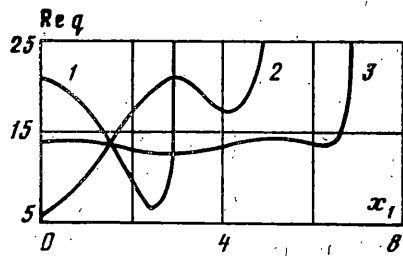
$$U(\alpha) = K(\alpha, \Omega)G(\alpha), K = \|K_{ij}\| \quad (i, j=1, \dots, 6) \quad (1.10)$$

$$K(\alpha, \Omega) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} R_{14} & R_{15} & R_{16} \\ -R_{15} & R_{35} & R_{36} \\ -R_{16} & R_{36} & R_{56} \end{vmatrix}$$

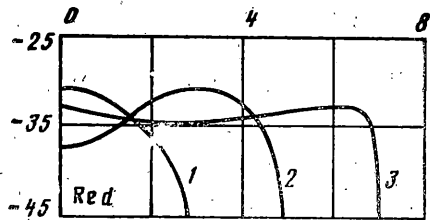
С помощью программы, позволяющей численно определять значения K_{ij} для любых фиксированных параметров α, Ω , установлено: $K_{12} = R_{15} = -i\alpha E, K_{13} = R_{16} = i\alpha F$. Функции E, F , а также остальные элементы K_{ij}



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

представляют собой аналитические функции, за исключением одних и тех же для всех функций полюсов, действительные на вещественной оси α , четные по α , и имеют следующее асимптотическое поведение на бесконечности ($|\alpha| \rightarrow \infty$):

$$K(\alpha, \Omega)|_{|\alpha| \rightarrow \infty} \sim \begin{vmatrix} a_{11}/|\alpha| & ia_{12}/\alpha & ia_{13}/\alpha \\ -ia_{12}/\alpha & a_{22}/|\alpha| & a_{23}/\alpha \\ -ia_{13}/\alpha & a_{23}/\alpha & a_{33}/\alpha \end{vmatrix} \quad (1.11)$$

Применив обратное преобразование Фурье к решению (1.10), получаем интегральное представление решения, описывающее поведение электроупругого волнового поля, возникающего на поверхности среды

$$u(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x_1 - \xi) g(\xi) d\xi \quad (1.12)$$

$$k(x_1) = \int K(\alpha, \Omega) \exp(-i\alpha x_1) d\alpha \quad (1.13)$$

Исследование систем интегральных уравнений, подобных (1.12), проводилось в [3].

На вещественной оси элементы $K_{ij}(\alpha, \Omega)$ имеют одни и те же для всех функций полюсы $\alpha = \alpha(\Omega)$, соответствующие значению волнового числа поверхностной волны, распространяющейся на поверхности пьезоэлектрика. Эти полюсы и определяют дисперсионные кривые задачи, которые позволяют на любой частоте указать количество и фазовые скорости возникающих поверхностных волн.

Основное дисперсионное уравнение имеет вид $\Delta(\alpha, \Omega) = 0$.

Наличие у функций K_{ij} вещественных полюсов обусловлено появлением в соответствующих областях электроупругих волн, которые при отсутствии источников на бесконечность должны иметь определенную направленность, диктующую выбор контура σ в представлении (1.13).

На фиг. 1 приведены дисперсионные кривые (кривые полюсов) функций $K_{ij}(\alpha, \Omega)$ для пьезокерамики ЦТС-19 ($c_{11} = 11,2 \cdot 10^{10}$ Н/м, $c_{12} = 6,42 \cdot 10^{10}$ Н/м, $c_{13} = 6,22 \cdot 10^{10}$ Н/м, $c_{33} = 10,6 \cdot 10^{10}$ Н/м, $c_{44} = 2,49 \cdot 10^{10}$ Н/м, $e_{15} = 9,45$ К/м², $e_{31} = -3,4$ К/м², $e_{33} = 15,1$ К/м², $\epsilon_{11}^s = 725,7 \cdot 10^{-11}$ Ф/м, $\epsilon_{33}^s = 827,5 \cdot 10^{-11}$ Ф/м, $\rho = 7500$ кг/м³ [1]). Анализ показал, что при $\Omega < \pi/2$ волны не возникают.

Вид дисперсионных кривых обуславливает выбор контура σ . Если кривые подходят к оси абсцисс с положительной производной (фиг. 1), то все волны удаляются на бесконечность, а контур σ должен огибать положительные полюсы снизу, а отрицательные — сверху. Если кривая полюсов имеет отрицательную производную, (участок I на фиг. 1), то дает волну, приходящую из бесконечности (с отрицательной фазовой скоростью), а контур σ должен огибать полюсы противоположным указанному выше образом [3].

2. Решение поставленной задачи. Представление (1.12) дает интегральное уравнение исходной динамической смешанной задачи, когда на границе заданы следующие граничные условия ($a=b/h$, b — полуширина электрода):

$$\begin{aligned} x_3=1: \mathbf{u}(x_1) &= \mathbf{f}(x_1), |x_1| \leq a \\ \mathbf{g}(x_1) &= 0, |x_1| > a \\ x_3=0: \mathbf{u}(x_1) &= 0, |x_1| < \infty \end{aligned}$$

Имеем интегральное уравнение Фредгольма первого рода относительно неизвестного вектора $\mathbf{g}(x_1)$ в области контакта $|x_1| \leq a$, ядро которого дается формулой (1.13):

$$\int_{-a}^a k(x_1 - \xi) \mathbf{g}(\xi) d\xi = \mathbf{f}(x_1) \quad (|x_1| \leq a) \quad (2.1)$$

Система интегральных уравнений (2.1) при указанных свойствах ядер однозначно разрешима в $L_\alpha(-a, a)$, $\alpha > 1$. Теоремы единственности доказываются по аналогии с [3].

Решение указанной системы с символом ядра $K(\alpha, \Omega)$, имеющим представление на бесконечности вида (1.11), строится методом фиктивного поглощения¹ для случая, когда контакт осуществляется без трения ($\tau(x_1) \equiv 0$, $-\infty < x_1 < \infty$). При этом в качестве функций $\mathbf{f}(x_1) = \{w, \psi\}$ выбран вектор $\mathbf{A} \exp(-i\eta x_1)$, (η , $A_i = \text{const}$, $i=1, 2$). Для штампа с плоской подошвой $\eta=0$, для наклонного штампа решение следует продифференцировать по η . Для произвольной вектор-функции $\mathbf{f}(x_1)$ следует разложить ее в ряд Фурье, и полученное решение проинтегрировать по параметру η .

Приведем окончательный вид решения, описывающий распределение контактных давлений $q(x_1)$ и электрической индукции $d(x_1)$ ($\mathbf{g}(x_1) = \{q, d\}$):

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(x_1) &= K^{-1}(\eta) \mathbf{A} \exp(-i\eta x_1) \{ \text{erf}[(B+i\eta)(a-x_1)]^{1/2} + \text{erf}[(B-i\eta)(a+x_1)]^{1/2} - \\ &- 1 \} + \left\{ \left[\frac{B-i\eta}{\pi(a-x_1)} \right]^{1/2} \exp(-B(a-x_1)) \exp(-i\eta a) + \left[\frac{B+i\eta}{\pi(a+x_1)} \right]^{1/2} \times \right. \\ &\times \exp(-B(a+x_1)) \exp(i\eta a) \left. \right\} S_0^{-1} \mathbf{A} + \sum_{j=1}^n \frac{B_j}{2\xi_j} [\exp(-i\eta a) (B-i\eta)^{1/2} \phi_j(\eta, a) + \\ &+ \exp(i\eta a) (B+i\eta)^{1/2} \phi_j(-\eta, -a)] S_0^{-1} \mathbf{A} - i \sum_{h=1}^{2n} \left\{ \frac{\exp(-B(a-x_1))}{[\pi(a-x_1)]^{1/2}} \times \right. \\ &\times \sum_{j=1}^n A_j \frac{\exp(ip_j(a-x_h))}{2p_j(B-ip_j)^{1/2}} + \frac{\exp(-B(a+x_1))}{[\pi(a+x_1)]^{1/2}} \sum_{j=1}^n A_j \frac{\exp(ip_j(a+x_h))}{2p_j(B-ip_j)^{1/2}} + \\ &+ \sum_{j=1}^n \frac{B_j}{2\xi_j} \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{2p_i} (B-ip_i)^{-1/2} [\exp(ip_i(a-x_h)) \phi_j(-p_i, x_1) + \\ &\left. + \exp(ip_i(a+x_h)) \phi_j(-p_i, -x_1) \right] \left. \right\} \mathbf{c}_k \quad (2.2) \end{aligned}$$

Здесь S_0^{-1} — матрица, обратная

$$S_0 = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad a_i = \text{const}$$

¹ См.: Прыгина О. Д., Тукодова О. М. Метод фиктивного поглощения в плоских динамических контактных задачах теории электроупругости. М., 1986. 25 с. — Деп. в ВИНТИ 21.08.86, № 6217.

$$\Phi_j(\eta, x) = (B + i\zeta_j)^{1/2} (\zeta_j - \eta)^{-1} \exp(i\zeta_j(a-x)) \operatorname{erf}([(B + i\zeta_j)(a-x)]^{1/2}) + \\ + (B - i\zeta_j)^{1/2} (-\zeta_j - \eta)^{-1} \exp(-i\zeta_j(a-x)) [1 - \exp([(B - i\zeta_j)(a-x)]^{1/2})]$$

$$A_i = \|\alpha_{mn}^i\|_1^2, \quad B_j = \|\beta_{mn}^j\|_1^2$$

$$\alpha_{mm}^i = \prod_{k=1}^n (p_i^2 - z_{mk}^2) P^i, \quad P^i = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (p_i^2 - p_k^2)^{-1} \quad (m=1, 2)$$

$$\alpha_{ml}^i = \prod_{k=1}^{n-1} (p_i^2 - z_{mlk}^2) P^i \quad (m \neq l)$$

$$\beta_{mm}^i = \prod_{k=1}^n (\zeta_i^2 - \gamma_{mk}^2) P_1^i, \quad P_1^i = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (\zeta_i^2 - \zeta_k^2)^{-1} \quad (m=1, 2)$$

$$\beta_{ml}^i = \prod_{k=1}^{n-1} (\zeta_i^2 - \gamma_{mlk}^2) P_1^i \quad (m \neq l)$$

p_k, z_{mk} — вещественные и комплексные полюсы и нули матрицы $H(\alpha)$, а ζ_k, γ_{mk} — обратной матрицы $H^{-1}(\alpha)$, расположенные выше контура σ ; $H(\alpha) = (\alpha^2 + B^2)^{1/2} S_0^{-1} K(\alpha)$; B — параметр аппроксимации. В соответствии с требованиями метода фиктивного поглощения $B \gg 1$; $y_k = \pm x_k$ — точки, делящие интервал $(-a, a)$ на равные отрезки.

Неизвестные $c_k = \{c_{1k}, c_{2k}\}$ определяются из линейной алгебраической системы [4]:

$$\sum_{k=1}^{2n} [(B + i\alpha)^{1/2} \exp(i\alpha x_k) F(\alpha, x_k) + (B - i\alpha)^{1/2} \exp(-i\alpha x_k) F(-\alpha, -x_k)] c_k = \\ = S_0^{-1} A [T(\alpha, \eta) + T(-\alpha, -\eta)], \quad \alpha = \pm \zeta_l \quad (l=1, \dots, n) \quad (2.3)$$

$$T(\alpha, \eta) = \frac{\exp(i(\alpha - \eta)a)}{i(\alpha - \eta)} [(B - i\eta)^{1/2} (B + i\alpha)^{1/2} \operatorname{erf}([2a(B + i\alpha)]^{1/2}) + \\ + (B^2 + \eta^2)^{1/2} (\operatorname{erf}([2a(B - i\eta)]^{1/2}) - 1)] \\ F(\alpha, x_k) = \sum_{j=1}^n A_j \frac{\exp(ip_j(a - x_k))}{(p_j + \alpha) 2p_j (B - ip_j)^{1/2}}$$

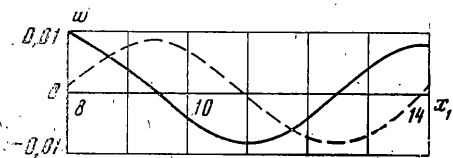
3. Анализ решения. Формулы (1.12), (1.13) для определения амплитуд электроупругих смещений вне области контакта ($|x_1| > a$) можно переписать в виде

$$\mathbf{u}(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} K(\alpha, \Omega) \mathbf{G}(\alpha) \exp(-i\alpha x_1) d\alpha \quad (3.1)$$

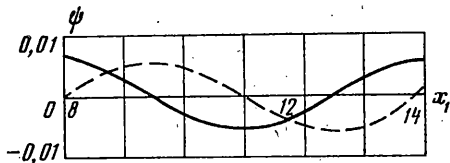
$$\mathbf{G}(\alpha) = \int_{-a}^a \mathbf{g}(x_1) \exp(i\alpha x_1) dx_1 \quad (|x_1| > a)$$

где $\mathbf{g}(x_1)$ — уже известные функции, определяемые формулами (2.2). Так как контакт электрода со средой осуществляется без трения, то $\mathbf{u}(x_1) = \{u, \psi\}$, $\mathbf{g}(x_1) = \{q, d\}$.

Интегралы (3.1) можно вычислить двумя способами: с помощью непосредственного интегрирования по прямоугольному контуру σ [4] в области комплексного переменного α и, используя метод фиктивного поглощения [5].



Фиг. 4



Фиг. 5

Напомним, что согласно методу фиктивного поглощения, решение контактной задачи (2.2) в преобразованиях Фурье имеет вид [5]:

$$G(\alpha) = G_0(\alpha) + \sum_{k=1}^{2n} c_k \exp(i\alpha x_k) \quad (3.2)$$

причем $G_0(\pm p_k) = 0$ ($k=1, \dots, n$). Вектор c_k определяется из системы (2.3).

После подстановки (3.2) в (3.1), с помощью теории вычетов несложно получить приближенные формулы для определения амплитуд вертикальных смещений и потенциала электрического поля в дальней зоне:

$$u(x_1) = -i \sum_{k=1}^n \text{Res } K(p_k, \Omega) c_k \cos(ip_k |x_1 - x_k|) \quad (|x_1| > a) \quad (3.3)$$

Численные расчеты проводились для пьезокерамики ЦТС-19, ЦТС-4, пьезокристаллов ZnO, CdS.

На фиг. 2, 3 представлены графики распределения нормальных давлений $\text{Re } q(x_1)$ и электрической индукции $\text{Re } d(x_1)$, рассчитанные по формулам (2.2), в зависимости от размеров электрода $a=3, 5, 7$ (кривые 1, 2, 3 соответственно), ($A_1=A_2=1$; $\eta=0$; $\Omega=2,6$) для пьезокерамики ЦТС-19. На этой частоте имеем всего одну поверхностную волну, определяемую полюсом $p_1=1,07$, распространяющуюся со скоростью $V=\Omega/p_1$. Очевидно, что с увеличением размеров электрода осцилляция напряжений и электрического смещения увеличивается, а амплитуда падает.

По формулам (3.1), (3.3) был произведен расчет электроупругого волнового поля для различных соотношений геометрических и электроупругих характеристик задачи. Фиг. 4, 5 иллюстрируют поведение амплитудных функций $w(x_1)$ и $\psi(x_1)$ при $x_3=-1$, $\Omega=2,6$, $a=5$ ($A_1=A_2=1$, $\eta=0$) для ZnO. Сплошными линиями нанесены $\text{Re } w$ и $\text{Re } \psi$, пунктирными — $\text{Im } w$ и $\text{Im } \psi$. Расчеты в дальней зоне показали хорошее совпадение амплитуд электроупругого волнового поля, полученных интегрированием по формулам (3.1) и по приближенным формулам (3.3). Поэтому в целях экономии машинного времени в дальней зоне удобнее пользоваться асимптотическими формулами. Анализ показал, что если в области контакта электрода со слоем заданы только электрические граничные условия ($A_1=0$, $A_2=1$), то амплитуда упругого смещения уменьшается, например, для рассматриваемого пьезокристалла ZnO — 10^5 раз.

Заметим, что в области контакта электрода со средой значения амплитуд $w(x_1)$ и $\psi(x_1)$, рассчитанные по формулам (3.1) непосредственным интегрированием по прямоугольному контуру σ , близки к единице, т. е. к заданным амплитудам вертикального смещения и потенциала.

Авторы благодарят И. И. Воровича за обсуждение работы и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фильтры на поверхностных акустических волнах/Под ред. Мэттьюза Г. М.: Радио и связь, 1981. 472 с.
2. Васвалов Н. С. Численные методы. М.: Наука, 1973, Т. 1, С. 510–511.
3. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979, 319 с.
4. Глушкова Н. В., Калинин В. В., Селезнев М. Г., Смирнова А. В., Чичилин И. С., Шамовская Л. Я. Методика и результаты расчетов волнового поля вблизи вибраторного источника, распределенного на поверхности однородного полупространства. В кн.: Вопросы возбуждения сейсмических волн вибрационным источником. Новосибирск: Ин-т геологии и геофизики СО АН СССР, 1976. С. 41–52.
5. Бабешко В. А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.