МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1990

УДК 539.3

С. З. БРУК

ТРЕХМЕРНАЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ЛЭМБА ДЛЯ НАСЛЕДСТВЕННО УПРУГОЙ СРЕДЫ

Рассматривается трехмерная задача Лэмба для наследственно упругого анизотропного полупространства. Методом перевала и стационарной фазы получены асимптотические формулы волновых составляющих решения: продольных и сдвиговых волн, головных волн и волн Рэлея. Важной особенностью этих формул является то, что они удобны для априорного исследования геометрических и физических свойств указанных волн и для численных расчетов различных волновых характеристик.

1. Математическая формулировка задачи. Решение в квадратурах. Исследование волновых составляющих решений задачи Лэмба было начато в [1]. Затем в различных постановках задача Лэмба изучалась многими авторами. Из наиболее поздних работ отметим [2, 3]. Линейная задача Лэмба в наследственно упругой однородной анизотропной среде ставится так («звездочка» означает свертку по t):

$$\sum_{jkl} A_{sj}^{kl}(t)*\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k\,\partial x_l}-c_0^2\frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2}=0\quad (x_3>0) \tag{1.1}$$

$$\sum_{jl} A_{sj}^{3l}(t)*\frac{\partial u_j}{\partial x_l}=-h_s\delta(t)\,\delta(x_1)\,\delta(x_2)\qquad (x_3=+0) \tag{1.2}$$

$$u_s=0\ \ (t<0),\ u_s=0\ \ (x_3=+\infty) \tag{1.3}$$

$$u_s=u_s(t,x),\ x=(x_1,x_2,x_3)$$

$$A_{sj}^{kl}(t)=0\ \ (t<0) \tag{1.4}$$

где $s, j, k, l=1, 2, 3$; $\delta(z)$ – функция Дирака, c_0, $h_s=\mathrm{const}$, $A_{sj}^{kl}(t)$, c_0, h_s – вещественные функции и постоянные.

В качестве параметров двойственных t, x_1, x_2 относительно преобразования Фурье примем: γ, $-\gamma a_1$, $-\gamma a_2$. Преобразование Фурье $B_{sj}^{kl}[(i\gamma)^{-1}]$ функции $A_{sj}^{kl}(t)$ предполагается ограниченным при $\gamma\in R^1=[-\infty\leqslant\gamma\leqslant+\infty]$, причем $B_{sj}^{kl}(\infty)=0$, $B_{sj}^{kl}[(i\gamma)^{-1}]=O(\gamma)$ $(\gamma\to0)$.

Условимся, что a_1, a_2 принадлежат комплексному полупространству

$$\mathrm{Im}[\gamma(a_1x_1+a_2x_2)]\geqslant0 \tag{1.5}$$

Пусть характеристическое уравнение системы (1.1):

$$\det\left\|\sum_{kl} B_{sj}^{kl}[(i\gamma)^{-1}]a_ka_l-\delta_{sj}c_0^2\right\|_{sj}=0 \tag{1.6}$$

имеет шесть a_3-корней β^k (зависящих от c_0, a_1, a_2, $(i\gamma)^{-1}$), причем

$$\mathrm{Im}[\gamma\beta^k(c_0,a_1,a_2)]\begin{cases}\geqslant0 & (k\leqslant3)\\ \leqslant0 & (k>3)\end{cases} \tag{1.7}$$

Здесь и далее зависимость от $(i\gamma)^{-1}$ подразумевается неявно.

Из (1.6) следует, что при конечных a_1, a_2:

$$\beta^k(c_0,a_1,a_2)\neq\infty \tag{1.8}$$

Проведем в комплексных плоскостях a_ν разрезы E_ν вдоль узких полосок, покрывающих линии уровня $i\gamma\beta^k$ (O_1, O_2 — произвольные величины):

$$(E_1)\,\mathrm{Re}[i\gamma\beta^k(c_0, a_1, a_2)]=0 \quad (a_2=O_2)$$
$$(E_2)\,\mathrm{Re}[i\gamma\beta^k(c_0, a_1, a_2)]=0 \quad (a_1=O_1) \tag{1.9}$$

Тогда (1.7) заменится строгим неравенством:

$$\mathrm{Im}[\gamma\beta^k(c_0, a_1, a_2)]\begin{cases} >0 & (k\leqslant 3) \\ <0 & (k>3)\end{cases} \tag{1.10}$$

Пусть $z_j^k(c_0, a_1, a_2, x_3)=Y_j^k(c_0, a_1, a_2, x_3)\exp[i\gamma\beta^k(c_0, a_1, a_2)x_3]$ — фундаментальное решение одномерного дифференциального уравнения, соответствующего (1.1):

$$\Delta(c_0, a_1, a_2)=\det\left\|\sum_{jl} B_{sj}^{3l}[(i\gamma)^{-1}](-ia_l)Y_j^k(c_0, a_1, a_2, 0)\right\|_{sk} \quad (jl=1, 2, 3) \tag{1.11}$$

— определитель системы алгебраических уравнений, соответствующей задаче (1.1)—(1.4), и

$$v_j(c_0, a_1, a_2, x_3)=\sum_{kl}(i\gamma)\Delta^{-1}\Delta_{kl}h_lY_j^k\exp[i\gamma\beta^k(c_0, a_1, a_2)x_3]$$

решение одномерной задачи, соответствующей (1.1)—(1.4) (в (1.11) символ $-ia_3$ обозначает d/dx_3).

Обращением преобразования Фурье функции $-i\gamma v_j$ получим решение $\partial u_j/\partial t$ (в производных по t) задачи (1.1)—(1.4) (в котором аргумент t заменен на $t-it_2$) в виде предела при $t_2\to+0$ абсолютно сходящегося интеграла:

$$\frac{\partial}{\partial t}u_j(t-i0, x)=(2\pi^2)^{-1}\,\mathrm{Re}\int_0^{+\infty}d\gamma\iint_{-\infty}^{+\infty}(-i\gamma)^2\sum_{kl}\Delta^{-1}\Delta_{kl}\times$$
$$\times h_lY_j^k\exp[i\gamma(\langle a, x\rangle^k-t+i0)]\,da_1\,da_2 \tag{1.12}$$

при условии, что $\iint=O(\gamma^{-3+\delta})$, $\delta>0$, $\gamma\to0$:

$$i\gamma(\langle a, x\rangle^k)=i\gamma(a_1x_1+a_2x_2+\beta^k(c_0, a_1, a_2)x_3) \tag{1.13}$$

Формулы (1.1), (1.2) проверяются дифференцированием под знаком интеграла; (1.3) выполняется (согласно теореме Планшереля) при замене правой части (1.2) дельтообразной функцией $-h_s\delta_\varepsilon(t)\delta_\varepsilon(x_1)\delta_\varepsilon(x_2)\in L_2$, а значит, и в пределе при $\varepsilon\to0$; (1.4) вытекает из (1.10) при $k\leqslant3$. При выводе (1.12) используется формула

$$\int_{-\infty}^{+\infty}w(\gamma)\,d\gamma=2\,\mathrm{Re}\int_0^{+\infty}w(\gamma)\,d\gamma$$

где $w(\gamma)$ — преобразование Фурье вещественной функции t, основанная на том, что $\mathrm{Re}\,w(\gamma)$ и $\mathrm{Im}\,w(\gamma)$ — четная и соответственно нечетная вещественные функции γ.

Согласно (1.9), из (1.6) при конечных a_1, a_2 вытекает:

$$[\beta^k(c_0, a_1, a_2)]'_{a_\nu}\neq\infty \tag{1.14}$$

Согласно (1.6), (1.11), приведенные выше величины β^k, Y_j^k, Δ, Δ_{kl} — однородные функции аргументов c_0, a_1, a_2 порядка 1, 0, 6, 4, зависящие (неявно) от аргумента $B_{sj}^{kl}[(i\gamma)^{-1}]$ (от $(i\gamma)^{-1}$).

2. Продольные и сдвиговые волны. Пусть $P_p^k(\alpha_{p1}^k, \alpha_{p2}^k)$ ($p=1, 2, \ldots, n_p^k$) — стационарная точка показателя степени (1.13), т. е. $\alpha_{p\nu}^k$ — решение системы уравнений $[i\gamma(\langle a, \xi\rangle^k)]'_{a_\nu}=0$ ($\nu=1, 2$). Запишем уравнение поверхности стока показателя степени (1.13), L_p^k, проходящей через точку P_p^k:

$$(L_p^k)\,\mathrm{Im}\,[i\gamma(\langle a,\xi\rangle^k)]=\mathrm{Im}\,[i\gamma\lambda_p^k],\quad \lambda_p^k=\langle a,\xi\rangle^k\,|_{P_p^k} \tag{2.1}$$

и ее сечение $L_{p\nu}^k$ в плоскости a_ν, проходящей через любую точку $\omega(\omega_1,\omega_2)\in$ $\in L_p^k$ ($\nu=1, 2$):

$$(L_{p\nu}^k)\,\mathrm{Im}[i\gamma(\langle a,\ \xi\rangle_\nu^k)]=\mathrm{Im}[i\gamma\lambda_p^k] \tag{2.2}$$

Здесь $\langle a,\ \xi\rangle_\nu^k$ обозначает выражение $\langle a,\ \xi\rangle^k$, в котором a_μ при $\mu\neq\nu$ фиксировано: $a_\mu=\omega_\mu$.

Допустим, что P_p^k — единственная стационарная точка (1.13) на L_p^k, и пусть на $L_{p\nu}^k$ (при $a_\mu=\omega_\mu$, $\mu\neq\nu$):

$$[i\gamma(\langle a,\xi\rangle_\nu^k)]'_{a_\nu}\neq 0 \tag{2.3}$$

Приняв на $L_{p\nu}^k$ ($\nu=1,\ 2$):

$$\sigma_{p\nu}^k=i[\langle a,\ \xi\rangle_\nu^k-\lambda_p^k],\ a_\mu=\omega_\mu,\ \mu\neq\nu \tag{2.4}$$

в качестве (см. (2.22)) вещественного параметра, получим (согласно (2.3)):

$$(\sigma_{p\nu}^k)_{a_\nu}'\neq 0\quad (a_\mu=\omega_\mu,\ \mu\neq\nu) \tag{2.5}$$

На основании (2.5) обращение (2.4) однозначно ($a_\nu\in L_{p\nu}^k$):

$$a_\nu=f(\sigma_{p\nu}^k),\ \alpha_{p\nu}^k=f(\theta_{p\nu}^k)\quad (f\equiv f_{p\nu}^k) \tag{2.6}$$

В новых переменных (2.4) (см. (2.1), (2.2), (2.6)):

$$P_p^k(\alpha_{p1}^k,\ \alpha_{p2}^k)=P_p^k[f(\theta_{p1}^k),\ f(\theta_{p2}^k)] \tag{2.7}$$

$$(L_{p\nu}^k)\,\mathrm{Im}[i\gamma(\langle f(\sigma_p^k),\ \xi\rangle^k)]=\mathrm{Im}[i\gamma\lambda_p^k] \tag{2.8}$$

Здесь $f(\sigma_p^k)$ зависит (неявно) от ξ и $(i\gamma)^{-1}$. Согласно (1.13):

$$i\gamma[\langle f(\sigma_p^k),\ x\rangle^k]=i\gamma[f(\sigma_{p1}^k)x_1+f(\sigma_{p2}^k)x_2+\beta^k[c_0,\ f(\sigma_{p1}^k),\ f(\sigma_{p2}^k)]x_3 \tag{2.9}$$

Вклад в $\partial u_j/\partial t$ совокупности линий $L_{p\nu}^k$ ($\nu=1,\ 2$) при фиксированном p, k (обозначим через $V_j(P_p^k)$) получим из (1.12) переходом к новым переменным (2.6):

$$V_j(P_p^k)=(2\pi^2)^{-1}\,\mathrm{Re}\int\limits_0^{+\infty}-i\,(i\gamma)\sum_k \exp\,[i\gamma(\langle f(\theta_p^k),x\rangle^k-t+i0)]\times$$

$$\times\,d\gamma\iint\limits_{L_{p\nu}^k} M_{jp}^k\,[f(\sigma_p^k)]\,f'(\sigma_{p1}^k)\,f'(\sigma_{p2}^k)$$

$$\exp\Bigl\{2^{-1}i\gamma|x|\sum_{\mu\nu}[\beta_{\mu\nu}^{k\prime\prime}(c_0,f(\theta_{p1}^k),\ f(\theta_{p2}^k))\,\xi_3+$$

$$+\,\delta_{\mu\nu}f''(\theta_p^k)\,\xi_\nu]\,(\sigma_{p\mu}^k-\theta_{p\mu}^k)\,(\sigma_{p\nu}^k-\theta_{p\nu}^k)\Bigr\}\,d\sigma_{p1}^k\,d\sigma_{p2}^k \tag{2.10}$$

$$(\sigma_{p\nu}^k\in L_{p\nu}^k),\quad \beta_{\mu\nu}^{k\prime\prime}\equiv\partial^2\beta^k/\partial\sigma_{p\mu}\partial\sigma_{p\nu}$$

$$M_j^k\,[f(\sigma_p^k)]=\sum_l(\Delta^{-1}\Delta_{kl}h_lY_j^k)_{a_\nu=f(\sigma_{p\nu}^k)}$$

В формуле (2.10) показатель степени (2.9) заменен его разложением по формуле Тэйлора в окрестности стационарных точек P_p^k (2.7).

Асимптотику $V_j(P_p^k)$ можно получить обобщением метода перевала (известного для случая одного переменного) (ср. [4, 5]):

$$V_j(P_p^k)\sim C|x|^{-1}\,\mathrm{Re}\int\limits_0^{+\infty}\sum_k N_{jp}^k[(i\gamma)^{-1},\xi]\,i\gamma\exp[i\gamma(\langle f(\theta_p^k),x\rangle^k-t+i0)]\,d\gamma \tag{2.11}$$

$$N_{jp}^k=M_{jp}^k[f(\theta_p^k)]\,f'(\theta_{p1}^k)\,f'(\theta_{p2}^k)\,[\mathrm{Re}\,D_p^k(f(\theta_p^k),\ \xi)]^{-1/2}$$

$$D_p^k = \det\|\beta_{\mu\nu}^{k\prime\prime}(c_0, f(\theta_{p1}^k),\ f(\theta_{p2}^k))\xi_3 + \delta_{\mu\nu} f''(\theta_{p\nu}^k)\xi_\nu\| \quad (\text{при } D_p^k \neq 0\ (\xi \neq 0)). \tag{2.11}$$

Формулу (2.11) можно доказать приведением матрицы D_p^k к диагональному виду. Заметим здесь, что при $\xi \neq 0$ и $\xi_3 \to 0$:

$$D_p^k(f(\sigma_p^k), \xi) = O(1) \tag{2.12}$$

Чтобы в этом убедиться, вернемся к формуле (1.12). Умножая подынтегральное выражение на $(a_1 a_2)^{-\varepsilon} \exp[\varepsilon \ln(a_1 a_2)]$, повторим предыдущие рассуждения применительно к новому показателю степени $i\gamma[\langle a, x\rangle^k] + \varepsilon \ln(a_1 a_2)$. В результате мы придем к той же асимптотике $V_j(P_p^k)$, но с новым выражением матрицы D_p^k, для которого соотношение (2.12) устанавливается подстановкой $\xi \neq 0$, $\xi_3 = 0$, из чего вытекает справедливость (2.12) для первоначального выражения матрицы D_p^k.

3. Головные волны. Пусть характеристический корень β^k $(k \leqslant 3)$ имеет n_q^k нулевых критических многообразий H_q^k:

$$(H_q^k)\,[\varphi_q^k(c_0, a_1, a_2)]^{\delta_q^k} = 0 \quad (q = 1, 2, \ldots, n_q^k), \quad \delta_q^k \geqslant 3^{-1} \tag{3.1}$$

где $\delta_q^k > 0$ — рациональные дроби $\Sigma\delta_q^k \leqslant 1$; φ_q^k — однородные функции первого порядка аргументов c_0, a_1, a_2, неявно зависящие от $(i\gamma)^{-1}$. Положим, что

$$\varphi_q^k \neq \varphi_q^k \quad (k \neq \lambda) \tag{3.2}$$

и (при $Q_q^k(\alpha_{q1}^k, \alpha_{q2}^k) \in H_q^k$ и a_ν произвольном):

$$[\varphi_q^k]'_{a_\nu} \neq 0 \quad (\mu \neq \nu:\ a_\mu = \alpha_{q\mu}^k) \tag{3.3}$$

Здесь и далее дробная степень рассматривается в смысле аналитического продолжения арифметического корня.

Проведем поверхность уровня E_q^k функции $i\gamma(\varphi_q^k)^{\delta_q^k}$ через $Q_q^k \in H_q^k$

$$(E_q^k)\ \mathrm{Re}\,[i\gamma(\varphi_q^k(c_0, a_1, a_2))^{\delta_q^k}] = 0$$

и ее сечение $E_{q\nu}^k$ в плоскости a_ν, проведенной через указанную точку $Q_q^k(\alpha_{q1}^k, \alpha_{q2}^k) \in H_q^k$:

$$(E_{q\nu}^k)\ \mathrm{Re}\,[i\gamma(\varphi_q^k(c_0, a_1, a_2)_\nu)^{\delta_q^k}] = 0 \tag{3.4}$$

до пересечения с линией $L_{p\nu}^k$ $(1 \leqslant p \leqslant n_p^k)$ (символ $(\varphi_q^k)_\nu$) обозначает, что a_μ при $\mu \neq \nu$ фиксировано: $a_\mu = \alpha_{q\mu}^k$).

В отличие от (1.9), проведем в плоскости a_ν разрез только по самой линии $E_{q\nu}^k$. При этом формула (1.8) сохраняется, а (1.14) заменится на

$$[\varphi_q^k]'_{a_{\nu_k}} \neq \infty \quad (\varphi_q^k \neq 0) \tag{3.5}$$

Введем на $E_{q\nu}^k$ параметр (см. (3.1)):

$$s_{q\nu}^k = [\varphi_q^k(c_0, a_1, a_2)_\nu]^{\delta_q^k} \quad (a_\mu = \alpha_{q\mu}^k, \mu \neq \nu) \tag{3.6}$$

вещественный согласно (3.4). Для $s_{q\nu}^k \neq 0$ корень (3.6) $a_\nu = \alpha_{q\nu}^k$.

Согласно (3.3), из (3.6) получим $(s_{q\nu}^k \in E_q^k)$ — единственное решение; при $s_{q\nu}^k \neq 0$: $a_\nu = F(s_{q\nu}^k)$ $(\equiv F_{q\nu}^k(s_{q\nu}^k))$ $(\nu = 1, 2)$, а при $s_{q\nu}^k = 0$:

$$\alpha_{q\nu}^k = F_{q\nu}^k(0) \quad (\nu = 1, 2) \tag{3.7}$$

Точка (3.7):

$$Q_q^k(\alpha_{q1}^k, \alpha_{q2}^k) = Q_q^k(F_{q1}^k(0), F_{q2}^k(0)) \in H_q^k \subset E_q^k \tag{3.8}$$

является критическим нулем $(\varphi_q^k)^{\delta_q^k}$. Согласно (3.6):

$$\begin{gathered} a_\nu = O(s_{q\nu}^k) = (s_{q\nu}^k)^{1/\delta_q^k} \\ d^m F(s_{q\nu}^k)/(ds_{q\nu}^k)^m = O\,[(s_{q\nu}^k)^{-m+(1/\delta_q^k)}] \end{gathered} \tag{3.9}$$

Здесь $F(s_{q\nu}^k)$ зависят неявно от $(i\gamma)^{-1}$.

Докажем, что Q_q^k (3.8) является стационарной точкой показателя степени

$$i\gamma[\langle a, x\rangle^\lambda]=i\gamma[\langle F(s_q^k), x\rangle^\lambda] \text{ при } \lambda\neq k \tag{3.10}$$

Иначе говоря, требуется доказать, что $Q_q^k(\alpha_{q1}^k, \alpha_{q2}^k)$ является решением системы уравнений

$$[i\gamma(\langle a, x\rangle^\lambda)]'_{a_\nu}/[s_{q\nu}^k]'_{a_\nu}=0 \tag{3.11}$$

при $\lambda\neq k$ $(\nu=1, 2)$. Числитель (3.11) не содержит (см. (3.2)) производной $[\varphi_q^k]'_{a_\nu}$ (при $k\neq\lambda$), поэтому он ограничен при $a_\nu\to a_{q\nu}^k$. А знаменатель (3.11) содержит указанную производную (см. (3.6)) и потому равен бесконечности при $a_\nu\to\alpha_{q\nu}^k$, т. е. при $s_{q\nu}^k\to 0$ (см. (3.9) при $m=1$). Значит, $\alpha_{q\nu}^k$ $(s_{q\nu}^k=0)$ действительно удовлетворяет системе (3.11), что и требовалось доказать.

Можно доказать[1], что $Q_q^k\in H_q^k$ — единственный корень (3.11) на E_q^k.

Включим в формулу (1.12) под знак суммирования сомножитель $\delta_{k\lambda}$, тогда подынтегральное выражение будет содержать только одну экспоненту: $\exp[i\gamma(\langle a, x\rangle^\lambda)]$. Полученное выражение (1.12) обозначим через $\partial u_j^\lambda/\partial t$.

Вклад линий $E_{q\nu}^k$ в $\partial u_j^\lambda/\partial t$ обозначим через $V_j^\lambda(Q_q^k)$. Его можно получить переходом к новым переменным $s_{q\nu}^k$ в формуле (1.12):

$$V_j^\lambda(Q_q^k)=(2\pi^2)^{-1}\operatorname{Re}\int_0^{+\infty}-(i\gamma)^2\exp[i\gamma(\langle F_q^k(0), x\rangle^\lambda-t+i0)\,d\gamma\,\times$$

$$\times\iint M_{jq}^k[F(s_q^k)]\,F^{k\prime}(s_{q1}^k)\,F^{k\prime}(s_{q2}^k)\exp\Big\{2^{-1}i\gamma\,|x|\sum_{\mu\nu}[\beta_{\mu\nu}^{k''}(c_0, F_{q1}(0), F_{q2}(0))\xi_3+$$

$$+\,\delta_{\mu\nu}F_{q\nu}^{k''}(0)\,\xi_\nu]\,s_{q\mu}^k s_{q\nu}^k\Big\}\,ds_{q\mu}^k ds_{q\nu}^k \quad (s_{q\nu}^k\in E_{q\nu}^k) \tag{3.12}$$

$$M_j^k[s_q^k]=\sum_l(\Delta^{-1}\Delta_{kl}h_lY_j^k)_{a_\nu=F(s_{q\nu}^k)}$$

В (3.12) показатель степени (3.10) заменен его разложением по формуле Тэйлора в окрестности точки (3.8). Согласно (3.9):

$$F'(s_{q1})\,F'(s_{q2})=O(s_{q1}s_{q2})^{-1+(1/\delta_q^k)} \tag{3.13}$$

Из (3.12), (3.13) обобщением метода стационарной фазы (известного для случая однократного интеграла) получим асимптотику $V_j^\lambda(Q_q^k)$ при $t\gg 1$ $(|x|/t=\mathrm{const})$

$$V_j^\lambda(Q_q^k)\sim C_q^{k\lambda}\,|x|^{-1/\delta_q^k}\operatorname{Re}\int_0^{+\infty}N_{jq}^{k\lambda}[(i\gamma)^{-1}, \xi]$$

$$(i\gamma)^{2-(1/\delta_q^k)}\exp[i\gamma(\langle F_q^k(0), x\rangle^\lambda-t+i0)]\,d\gamma \tag{3.14}$$

$$N_{jq}^{k\lambda}=M_{jq}^k[F_q^k(0)]\,(i)^{-1/\delta_q^k}F_{q1}^{k\prime}(0)\,F_{q2}^{k\prime}(0)\times$$

$$[\operatorname{Im}D_q^{k\lambda}(F_q^k(0), \xi)]^{-1/(2\delta_q^k)}$$

$$D_q^{k\lambda}=\det\|\beta_{\mu\nu}^{k''}(c_0, F_{q1}^k(0), F_{q2}^k(0))\xi_3+\delta_{\mu\nu}F_{q\nu}^{k''}(0)\,\xi_\nu\|$$

(при $D_p^{k\lambda}\neq 0$ $(\xi\neq 0)$)

Формулу (3.14) можно доказать приведением матрицы $D_q^{k\lambda}$ к диагональному виду.

Здесь также следует заметить, что при $|\xi|\neq 0$ и $\xi_3\to 0$: $D_q^{k\lambda}(F_q^k(0), \xi)=$ $=O(1)$ (доказывается аналогично (2.12)).

Из (1.8) и (3.5) следует, что β^k не имеет критических многообразий, отличных от (3.1), вклад которых в $\partial u_j/\partial t$ отличен от нуля.

[1] См. *Брук С. З.* Задача Лэмба: Препринт № 270. М.: ИПМ АН СССР, 1986.

Решение (1.1)—(1.4) при $\delta_q^k<3^{-1}$ следует строить в производных $(\partial/\partial t)^m u_j$, где $m\geqslant -2+(1/\delta_q^k)$.

4. Волны Рэлея. Определитель Δ (1.11) можно представить в виде $\Delta = \Pi T_m(c_0, a_1, a_2)$ $(m=0, 1, 2)$, где T_m — однородные функции c_0, a_1, a_2, зависящие (неявно) от $(i\gamma)^{-1}$. Пусть в пространстве (1.5):

$$T_1(c_0, a_1, a_2)=0, T_2(c_0, a_1, a_2)=0 \tag{4.1}$$

Сделаем замену

$$T_1(c_0, a_1, a_2)=b_1, T_2(c_0, a_1, a_2)=b_2 \tag{4.2}$$

Полагая, что якобиан $\partial\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\neq 0$, получим: $a_1=\psi_1(c_0, b_1, b_2)$, $a_2=\psi_2(c_0, b_1, b_2)$ (ψ_ν зависят также от $(i\gamma)^{-1}$). Запишем формулу (1.12) в новых переменных b_1, b_2 (4.2):

$$\frac{\partial u_j}{\partial t}=(2\pi^2)^{-1}\operatorname{Re}\int\limits_0^{+\infty}-(i\gamma)^2\,d\gamma\iint\sum_{kl}\times$$

$$\times(\Delta^{-1}\Delta_{kl}h_l Y_j^k)\exp[i\gamma(\langle\psi, x\rangle^k-t+i0)]\,\partial\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}db_1\,db_2 \tag{4.3}$$

$$a_\nu=\psi_\nu(c_0, b_1, b_2)$$

Волну Рэлея, соответствующую решению $\partial u_j/\partial t$ (4.3), обозначим через $V_j(R)$. Она равна произведению $2\pi i$ на сумму вычетов (в нулях определителя Δ) интеграла (4.3). В рассматриваемом случае (4.1) из (4.3) получим

$$V_j(R)=C\operatorname{Re}\int\limits_0^{+\infty}(i\gamma)^2\sum_k\{N_j^k(c_0, a_1, a_2, x)\times$$

$$\times\exp[i\gamma(\langle\psi, x\rangle-t+i0)]\}_{b_1=b_2=0}\qquad(C=1/\pi) \tag{4.4}$$

$$N_j^k=-\partial\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\sum_l T_0^{-1}(c_0, a_1, a_2)\Delta_{kl}h_l Y_j^k$$

В случае, когда Δ имеет только один нуль, $T_1=b_1=0$, вычет двойного интеграла запишется в виде однократного интеграла по db_2, асимптотика которого вычисляется методом перевала. Тогда в итоге получим формулу для $V_j(R)$, аналогичную (4.4). В случае кратных нулей Δ вычет $\partial u_j/\partial t$ и соответственно $V_j(R)$ определяется известными формулами (см. [6]). В результате получим формулу, несколько усложненную в сравнении с (4.4).

5. Асимптотика $\partial u_j/\partial t$ при $|t|\gg 1$. Обозначим через $V_j(Q)$ сумму вкладов $V_j^\lambda(Q_q^k)$, соответствующих всевозможным значениям $q=1, 2, \ldots, n_q^k$, $\lambda\neq k$ $(\lambda=\lambda_1, \lambda_2)$, включая циклическую перестановку индексов k, λ_1, λ_2:

$$V_j(Q)=\sum_{qk\lambda}=V_j^\lambda(Q_q^k) \tag{5.1}$$

и через $V_j(P)$ — сумму вкладов $V_j(P_p)$, соответствующую всевозможным значениям $p=1, 2, \ldots, n^k$: $V_j(P)=\sum V_j(P_p)$. Докажем, что

$$\partial u_j(t-i0, x)/\partial t=V_j(R)+V_j(Q)+V_j(P) \tag{5.2}$$

Деформируя в (1.12) контуры интегрирования (вещественные оси плоскостей a_1, a_2), проведем в новых переменных (4.2) линии, охватывающие нулевые многообразия $T_p=0$, $p=1, 2$ (определителя Δ); затем, вернувшись к старым переменным a_ν $(\nu=1, 2)$, обойдем разрезы $E_{q\nu}^k$ (3.4) и продолжим путь интегрирования вдоль линий стока $L_{p\nu}^k$ (2.2).

Вклады указанных трех линий равны: $V_j(R)$, $V_j(Q)$, $V_j(P)$. В этом состоит формула (5.2). Общим видом формул (3.14), (2.10), (4.4) является, с точностью до некоторого сомножителя, следующее выражение:

$$J=\mathrm{Re}\int_{0}^{+\infty} N[(i\gamma)^{-1},\xi](i\gamma)^{A}\exp[i\gamma(\langle\varphi,x\rangle-t+i0]d\gamma$$

$$(N=N[(i\gamma)^{-1},\xi],\ \varphi=\varphi[(i\gamma)^{-1},\xi]) \tag{5.3}$$

Формулу (5.3) запишем в виде

$$J=\mathrm{Re}\int_{c}^{+\infty} N(i\gamma)^{A-\Omega}\exp(z)\,d\gamma \tag{5.4}$$

$$z=i\gamma[\langle\varphi,\ x\rangle-t+i0]+\Omega\ln(i\gamma) \tag{5.5}$$

В качестве Ω примем корень уравнения

$$(2\pi)^{1/2}\Omega^{A+1/2}\exp(-\Omega-4^{-1}\pi i)=\Gamma(A+1) \tag{5.6}$$

Обозначим $\varphi^{\mathrm{I}}=d\varphi/d[(i\gamma)^{-1}]$, $\varphi^{\mathrm{II}}=d^2\varphi/(d[(i\gamma)^{-1}])^2$. Существование и единственность точки перевала γ_0 показателя степени z (5.5) доказывается при помощи теорем Пуанкаре — Боля — Руше [7] [2]. γ_0 является корнем уравнения

$$dz/d\gamma=i[\langle\varphi,\ x\rangle-t+i0-(\langle\varphi^{\mathrm{I}},\ x\rangle-\Omega)(i\gamma_0)^{-1}]=0$$

Иначе это уравнение запишется так:

$$i\gamma_0(\langle\varphi,\ x\rangle-t+i0)=\langle\varphi^{\mathrm{I}},\ x\rangle-\Omega,\ \gamma=\gamma_0,\ \varphi^{\mathrm{I}}=d\varphi/d[(i\gamma)^{-1}] \tag{5.7}$$

Последнее запишем в следующих двух вариантах:

$$\begin{gathered}(i\gamma_0)^{-1}=t-i0-\langle\varphi,\ x\rangle)(\Omega-\langle\varphi^{\mathrm{I}},\ x\rangle^{-1}\\ i\gamma_0=(\Omega-\langle\varphi^{\mathrm{I}},\ x\rangle)(t-i0-\langle\varphi,\ x\rangle)^{-1}\ (\gamma=\gamma_0)\end{gathered} \tag{5.8}$$

Приближенное значение γ_0 можно найти из рекуррентной формулы, полученной подстановкой γ_n в левую и γ_{n-1} в правую часть (5.8). Нетрудно доказать, что

$$(-d^2z/d\gamma^2)^{-1/2}_{\gamma=\gamma_0}=\{i\gamma[(t-i0-\langle\varphi,x\rangle)(\Omega-\langle\varphi^{\mathrm{I}},x\rangle)^{-1}\langle\varphi^{\mathrm{II}},x\rangle-\Omega]^{-1/2}\}_{\gamma=\gamma_0}$$

$$\varphi^{\mathrm{II}}=d^2\varphi/(d[(i\gamma)^{-1}])^2 \tag{5.9}$$

При помощи формул (5.8), (5.9) найдем вклад в интеграл (5.4) точки перевала γ_0; обозначим его через $V(\gamma_0)$:

$$\begin{gathered}V(\gamma_0)=(2\pi)^{1/2}\,\mathrm{Re}\{N[(i\gamma)^{-1},\xi](i\gamma)^{A-\Omega}\\ (-d^2z/d\gamma^2)^{-1/2}\exp[z-4^{-1}\pi i]\}_{\gamma=\gamma_0}\end{gathered} \tag{5.10}$$

Докажем, что J асимптотически равно указанному вкладу, точка γ_0, если пренебречь высокочастотным и низкочастотным составляющими более высокого порядка малости.

Действительно, линия стока показателя степени (5.4), проходящая через γ_0; $\mathrm{Im}[z(\gamma)]=\mathrm{Im}[z(\gamma_0)]$, не достигает точек $\gamma=0$ и $\gamma=\infty$.

Примем в качестве нового контура интегрирования (5.4) отрезок v_0 указанной линии стока, содержащий γ_0 (внутри себя), продолженный до $\gamma=0$ и $\gamma=\infty$ дугами h и H соответственно. Но вклады H и h в интеграл J имеют порядок малости, на $|t|^{-1/2}$ больший в сравнении с вкладом v_0, откуда следует наше утверждение.

Формулу (5.10) можно записать так (см. (5.5), (5.7), (5.9)):

$$\begin{gathered}J=\mathrm{Re}\{(2\pi)^{1/2}N[(i\gamma)^{-1},\ \xi][(t-i0-\langle\varphi,\ x\rangle)\langle\varphi^{\mathrm{II}},\ x\rangle(\langle\varphi^{\mathrm{I}},\ x\rangle-\\ -\Omega)^{-1}-\Omega]^{-1/2}(\Omega-\langle\varphi^{\mathrm{I}},\ x\rangle)^{A+1}(t-\langle\varphi,\ x\rangle)^{-(A+1)}\exp[(\varphi^{\mathrm{I}},\ x\rangle-\Omega-4^{-1}\pi i]\}_{\gamma=\gamma_0}\end{gathered}$$

---

[2] См. указ. публ. с. 74.

И далее, с учетом (5.6), получим

$$J=\Gamma(A+1)\operatorname{Re}\{N[(i\gamma)^{-1},\xi][(t-i0-\langle\varphi,x\rangle)\langle\varphi^{\mathrm{II}},x\rangle[\langle\varphi^{\mathrm{I}},x\rangle-\Omega]^{-1}/$$
$$/\Omega-1]^{-1/2}(1-\langle\varphi^{\mathrm{I}},x\rangle\Omega^{-1})^{A+1}(t-i0-\langle\varphi,x\rangle)^{-A-1}\exp[\langle\varphi^{\mathrm{I}},x\rangle]\}_{\gamma=\gamma_0} \quad (5.11)$$

В случае упругой среды $B_{sj}^{kl}[(i\gamma)^{-1},\xi]=B_{sj}^{kl}[0,\xi]\equiv B_{sj}^{kl}(0)$. Соответственно у функций N и φ аргумент есть $(i\gamma)^{-1}=0$. Обозначим: $N(0,\xi)\equiv\equiv N(0)$, $\varphi(0,\xi)=\varphi(0)$. Очевидно, что $\varphi^{\mathrm{I}}(0)=\varphi^{\mathrm{II}}(0)=0$. Подстановкой этих значений в формулу (5.11) получим асимптотику J (5.3) в случае упругой среды:

$$J\sim\Gamma(A+1)\operatorname{Re}[(-i)N(0)(t-i0-\langle\varphi(0),x\rangle)^{-A-1}] \quad (5.12)$$

Если указанные значения N, φ, φ^{I}, φ^{II} подставить в исходную формулу (5.3), получим интеграл (гамма-функцию):

$$J=\operatorname{Re}\int_0^{+\infty}N(0)(i\gamma)^A\exp[i\gamma(\langle\varphi(0),x\rangle-t+i0)]d\gamma$$

Этот интеграл вычисляется непосредственно (минуя метод перевала) по формуле гамма-функции. При этом получим результат (5.12).

Совпадением точного значения J с его асимптотическим значением (в случае упругой среды) мы обязаны выбору Ω (см. (6.4)).

Запишем окончательный результат для $V_j(P)$, $V_j(Q)$, $V_j(R)$, используя асимптотическую формулу (5.11):

$$V_j(P)=\sum_{pk}G_p^k\Gamma(2)|x|^{-1}\operatorname{Re}\{N_{jp}^k[(i\gamma)^{-1},\xi][1-\langle f(\theta_p^k)^{\mathrm{I}},x\rangle^k\Omega^{-1}]^2\times$$
$$\times[t-i0-\langle f(\theta_p^k),x\rangle^k]^{-2}\exp[\langle f(\theta_p^k)^{\mathrm{I}},x\rangle^k][(t-i0-\langle f(\theta_p^k),x\rangle^k)\times$$
$$\times\langle f(\theta_p^k)^{\mathrm{II}},x\rangle^k(\langle f(\theta_p^k)^{\mathrm{I}},x\rangle^k-\Omega)^{-1}/\Omega-1]^{-1/2}\},\quad \gamma=\gamma_0(P_p^k)$$

$$V_j(Q)=\sum_{qk\lambda}C_q^{k\lambda}\Gamma[3-(1/\delta_q^k)]|x|^{-1/\delta_q^k}\operatorname{Re}\{N_{jq}^{k\lambda}[(i\gamma)^{-1},\xi]$$
$$[1-\langle F_q^k(0)^{\mathrm{I}},x\rangle^\lambda\Omega^{-1}(t-i0-\langle F_q^k(0),x\rangle^\lambda)^{-1}]^{3-(1/\delta_q^k)}\times$$
$$\times\exp[\langle F_q^k(0)^{\mathrm{I}},x\rangle^\lambda][(t-i0-\langle F_q^k(0),x\rangle^\lambda)\langle F_q^k(0)^{\mathrm{II}},x\rangle^\lambda\times$$
$$\times(\langle F_q^k(0)^{\mathrm{I}},x\rangle^\lambda-\Omega)^{-1}/\Omega-1]^{-1/2}\}$$
$$\gamma=\gamma_0^\lambda(Q_q^k)$$

$$V_j(R)=\sum_k C\Gamma(3)\operatorname{Re}\{N_j^k[(i\gamma)^{-1},\xi][1-\langle\psi(0,0)^{\mathrm{I}},x\rangle^k\times$$
$$\times\Omega^{-1}(t-i0-\langle\psi(0,0),x\rangle^k)^{-1}]^3\exp[\langle\psi(0,0)^{\mathrm{I}},x\rangle^k]\times$$
$$\times[(t-i0-\langle\psi(0,0),x\rangle^k)\langle\psi(0,0)^{\mathrm{II}},x\rangle^k(\langle\psi(0,0)^{\mathrm{I}},x\rangle^k-\Omega)^{-1}/\Omega-1]^{-1/2}\}$$
$$\gamma=\gamma_0(R^k)$$

Можно доказать, что полученные асимптотические выражения равномерны по t, x в области $-\infty\leqslant|x|/t\leqslant+\infty$.

6. Случай неоднородной наследственно упругой среды. Рассмотрим задачу (1.1)–(1.4), полагая, что $A_{sj}^{ml}=A_{sj}^{ml}(t,x)$, $c_0=c_0(x)$, $h_s=h_s(t)$. Стационарная задача, соответствующая (1.1)–(1.4) запишется так:

$$\Lambda_s w\equiv\sum_j\left[\sum_{ml}B_{sj}^{ml}\frac{\partial^2 w_j}{\partial x_m\,\partial x_l}-\delta_{sj}c_0^2w_j\right]=0\quad(x_3>0) \quad (6.1)$$

$$\lambda_s w\equiv\sum_{jl}B_{sj}^{3l}\frac{\partial w_j}{\partial x_l}=-g_s\delta(x_1)\delta(x_2)\quad(x_3=+0) \quad (6.2)$$

$$w_s=0\quad(x_3=+\infty). \quad (6.3)$$

$$B_{sj}^{ml}=B_{sj}^{ml}[(i\gamma)^{-1},x],\ c_0=c_0(x),\ g_s=g_s(\gamma)$$

$$g_s(\gamma)=\sum_{n=0}^{\infty}(-i\gamma)^{-n}g_{sn},\quad g_{sn}=\mathrm{const},\quad |\gamma|\gg 1$$

Здесь B_{sj}^{ml}, g_s, w_j — фурье-преобразования A_{sj}^{ml}, h_s, u_j по t.

Пусть характеристическое уравнение системы (6.1):

$$\det\left\|\sum_{ml}B_{sj}^{ml}\frac{\partial\tau}{\partial x_m}\frac{\partial\tau}{\partial x_l}-\delta_{sj}c_0^2\right\|=0 \tag{6.4}$$

имеет шесть семейств решений вида $\tau=\tau^k$, $\tau^k(a_1, a_2, x)=a_1x_1+a_2x_2+b^k(a_1, a_2, x)$, где $b^k=0$ при $x_3=0$ ($k=1,\ldots,6$), и пусть τ^k попарно «разделены» неравенствами $\mathrm{Im}\,\tau^k\geqslant 0$ ($1\leqslant k\leqslant 3$), $\mathrm{Im}\,\tau^k<0$ ($k>3$). Найдем обобщенное решение w_j (6.1)—(6.3) и его волновые составляющие при $|\gamma x|\gg 1$.

В качестве обобщенного решения примем функцию w_j, удовлетворяющую интегральным соотношениям ($w_j=\Sigma w_j^k$; $k=1, 2, 3$):

$$(\chi^k,\Lambda w^k)\equiv\iint_{-\infty}^{+\infty}\sum_s\chi_s^k\Lambda_s w^k\,dx_1\,dx_2=0\quad(x_3>0)$$

$$\sum_k(\chi^k,\lambda w^k)\equiv\iint_{-\infty}^{+\infty}\sum_k\sum_s\chi_s^k\lambda_s w^k\,dx_1\,dx_2=-\sum_{ks}g_s\chi_s^k|_{x=0}\quad(x_3=+0)$$

где χ_s — произвольное решение системы $T_j^{k\prime}\chi^k=0$, полученной транспонированием системы

$$T_s^k z_0^k=\sum_j\left[\sum_{ml}B_{sj}^{ml}\frac{\partial\tau^k}{\partial x_m}\frac{\partial\tau^k}{\partial x_l}+\delta_{sj}c_0^2\right]z_{j0}^k=0$$

с определителем, равным транспонированному определителю (6.4).

Используя лучевой метод геометрической оптики, построим вспомогательное (обобщенное) решение $v_j^k(|\gamma|\gg 1)$ системы (6.1) в виде бесконечного ряда

$$v_j^k=\sum_{n=0}^{\infty}(-i\gamma)^{-n}z_{jn}^k\exp(i\gamma\tau^k)$$

$$(\chi^k,\ \Lambda v^k)=0$$

где z_{jn}^k удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\sum_{jml}B_{sj}^{ml}\left(\frac{\partial\tau_{jn}^k}{\partial x_m}\frac{\partial z_{jn}^k}{\partial x_l}+\frac{\partial\tau^k}{\partial x_l}\frac{\partial z_{jn}^k}{\partial x_m}+\frac{\partial^2\tau^k}{\partial x_m\,\partial x_l}z_{jn}^k\right)=\sum_{jml}B_{sj}^{ml}\frac{\partial^2 z_{jn-1}}{\partial x_m\,\partial x_l} \tag{6.5}$$

Причем

$$T_s^k z_0^k=0,\ \ (\chi^k,\ T^k z_n^k)=0 \tag{6.6}$$

В качестве дополнительного условия на z_{jn}^k примем

$$\sum_k\sum_l B_{sj}^{3l}\left(\frac{\partial z_{jn-1}^k}{\partial x_l}+z_{jn}^k\frac{\partial\tau^k}{\partial x_l}\right)=-g_{sn}\delta_{sj}\exp[a_1x_1+a_2x_2]$$

Тогда искомое решение w_j задачи (6.1)—(6.3) запишется так:

$$w_j=\frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}(-i\gamma)^{n+2}z_{jn}^k\exp[i\gamma\tau^k]\,da_1\,da_2 \tag{6.7}$$

Деформируя в (6.7) контуры интегрирования в комплексные плоскости a_1, a_2 и повторяя рассуждения предыдущих разделов получим асимптотику w_j.

Усредним формулу (6.5) в некоторой области $\omega\in R^3(x)$ достаточно малой меры $|\omega|$, тогда получим:

$$\frac{2}{|\omega|}\sum_j\iint_{\sigma_\omega}\sum_{ml}B_{sj}^{ml}\frac{\partial\tau^k}{\partial x_m}\cos x_l n z_{jn}{}^k\,d\sigma-\frac{1}{|\omega|}\sum_j z_{jn}{}^k$$

$$\iint_{\sigma_\omega}\sum_{ml}B_{sj}^{ml}\frac{\partial\tau^k}{\partial x_m}\cos x_l n\,d\sigma=\sum_{jml}B_{sj}^{ml}\frac{\partial^2 z_{jn-1}^k}{\partial x_m\,\partial x_l}+\dots \qquad (6.8)$$

Последний член обозначенный многоточием (содержащий $\partial B_{sj}^{ml}/\partial x_k$ мы опустим. Это законно, если считать, что усредненное значение $\partial B_{sj}^{ml}/\partial x_k$ по всему пространству $R^3(x)$ достаточно малым.

Преобразуем x_1, x_2, x_3 к переменым q_1, q_2, τ с якобианом μ и примем в качестве ω область, ограниченную $\tau=\text{const}$, $\tau+d\tau=\text{const}$ и боковой поверхностью H (вырезающей на $\tau=\text{const}$ площадь dq_1/dq_2), удовлетворяющую условию

$$\sum_{ml}B_{sj}^{ml}\frac{\partial\tau}{\partial x_m}\cos x_l n=0$$

С учетом (6.6) отсюда следует, что (6.8) равносильно следующей формуле (σ_τ обозначает: $\tau=\text{const}$ $\tau+d\tau=\text{const}$):

$$-\frac{2}{|\omega|}\iint_{\sigma_\tau}\frac{\mu c_0^2}{\nu}z_{sn}{}^k\,dq_1\,dq_2-\frac{1}{|\omega|}z_{sn}{}^k\iint_{\sigma_\tau}\frac{\mu c_0^2}{\nu}\,dq_1\,dq_2=\sum_{jml}B_{sj}^{ml}\frac{\partial^2 z_{jn-1}^k}{\partial x_m\,\partial x_l} \qquad (6.9)$$

$$\nu=\nu(q_1,q_2,\tau)=\partial\tau/\partial n$$

Так же как в случае одного уравнения (Гельмгольца) система (6.9) разрешима относительно $z_{jn}{}^k$ с точностью до произвольного сомножителя $\psi_n{}^k(q_1,q_2)$, которые позволят удовлетворить условию (6.2) см. [8].

Автор выражает благодарность Е. М. Ландису за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Петрашень Г. И., Марчук Г. И., Огурцов К. И.* О задаче Лэмба в случае полупространства // Учен. зап. ЛГУ. 1950. № 135. Вып. 21. С. 71–118.
2. *Burridge R.* Lamb's problem for an anisotropic half-space // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1971. V. 24. No. 1. P. 81–98.
3. *Willis J. R.* Self-similar problems in elastodinamics // Phil. Trans. Roy. Soc. of London. Ser. A. 1973. V. 274. No. 1240. P. 435–491.
4. *Де Брейн Н. Г.* Асимптотические методы в анализе. М.: Изд-во иностр. лит. 1961. 247 с.
5. *Гиндикин С. Г., Федорюк М. В.* Точки перевала параболических полиномов. Мат. сб. 1974. Т. 94. № 3. С. 385–406.
6. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959. Вып. I. 470 с.
7. *Красносельский М. А., Перов А. И., Поволоцкий А. И., Забрейко П. П.* Векторные поля на плоскости. М.: Физматгиз, 1963. 245 с.
8. *Бабич В. М., Булдырев В. С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 456 с.

Москва

Поступила в редакцию
13.01.1987