

УДК 539.3

© 1990 г.

В. П. КОВАЛЕНКО, В. В. ТВАРДОВСКИЙ

ДВОЙКОПЕРИОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА РАЗРЕЗОВ  
В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Рассматривается двойкопериодическая система трещин при плоской деформации и продольном сдвиге в анизотропной среде. С помощью эллиптических функций Якоби получено точное решение для антиплоской деформации. Для плоского случая решение сведено к системе линейных алгебраических уравнений. Ранее задача решалась [1-6] применительно к изотропной среде путем численной реализации интегрального уравнения. В [7] с помощью эллиптических функций Вейерштрасса получено аналитическое решение задачи продольного сдвига, когда заданы лишь постоянные самоуравновешенные нагрузки на берегах трещин. Единственная неизвестная константа в решении определяется из условий равенства средних напряжений нулю, а из условий периодичности перемещений. Последняя посылка соответствует фиксированным нулевым перемещениям границ тела. Ниже предполагается наличие средних напряжений, отличных от нуля, и самоуравновешенных четных усилий, заданных на берегах трещин.

1. Элементарные эллиптические функции для областей с разрезами. Рассмотрим две двойкопериодические аналитические функции комплексного переменного  $\Psi(z)$  и  $\Omega(z)$ :

$$\begin{aligned}\Psi(z) &= \operatorname{cn}^{1/2}(z+a) + \operatorname{cn}^{1/2}(z-a) \\ \Omega(z) &= (\operatorname{cn}^{1/2}(z+a) \cdot \operatorname{cn}^{1/2}(z-a))^{1/2}\end{aligned}$$

где  $\operatorname{cn}(z) = \operatorname{cn}(z|m)$  — эллиптический косинус Якоби,  $m$  — параметр. В соответствии с определением эллиптического косинуса функции  $\Psi(z)$  и  $\Omega(z)$  обладают действительными периодами  $8K$  и комплексными периодами  $4(K+iK')$  ( $K=K(m)$ ,  $K'=K(1-m)$ ) — полные эллиптические интегралы первого рода), и равенства

$$\begin{aligned}\Psi(z) &= \Psi(z+8jK+4nK+4niK') \\ \Omega(z) &= \Omega(z+8jK+4nK+4niK')\end{aligned}\tag{1.1}$$

выполняются для любых целых  $j$  и  $n$ .

Функция  $\Omega(z)$  в основном параллелограмме периодов имеет восемь точек ветвления, среди которых четыре нуля  $z_s$  ( $s=1, 4$ ) степени  $1/2$ :

$$\begin{aligned}z_1 &= 2K-a, & z_2 &= 2K+a \\ z_3 &= 6K-a, & z_4 &= 6K+a.\end{aligned}$$

Причем легко показать, что  $\Psi(z_s) \neq 0$  ( $s=1, 4$ ), если  $0 < a < 2K$ . Оставшиеся точки ветвления функции  $\Omega(z)$  ( $s=5, 8$ ) представляют собой полюсы степени  $1/2$  и совпадают с простыми полюсами функции  $\Psi(z)$ :

$$\begin{aligned}z_5 &= 4K+2iK'-a, & z_6 &= 4K+2iK'+a \\ z_7 &= 8K+2iK'-a, & z_8 &= 8K+2iK'+a\end{aligned}$$

Тогда двойкопериодическая функция

$$X_s(z) = \Psi(z)/\Omega(z)$$

имеет в параллелограмме периодов  $(0, 8K, 12K+4iK', 4K+4iK')$  лишь 8 точек ветвления  $z_s$  ( $s=1, 8$ ) — полюса степени  $1/2$ . Других полюсов и особенностей, кратных  $1/2$ , у функции  $X_s(z)$  нет.

Можно видеть, что

$$\Psi(z+4K) = -\Psi(z), \quad \Omega(z+4K) = -\Omega(z)$$

откуда следует  $X_s(z) = X_s(z+4K)$ . Нетрудно показать также, что

$$\begin{aligned} \Psi(z+2K+2iK') &= -i((1-m)/m)^{1/2} \Psi(z) \operatorname{cn}^{-1/2}(z+a) \operatorname{cn}^{-1/2}(z-a) \\ \Omega(z+2K+2iK') &= -i((1-m)/m)^{1/2} \Omega^{-1}(z) \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $X_s(z+2K+2iK') = X_s(z)$ . Таким образом, функция  $X_s(z)$  имеет основной параллелограмм периодов  $(0, 4K, 6K+2iK', 2K+2iK')$ , а точки  $z_3, z_5, z_7$  и  $z_4, z_6, z_8$  эквивалентны точкам  $z_1$  и  $z_2$  соответственно. В основном параллелограмме периодов функция  $X_s(z)$  аналитична всюду за исключением точек разреза  $|x-2K| < a$ , на концах которого имеет корневые особенности. На берегах самого разреза граничные значения функции  $X_s(z)$  удовлетворяют следующим условиям:

$$\operatorname{Re} X_s^+(x) = 0, \quad X_s^+(x) = -X_s^-(x) \quad (1.2)$$

на остальных участках действительной оси основного параллелограмма периодов выполнены равенства

$$\operatorname{Im} X_s^+(x) = 0, \quad X_s^+(x) = X_s^-(x)$$

Осуществляя предельные переходы  $m \rightarrow 0$  ( $K \rightarrow \pi/2, K' \rightarrow \infty$ ) и  $m \rightarrow 1$  ( $K \rightarrow \infty, K' \rightarrow \pi/2$ ), получаем для  $X_s(z)$  две периодические аналитические функции:

$$\begin{aligned} 2^{1/2} \cos a \cos z / (\cos a + \cos z)^{1/2} \\ 2^{1/2} \operatorname{ch} a \operatorname{ch} z / (\operatorname{ch} a + \operatorname{ch} z)^{1/2} \end{aligned}$$

с периодами  $2\pi$  и  $2\pi i$  соответственно.

Функция  $X_s(z)$  относительно центра разреза  $z=2K$  является четной

$$X_s(2K+z) = X_s(2K-z)$$

причем на его берегах функция  $X_s^+(x)$  удовлетворяет следующим условиям:

$$X_s^+(2K+\xi) = -X_s^+(2K-\xi), \quad |\xi| < a \quad (1.3)$$

Можно показать, что функция

$$X_a(z) = (\operatorname{cn}^{1/2}(z+a) - \operatorname{cn}^{1/2}(z-a)) / (\operatorname{cn}^{1/2}(z+a) \operatorname{cn}^{1/2}(z-a))^{1/2}$$

обладает всеми вышеперечисленными свойствами функции  $X_s(z)$ , но является нечетной относительно точки  $z=2K$ . Функции  $X_s, X_a$  и получаемые на их основе являются фундаментальными для решения задач теории трещин и тонких жестких включений, образующих двоякопериодическую решетку с периодами, пропорциональными  $4K$  и  $2K+2iK'$ . Для двоякопериодической решетки трещин, расположенных в вершинах прямоугольников (основной параллелограмм периодов  $-0, 4K, 4K+2iK', 2iK'$ ), удобно использовать вместо эллиптических косинусов эллиптические синусы Якоби:  $\operatorname{sn}(z|m)$ .

**2. Продольный сдвиг двоякопериодической системы трещин.** Рассмотрим антиплоскую деформацию изотропного тела, ослабленного двоякопериодической системой трещин, изображенной на фиг. 1. Без ограничения общности можно считать, что действительный период  $2T$  есть  $4K$ , а комплексный период  $T+iS=2(K+iK')$ . Для случая, когда  $2T \neq 4K, S \neq 2K'$ , процедура замены переменных и сведения задачи к рассматриваемому случаю приведена ниже применительно к плоской задаче.

В основном параллелограмме периодов трещина расположена на от-

разре  $|2K-x_1| < a$ . Напряжения  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{23}$  и перемещение  $u_3$  выражаются через одну аналитическую функцию комплексного переменного  $\varphi(z)$  ( $z=x_1+ix_2$ ):

$$\sigma_{23} + i\sigma_{13} = \Phi(z), \quad \mu u_3 = \text{Im } \varphi(z) \quad (2.1)$$

причем функция  $\Phi(z) = \varphi'(z)$  является джокопериодической. На берегах разрезов заданы постоянные усилия

$$\sigma_{23}^+(x) = \sigma_{23}^-(x) = -p \quad (2.2)$$

Пусть средние значения напряжений  $\langle \sigma_{13} \rangle$  и  $\langle \sigma_{23} \rangle$  известны. В соответствии с результатами п. 1 будем искать функцию  $\Phi(z)$  в виде линейной комбинации элементарных функций

$$\Phi(z) = AX_s(z) + CX_a(z) + B \quad (2.3)$$

Комплексные константы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  найдем путем удовлетворения граничным условиям. Из условия симметрии напряжений относительно точки  $z=2K$  (центра разреза) следует  $C=0$ . Из представлений (2.1) и условий (2.2) и (1.2) следует  $\text{Im } A=0$ ,  $\text{Re } B=-p$ . Из равенства

$$\text{Re} \int_0^{4K} \Phi(z) dz = 4K \langle \sigma_{23} \rangle \quad (2.4)$$

определяющего среднее значение  $\langle \sigma_{23} \rangle$  по периоду, следует значение константы  $A$ . Наконец, из аналогичного условия

$$\text{Re} \int_0^{2K+2iK'} \Phi(z) dz = 2(K^2 + K'^2)^{1/2} (\langle \sigma_{23} \rangle \cos \alpha - \langle \sigma_{13} \rangle \sin \alpha) \quad (2.5)$$

где  $\alpha = \text{arctg}(K'/K)$ , следует  $B'$  — мнимая часть константы  $B$ . Таким образом, функция

$$\Phi(z) = X_s(z) [2K(p + \langle \sigma_{23} \rangle)] / \left[ \int_0^{2K-a} X_s(x) dx \right] - p + iB' \quad (2.6)$$

(где  $B'$  определено из уравнения (2.5)) удовлетворяет всем граничным условиям. Нетрудно показать, что представление (2.3) при  $C=0$  (а следовательно, и (2.6)) удовлетворяет условиям непрерывности перемещений при обходе по любому замкнутому контуру, окружающему разрез. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_3^+}{\partial x_1} - \frac{\partial u_3^-}{\partial x_1} &= \text{Im}(\Phi^+(x_1) - \Phi^-(x_1)) / \mu \\ \int_{2K-a}^{2K+a} \left( \frac{\partial u_3^+}{\partial x_1} - \frac{\partial u_3^-}{\partial x_1} \right) dx_1 &= \frac{2A}{\mu} \text{Im} \int_{2K-a}^{2K+a} X_s^+(x) dx \end{aligned}$$

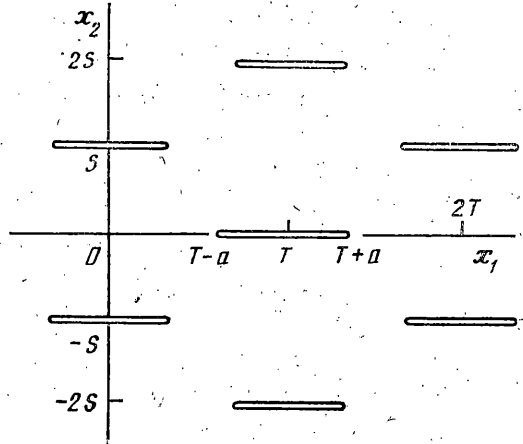
Последний интеграл равен нулю в силу (1.3).

Вычислим коэффициент интенсивности напряжений

$$K_{III} = \lim [2\pi(x-2K-a)]^{1/2} \sigma_{23}(x), \quad x \rightarrow 2K+a+0$$

в правом кончике трещины. Полагая  $x=2K+a+\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , получаем при  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$X_s(x) \rightarrow \sqrt{2} \text{cn}(K+a) / (-\varepsilon \sqrt{m_1} \text{cn}(K+a))^{1/2} = (2 \text{sd}(a) / \varepsilon)^{1/2}$$



Фиг. 1

где  $\text{sd}(a)$  — эллиптическая функция Якоби, выражающаяся через эллиптический синус и дельта амплитуды

$$\text{sd}(z) = \text{sn}(z)/\text{dn}(z)$$

В результате получаем

$$K_{\text{III}} = 4K(p + \langle \sigma_{23} \rangle) (\pi \text{sd}(a))^{1/2} \int_0^{2\pi - a} X_s(x) dx \quad (2.7)$$

При  $m \rightarrow 0$  эта формула переходит в известную [8, 9] формулу для 2 $\pi$ -периодической цепочки трещин

$$K_{\text{III}} = (p + \langle \sigma_{23} \rangle) (2\pi \text{tg } a/2)^{1/2}$$

Для трещин, расположенных в вершинах прямоугольников со сторонами  $4K$  по  $x_1$  и  $2K'$  по  $x_2$  легко получить

$$K_{\text{III}} = 4K (\pi \text{sn}(a))^{1/2} (p + \langle \sigma_{23} \rangle) \int_a^{2\pi} (\text{sn } 1/2(x+a) + \text{sn } 1/2(x-a)) (\text{sn } 1/2(x+a) \text{sn } 1/2(x-a))^{-1/2} dx$$

откуда, при  $m \rightarrow 1$  ( $K \rightarrow \infty$ ,  $K' \rightarrow \pi/2$ ), учитывая, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{\text{th } 1/2(x+a) + \text{th } 1/2(x-a)}{(\text{th } 1/2(x+a) \text{th } 1/2(x-a))^{1/2}} dx = 4K + O\left(\frac{a}{K}\right) \quad (K \rightarrow \infty)$$

получаем известный результат для  $\pi$ -периодической системы разрезов, расположенных вдоль оси  $x_2$  и параллельных оси  $x_1$  [8]:

$$K_{\text{III}} = (p + \langle \sigma_{23} \rangle) (\pi \text{th } a)^{1/2}$$

Прежде чем переходить к плоской задаче, сделаем три замечания:

Предложенный подход путем соответствующей замены переменных применим для анизотропной среды и для произвольного взаимного расположения трещин. Если при этом в основном параллелограмме периодов имеется одна трещина, то предложенный подход применим практически дословно, за исключением того, что параметр  $m$  становится комплексным. Соответственно становятся комплексными величины  $K = K(m)$  и  $K' = K(1-m)$ . Если в основном параллелограмме периодов больше одной трещины, то представления для функций  $X_s(z)$  несущественно усложняются;

введенная функция  $X_a(z)$  играет ту же роль для решения задач с тонкими жесткими включениями, что и функция  $X_s(z)$  для задач теории трещин;

можно показать также, используя связь между эллиптическими функциями Якоби и Вейерштрасса, что решение (2.6) в рассматриваемом классе единственно [12].

### 3. Случай самоуравновешенных четных нагрузок на берегах трещин.

Для дальнейшего удобно перейти от эллиптических косинусов в функции  $X_s(z)$  к другим эллиптическим функциям Якоби  $\text{dn}(z) \equiv \text{dn}(z|m)$  и  $\text{cs}(z) \equiv \text{cs}(z|m)$ . Используя соотношение между двенадцатью основными эллиптическими функциями [10], легко показать, что

$$X_s(z) = 2\xi / (\xi^2 - 1)^{1/2} \\ \xi = \text{cs } 1/2z \text{cs } 1/2a (\text{dn } 1/2z \text{dn } 1/2a)^{-1}$$

двойкопериодическая аналитическая функция с основными периодами  $8K$  и  $4(K+ik')$ . Когда  $z$  действительно ( $z = x_1$ ) и изменяется от  $2K-a$  до  $2K+a$ , величина  $\xi$  также действительна ( $\xi = \xi$ ), и пробегает значения от 1 до  $-1$ . Таким образом  $|x_1 - 2K| < a \Leftrightarrow |\xi| < 1$ .

Введем набор эллиптических функций  $\omega_n(z)$  по правилам

$$\omega_n(z) = (\xi - (\xi^2 - 1)^{1/2})^{2n+1} / (\xi^2 - 1)^{1/2} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (3.1)$$

и установим их свойства. Согласно определению функция  $[\xi - (\xi^2 - 1)^{1/2}]^n$  является двойкопериодической с основными периодами  $8K$  и  $4(K+ik')$ . Можно показать, что при изменении аргумента этой функции на величину полупериода она меняет знак. Следовательно, квадрат этой функции  $[\xi - (\xi^2 - 1)^{1/2}]^{2n}$  обладает периодами  $4K$  и  $2(K+ik')$ .

Таким образом, функция

$$\omega_n(z) = {}^{1/2}(X_s(z) - 1) (\zeta - (\zeta^2 - 1)^{1/2})^{2n}$$

двойкопериодическая с периодами  $4K$  и  $2(K + iK')$  для любого  $n \geq 0$ . В основном параллелограмме периодов функция  $\omega_n(z)$  аналитична всюду за исключением точек разреза  $|2K - x_1| < a$ , на берегах которого выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \omega_n^+(x_1) - \omega_n^-(x_1) &= -2iT_{2n+1}(\xi)/(1 - \xi^2)^{1/2} \\ \omega_n^+(x_1) + \omega_n^-(x_1) &= -2U_{2n}(\xi) \\ \xi &= \text{cs}^{1/2}x_1 \text{cs}^{1/2}a / (\text{dn}^{1/2}x_1 \text{dn}^{1/2}a) \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $T_n(\xi)$ ,  $U_n(\xi)$  — полиномы Чебышева первого и второго рода соответственно. На остальных отрезках действительной оси внутри основного параллелограмма периодов функции  $\omega_n(x_1)$  действительны.

Используем функцию  $\omega_n(z)$  для решения двойкопериодической задачи о трещинах, изображенных на фиг. 1, при продольном сдвиге в случае, когда на берегах трещин заданы произвольные четные относительно центров трещин усилия:

$$\sigma_{23}^+(x_1) = \sigma_{23}^-(x_1) = -p(x_1), \quad |x_1 - 2K| < a \quad (3.3)$$

Будем искать комплексный потенциал  $\Phi(z)$  задачи в виде

$$\Phi(z) = B + \sum_n b_n \omega_n(z) \quad (3.4)$$

где  $B$  — комплексная, а  $b_n$  — действительные константы. Используя представления (2.1), получим, удовлетворяя граничным условиям (3.3):

$$\sum_n b_n U_{2n}(\xi) = p(x_1) + \text{Re } B \quad (3.5)$$

К этому уравнению необходимо добавить два равенства (2.4) и (2.5), выражающие условия удовлетворения напряжений в среднем

$$\sum_n b_n \left\{ 2 \int_0^{2K-a} \omega_n(x) dx - \int_{2K-a}^{2K+a} U_{2n} \left( \frac{\text{cs}^{1/2}x \text{cs}^{1/2}a}{\text{dn}^{1/2}x \text{dn}^{1/2}a} \right) dx \right\} = 4K \langle \sigma_{23} \rangle - \text{Re } B \quad (3.6)$$

$$\text{Re} \int_0^{2K+2iK'} \Phi(z) dz = 2(K^2 + K'^2)^{1/2} (\langle \sigma_{23} \rangle \cos \alpha - \langle \sigma_{13} \rangle \sin \alpha)$$

Разлагая функцию  $p(x_1)$  в ряд по полиномам Чебышева второго рода

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n U_{2n} \left( \frac{\text{cs}^{1/2}x \text{cs}^{1/2}a}{\text{dn}^{1/2}x \text{dn}^{1/2}a} \right) \quad (3.7)$$

и, сравнивая с (3.5), находим

$$b_n = c_n, \quad n \geq 1 \quad (3.8)$$

тогда для определения трех оставшихся неизвестных констант  $b_0$ ,  $B'$ ,  $B''$  ( $B = B' + iB''$ ) имеем систему трех линейных уравнений:  $b_0 - B' = c_0$  и два уравнения получаются путем подстановки (3.8) в (3.6). Выполнение условия непрерывности перемещений при обходе по любому замкнутому контуру, целиком охватывающему один разрез, устанавливается аналогично тому, как это было сделано в п. 2.

**4. Двойкопериодическая система трещин в анизотропной среде.** Перейдем к рассмотрению плоской задачи теории упругости для двойкопериодической системы трещин в анизотропной среде. Для простоты будем счи-

татъ среду ортотропной с плоскостями упругой симметрии, совпадающими с координатными плоскостями. Комплексные корни характеристического уравнения [11] в этом случае чисто мнимые:  $\mu_1 = i\beta_1$ ,  $\mu_2 = i\beta_2$ . Рассмотрим ромбическую решетку трещин, изображенную на фиг. 1. Период решетки по оси  $x_1$  равен  $2T$ , по оси  $x_2 - 2S$  ( $2T$  и  $2S$  — диагонали ромба). Длина трещины —  $2a$ . Как известно [11], напряжения  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{22}$  и смещения  $u_1$  и  $u_2$  выражаются через два комплексных потенциала  $\Phi_1(z_1)$  и  $\Phi_2(z_2)$  ( $z_r = x_1 + i\beta_r x_2$ ,  $r=1, 2$ ). От комплексных переменных  $z_1$  и  $z_2$  перейдем к новым переменным  $z_1 = z_1/\alpha_1$  и  $z_2 = z_2/\alpha_2$ , и введем новые функции комплексных переменных

$$\Phi_r(z_r) = \varphi_r(\alpha_r z_r), \quad \Phi_r'(z_r) = \alpha_r^{-1} \varphi_r'(\alpha_r z_r) \\ \alpha_r = T/K(m_r), \quad r=1, 2$$

где  $K(m)$  — полный эллиптический интеграл первого рода;  $m_1$  и  $m_2$  — действительные параметры, определенные из уравнений

$$\beta_r SK(m_r) = TK(1-m_r), \quad r=1, 2$$

Обозначим для краткости  $K_r = K(m_r)$ ,  $K_r' = K(1-m_r)$ .

Напряжения и перемещения, согласно формулам [11], выразятся через вновь введенные функции  $\varphi_r(z_r)$ ,  $\Phi_r(z_r)$  следующим образом:

$$\sigma_{11} = -2 \operatorname{Re}[\beta_1^2 \Phi_1(z_1) + \beta_2^2 \Phi_2(z_2)] \quad (4.1) \\ \sigma_{12} = 2 \operatorname{Im}[\beta_1 \Phi_1(z_1) + \beta_2 \Phi_2(z_2)], \quad \sigma_{22} = 2 \operatorname{Re}[\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2)] \\ u_1 = 2 \operatorname{Re}[p_1 \varphi_1(z_1) + p_2 \varphi_2(z_2)], \quad u_2 = 2 \operatorname{Re}[q_1 \varphi_1(z_1) + q_2 \varphi_2(z_2)]$$

Функция  $\Phi_r(z_r)$  является двоякопериодической с действительным периодом  $4K_r$  и комплексным периодом  $2(K_r + iK_r')$ . Внутри основного параллелограмма периодов она аналитична всюду за исключением точек разреза  $[2K_r - a_r, 2K_r + a_r]$ , где  $a_1 = a/\alpha_1$ ,  $a_2 = a/\alpha_2$ .

Вводя эллиптические функции

$$\operatorname{cs}(^{1/2}z_r) = \operatorname{cs}(^{1/2}z_r | m_r), \quad \operatorname{dn}(^{1/2}z_r) = \operatorname{dn}(^{1/2}z_r | m_r) \\ \xi_r = \operatorname{cs}(^{1/2}z_r) \operatorname{cs}(^{1/2}a_r) \operatorname{dn}^{-1}(^{1/2}z_r) \operatorname{dn}^{-1}(^{1/2}a_r) \\ \omega_{rn}(z_r) = (\xi_r - (\xi_r^2 - 1)^{1/2})^{2n+1} / (\xi_r^2 - 1)^{1/2}$$

для  $r=1, 2$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$  аналогично изложенному выше, будем искать комплексные потенциалы задачи в виде

$$\Phi_1(z_1) = ^{1/2} \frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1} \left[ C_1 + \sum_n b_{1n} \omega_{1n}(z_1) \right] \quad (4.2) \\ \Phi_2(z_2) = ^{1/2} \frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2} \left[ C_2 + \sum_n b_{2n} \omega_{2n}(z_2) \right]$$

Выбор потенциалов в таком виде автоматически удовлетворяет условию отсутствия скачка перемещений при обходе по любому замкнутому контуру вокруг разреза:

$$\int_{T-a}^{T+a} \left\{ \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right] + i \left[ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right] \right\} dx_1 = 0$$

Для простоты ограничимся случаем, когда нагрузка на берегах трещин постоянна

$$\sigma_{22}^+(x) + \sigma_{22}^-(x) = -2p, \quad \sigma_{22}^+(x) = \sigma_{22}^-(x) \quad (4.3) \\ \sigma_{12}^+(x) + \sigma_{12}^-(x) = 0, \quad \sigma_{12}^+(x) - \sigma_{12}^-(x) = 0$$

Средние напряжения  $\langle \sigma_{22} \rangle \neq 0$ ,  $\langle \sigma_{12} \rangle = 0$ ,  $\langle \sigma_{11} \rangle \neq 0$  определяются формулами

$$\int_0^{T-a} \sigma_{22}(x_1, 0) dx_1 = T \langle \sigma_{22} \rangle + ap \quad (4.4)$$

$$\int_0^{T-a} \sigma_{12}(x_1, 0) dx_1 = 0, \quad \int_0^S \sigma_{11}(0, x_2) dx_2 = S \langle \sigma_{11} \rangle$$

Принимая  $C_1 = C_2 = C$ ,  $b_{rk} = \overline{b_{rk}}$  легко показать, что нижние уравнения (4.3) и второе уравнение (4.4) удовлетворяются тождественно. Первые два уравнения (4.3) приводятся к виду

$$\operatorname{Re} C + \sum_n \frac{\beta_2 b_{1n} U_{2n}(\xi_1) - \beta_1 b_{2n} U_{2n}(\xi_2)}{\beta_2 - \beta_1} = -p$$

$$\sum_n b_{1n} \frac{T_{2n+1}(\xi_1)}{(1 - \xi_1^2)^{1/2}} = \sum_n b_{2n} \frac{T_{2n+1}(\xi_2)}{(1 - \xi_2^2)^{1/2}} \quad (4.5)$$

$$\xi_r = \zeta_r \begin{cases} \operatorname{Im} z_r = 0 \\ |\operatorname{Re} z_r - 2K_r| < a_r \end{cases}, \quad |\xi_r| < 1 \Leftrightarrow |T - x_1| < a$$

Первое условие (4.4) преобразуется к алгебраическому уравнению:

$$(T-a) \operatorname{Re} C + \sum_n \frac{\beta_2 b_{1n} \Omega_{1n} - \beta_1 b_{2n} \Omega_{2n}}{\beta_2 - \beta_1} = T \langle \sigma_{22} \rangle + ap$$

$$\Omega_{rn} = \frac{1}{\alpha_r} \int_0^{2K_r - a} \omega_{rn}(x) dx \quad (4.6)$$

Уравнения (4.5), (4.6) легко сводятся к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно  $b_{1n}$  либо относительно  $b_{2n}$ , причем для получения надежного решения достаточно обрезать систему уже на  $n=4$ . Такая процедура достаточно проста: можно, например, разложить гладкую функцию  $((1 - \xi_2^2)/(1 - \xi_1^2))^{1/2} T_{2n+1}(\xi_1)$  в ряд по полиномам  $T_{2j+1}(\xi_2)$ , выразить из второго уравнения (4.5)  $b_{2n}$  через  $b_{1n}$ , подставить их в первое уравнение (4.5), и, разлагая  $U_{2n}(\xi_2)$  в ряд по полиномам  $U_{2j}(\xi_1)$ , приравнять члены при одинаковых полиномах  $U_{2n}(\xi_1)$ . Напомним, что величины  $\xi_1$  и  $\xi_2$  разные, хотя и однозначно связаны друг с другом. После определения  $b_{1n}$ ,  $b_{2n}$ ,  $\operatorname{Re} C$ , величина  $\operatorname{Im} C$  находится из последнего уравнения (4.4).

Коэффициент интенсивности напряжений  $K_I$  легко вычисляется через константы  $b_{rk}$ :

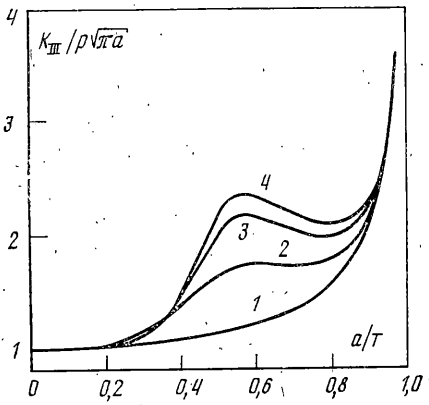
$$K_I = \sum_k \frac{\beta_2 b_{1k} (\pi \alpha_1 \operatorname{sd} a_1)^{1/2} - \beta_1 b_{2k} (\pi \alpha_2 \operatorname{sd} a_2)^{1/2}}{\beta_2 - \beta_1} \quad (4.7)$$

На фиг. 2-4 приведены графики относительного изменения коэффициента интенсивности напряжений для продольного сдвига  $K_{III}/p(\pi a)^{1/2}$  (фиг. 2) и плоской деформации  $K_I/p(\pi a)^{1/2}$  (фиг. 3, 4) в зависимости от относительной длины трещины  $a/T$  для различных параметров  $S/T$ . На фиг. 2 кривым 1, 2, 3, 4 соответствуют параметры  $S/T=1, 0; 0,325; 0,22; 0,19$ . На фиг. 3, 4 кривым 1, 2, 3 соответствуют параметры  $S/T=0,68; 0,5; 0,313$ . Причем фиг. 3 и 4 отличаются различной степенью анизотропии среды  $\beta_1=1, \beta_2=2$  ( $E_{11} > E_{22}$ ) для фиг. 4 и  $\beta_1=1, \beta_2=0,5$  ( $E_{11} < E_{22}$ ) для фиг. 3.

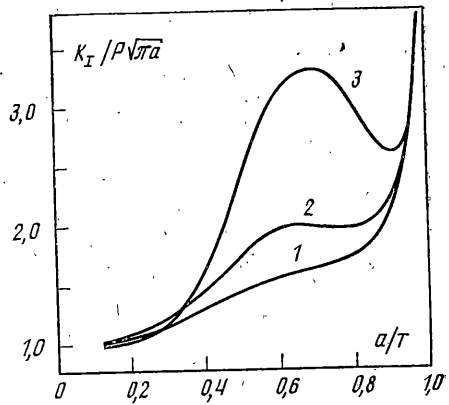
Анализ графиков функций  $K/p(\pi a)^{1/2}$ , фиг. 2-4 позволяет сделать следующие выводы:

на взаимодействие трещин в анизотропной среде существенное влияние оказывает степень анизотропии;

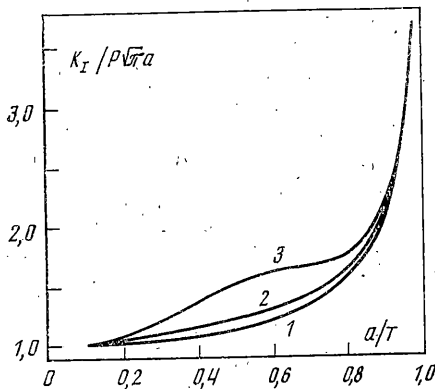
в случаях плоской деформации при  $E_{22} > E_{11}$  и продольного сдвига при некоторых начальных значениях параметра  $a/T$  ( $0,6 \leq a/T \leq 0,8$ ) возможно устойчивое подрастание («упрочнение») трещин при росте внешней нагрузки, что впервые было получено в [1, 2]. Однако, абсолютные значения



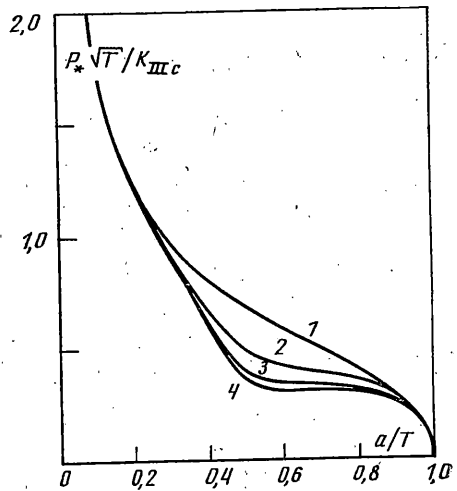
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

разрушающих нагрузок существенно ниже, чем разрушающие напряжения для одиночной трещины длины  $2a$ :  $K_c / (\pi a)^{1/2}$  и даже, чем для  $2T$ -периодической цепочки трещин:

$$K_c / (2T \operatorname{tg}^{1/2}(\pi a/T))^{1/2}$$

что противоречит результатам [1, 2]. Этот факт проиллюстрирован на фиг. 5 графиками зависимости разрушающей нагрузки  $p_* T^{1/2} / K_{IIIc}$  от  $a/T$ , нумерация кривых соответствует нумерации на фиг. 2. Ход зависимости разрушающей нагрузки  $\langle \sigma_{22} \rangle^*$  для плоского случая в целом аналогичен зависимостям на фиг. 5.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кудрявцев Б. А., Паргон В. З. Первая основная задача теории упругости для двоякопериодической системы разрезов. // В сб.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М.: Наука, 1972. С.
2. Паргон В. З. Об одной оценке взаимного упрочения трещин при их шахматном расположении. // ПМТФ. 1965. № 5. С. 94-97.
3. Фильштинский Л. А. Взаимодействие двоякопериодической системы прямолинейных трещин в изотропной среде. // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 5. С. 906-914.
4. Саврук М. П. Двоякопериодическая система трещин продольного сдвига в упругом теле. // Прикл. механика. 1975. Т. 11. № 12. С. 113-117.
5. Линьков А. М. Интегральное уравнение двоякопериодической задачи теории упругости о двоякопериодической системе разрезов, нагруженных самоуравновешенными нагрузками. // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 2. С. 70-74.
6. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацкышин А. П. Двоякопериодическая задача теории трещин. // Проблемы прочности. 1976. № 12. С. 63-68.



7. *Новиков В. Г., Тулинов Б. М.* Двоюкопериодическая система прямолинейных трещин продольного сдвига в упругом теле. // ПМТФ. 1985. № 1. С. 148–151.
8. *Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П.* О хрупких трещинах продольного сдвига. // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 6. С. 1110–1119.
9. *Парис П., Си Дж.* Анализ напряженного состояния около трещин. // В сб. Прикладные вопросы вязкости разрушения. М.: Мир, 1968. С. 54–142.
10. *Справочник по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовица, М. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.*
11. *Лезницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
12. *Газов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

Москва

Поступила в редакцию  
8.06.1987