МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1990

УДК 539.3

Г. Л. БРОВКО

СВОЙСТВА И ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ОТ ТЕНЗОРНЫХ ПРОЦЕССОВ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Введено семейство производных по времени от тензоров второго ранга, обобщающее известные в механике сплошной среды понятия скоростей изменения тензоров. Выведены основные формулы исчисления производных данного семейства, с использованием аппарата хронологических экспонент получено специальное представление производных и формула их интегрирования. Для хронологических экспонент предложены некоторые простые тождества. Отмечены возможные приложения к моделированию поведения деформируемых сред.

1. Производные конвективно-коротационного типа и их обобщение. Для движения сплошной среды по лагранжеву закону $\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ ($\mathbf{y}, \mathbf{x}$ — радиус-векторы точки среды в актуальной и отсчетной конфигурациях, t — время) деформация материальной частицы среды в окрестности произвольной фиксированной материальной точки, идентифицированной радиус-вектором $\mathbf{x}$, описывается аффинором деформации [1—6] (символ $:=$ означает равенство-определение величины, стоящей со стороны двоеточия):

$$\mathbf{A}:=\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{f}=\mathbf{QX}=\mathbf{YQ} \quad (\det\mathbf{A}\neq 0) \tag{1.1}$$

где $\nabla_{\mathbf{x}}$ — оператор-градиент по $\mathbf{x}$, $\mathbf{Q}(t)$ — ортогональная, $\mathbf{X}(t)$ и $\mathbf{Y}(t)$ — симметричные положительно определенные правая и левая компоненты полярного разложения [7].

Для класса тензоров второго ранга $\mathbf{Z}(t)$ (будем называть их [8, 9] пространственно ориентированными, или кратко — левыми; в литературе такие тензоры называются также «независимыми от системы отсчета», «индифферентными», «объективными» [3, 5, 6]), преобразующихся при изменении системы отсчета к тензорам $\mathbf{Z}_*(t)$ по формулам вида

$$\mathbf{Z}_*(t)=\mathbf{\Theta}(t)\mathbf{Z}(t)\mathbf{\Theta}^T(t) \tag{1.2}$$

где $\mathbf{\Theta}(t)$ — ортогональный тензор перехода к новой системе отсчета, известные конвективные производные по времени определяются формулами [1—6]:

$$\begin{aligned} &\mathbf{Z}^{\wedge}:=\mathbf{Z}^{\cdot}+\mathbf{D}^T\mathbf{Z}+\mathbf{ZD}, \quad \mathbf{Z}^{\vee}:=\mathbf{Z}^{\cdot}-\mathbf{DZ}-\mathbf{ZD}^T \\ &\mathbf{Z}^{<}:=\mathbf{Z}^{\cdot}+\mathbf{D}^T\mathbf{Z}-\mathbf{ZD}^T, \quad \mathbf{Z}^{>}:=\mathbf{Z}^{\cdot}-\mathbf{DZ}+\mathbf{ZD} \end{aligned} \tag{1.3}$$

где точкой обозначена полная (материальная) производная по времени, $\mathbf{D}:=\nabla_{\mathbf{y}}\mathbf{v}\equiv\mathbf{A}^{\cdot}\mathbf{A}^{-1}$ — тензор скоростей дисторсий данного движения ($\mathbf{v}$ — вектор скоростей точек тела, $\nabla_{\mathbf{y}}$ — оператор-градиент по $\mathbf{y}$). Различные коротационные производные [1—6, 8—16] определяются формулой

$$\mathbf{Z}^{cr}:=\mathbf{Z}^{\cdot}-\mathbf{\Psi Z}+\mathbf{Z\Psi} \tag{1.4}$$

где $\mathbf{\Psi}(t)$ — антисимметричный тензор. В частности, если $\mathbf{\Psi}\equiv\mathbf{\Omega}:=\frac{1}{2}(\mathbf{D}-\mathbf{D}^T)$ — тензор скоростей вращений (спин) данного движения, то производная (1.4) совпадает с производной Яуманна [1—6] $\mathbf{Z}^*$, если же $\mathbf{\Psi}\equiv\mathbf{Q}^{\cdot}\mathbf{Q}^T$ и выбрана начальная (недеформированная) конфигурация в качестве отсчетной, то (1.4) совпадает с нейтральной производной [8—14] $\mathbf{Z}^{\circ}$. Другие специальные виды производных левых тензоров по времени

[1—6] получаются из (1.3), (1.4) добавлением левых тензорных слагаемых. Так, производная в смысле Трусделла [1, 5, 6] $\mathbf{Z}^{\nabla}$ имеет вид

$$\mathbf{Z}^{\nabla}\equiv\mathbf{Z}^{\vee}+\mathbf{Z}\,\mathrm{tr}(\mathbf{D}) \tag{1.5}$$

Имея в виду обобщение и исследование с единых позиций свойств производных (1.3)—(1.5) и их частичных обобщений [17], введем семейство линейных операторов от $\mathbf{Z}(t)$ — производных по времени конвективно-ротационного типа, определяемое формулой

$$D^{t}_{(p,q,r)}[\mathbf{Z}]:=\mathbf{Z}^{\cdot}-\mathbf{\Psi Z}+\mathbf{Z\Psi}+p\mathbf{\Phi Z}+q\mathbf{Z\Phi}+r\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Phi})\mathbf{Z} \tag{1.6}$$

где $\mathbf{\Psi}(t)$ и $\mathbf{\Phi}(t)$ — некоторые антисимметричный и симметричный тензоры физической размерности скорости деформации, определяемые движением среды, p, q, r — безразмерные константы. Очевидно, в частности, что если $\mathbf{\Phi}\equiv\mathbf{V}:={}^1/_2(\mathbf{D}+\mathbf{D}^T)$ — тензор скоростей деформаций и $\mathbf{\Psi}\equiv\mathbf{\Omega}$, имеем

$$\begin{gathered} D^{t}_{(1,1,0)}[\mathbf{Z}]\equiv\mathbf{Z}^{\wedge},\quad D^{t}_{(-1,-1,0)}[\mathbf{Z}]\equiv\mathbf{Z}^{\vee},\quad D^{t}_{(1,-1,0)}[\mathbf{Z}]\equiv\mathbf{Z}^{<} \\ D^{t}_{(-1,1,0)}[\mathbf{Z}]\equiv\mathbf{Z}^{>},\quad D^{t}_{(-1,-1,1)}[\mathbf{Z}]\equiv\mathbf{Z}^{\nabla},\quad D^{t}_{(0,0,0)}[\mathbf{Z}]\equiv\mathbf{Z}^{*} \end{gathered} \tag{1.7}$$

$$(D^{t}_{(0,0,0)}[\mathbf{Z}]\equiv\mathbf{Z}^{\circ}\ \text{при}\ \mathbf{\Psi}\equiv\mathbf{Q}^{\cdot}\mathbf{Q}^T)$$

Отметим, что оператор (1.6) замкнут в множестве (будем называть отображение замкнутым в некотором множестве, если оно отображает всякий элемент из пересечения своей области определения с этим множеством в элемент из этого множества) левых тензоров $\mathbf{Z}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{\Phi}$ — левый тензор, а тензор $\mathbf{\Psi}$ при переходе к новой системе отсчета (с ортогональным тензором $\mathbf{\Theta}$) преобразуется к тензору $\mathbf{\Psi}_*$ по формуле

$$\mathbf{\Psi}_*=\mathbf{\Theta}^{\cdot}\mathbf{\Theta}^T+\mathbf{\Theta\Psi\Theta}^T \tag{1.8}$$

2. Свойства оператора $D^{t}_{(p,q,r)}[\mathbf{Z}]$. Установим прежде всего математические свойства производной (1.6), проявляющиеся в произвольных движениях (деформациях) среды. Процесс движения (аффинор $A(t)$), равно как и дифференцируемый тензор $\mathbf{Z}(t)$ будем считать достаточно гладкими по времени, тензоры $\mathbf{\Phi}(t)$ и $\mathbf{\Psi}(t)$ — определенными для заданного процесса движения в течение всего времени. Тогда справедлива

Теорема 1. В произвольных движениях деформируемой среды для произвольных дифференцируемых тензоров $\mathbf{Z}(t)$, $\mathbf{Z}_1(t)$, $\mathbf{Z}_2(t)$ при любых p, q, r для (1.6) справедливы формулы

$$D^{t}_{(p,q,r)}[\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2]\equiv D^{t}_{(p,q',r')}[\mathbf{Z}_1]\mathbf{Z}_2+\mathbf{Z}_1D^{t}_{(p',q,r'')}[\mathbf{Z}_2] \tag{2.1}$$

$$D^{t}_{(p,q,r)}[\mathbf{Z}^T]\equiv(D^{t}_{(q,p,r)}[\mathbf{Z}])^T \tag{2.2}$$

$$D^{t}_{(p,q,r)}[\mathbf{Z}^{-1}]\equiv-\mathbf{Z}^{-1}D^{t}_{(-q,-p,-r)}[\mathbf{Z}]\mathbf{Z}^{-1} \tag{2.3}$$

$$\mathrm{tr}(D^{t}_{(p,q,r)}[\mathbf{Z}]\mathbf{Z}^{k-1})\equiv k^{-1}(\mathrm{tr}(\mathbf{Z}^k))^{\cdot}+(p+q)\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Phi Z}^k)+r\,\mathrm{tr}(\mathbf{\Phi})\,\mathrm{tr}(\mathbf{Z}^k) \tag{2.4}$$

где p', q', r', r'' — любые такие, что $p'+q'=0$, $r'+r''=r$; k — любое натуральное число, причем в формуле (2.3) тензор $\mathbf{Z}(t)$ предполагается невырожденным.

Следствие 1.1. В условиях теоремы 1 в случае $p+q=0$ и $r=0$, и только в этом случае справедливы соотношения вида

$$D^{t}_{(p,-p,0)}[\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2]\equiv D^{t}_{(p,-p,0)}[\mathbf{Z}_1]\mathbf{Z}_2+\mathbf{Z}_1D^{t}_{(p,-p,0)}[\mathbf{Z}_2] \tag{2.5}$$

$$D^{t}_{(p,-p,0)}[\mathbf{Z}^{-1}]\equiv-\mathbf{Z}^{-1}D^{t}_{(p,-p,0)}[\mathbf{Z}]\mathbf{Z}^{-1} \tag{2.6}$$

$$D^{t}_{(p,-p,0)}[\mathbf{Z}]\,|_t=0\Rightarrow J_k^{\cdot}[\mathbf{Z}]\,|_t=0\qquad(k=1,\ldots,n) \tag{2.7}$$

где $J_k(\mathbf{Z})$ — независимые инварианты тензора $\mathbf{Z}$, n — размерность основного векторного пространства.

Следствие 1.2. В условиях теоремы 1 в случае $p=q$ (r — любое) и только в этом случае имеет место формула вида

$$D^t_{(p,p,r)}[\mathbf{Z}^T]\equiv(D^t_{(p,p,r)}[\mathbf{Z}])^T \tag{2.8}$$

Следствие 1.3. В случае $p+q=0$ (r — любое) и только в этом случае оператор (1.6) замкнут в множестве шаровых тензоров, а также в множестве девиаторов.

3. Структура и интегрирование производной $D^t_{(p,q,r)}[\mathbf{Z}]$. Понятие хронологической экспоненты [7] тензорного процесса $\mathbf{\Gamma}(t)$ и аналогичное понятие обратной хронологической (антихронологической) экспоненты тензорного процесса $\mathbf{H}(t)$:

$$T^+\exp\left(\int_{t_0}^{t}\mathbf{\Gamma}(\tau)\,d\tau\right):=\lim_{\max\limits_k \Delta t_k\to 0}\exp(\mathbf{\Gamma}(t_{n-1})\Delta t_n)\cdot\ldots\cdot\exp(\mathbf{\Gamma}(t_1)\Delta t_2)\cdot\exp(\mathbf{\Gamma}(t_0)\Delta t_1),$$
$$T^-\exp\left(\int_{t_0}^{t}\mathbf{H}(\tau)\,d\tau\right):=\lim_{\max\limits_k \Delta t_k\to 0}\exp(\mathbf{H}(t_0)\Delta t_1)\cdot\exp(\mathbf{H}(t_1)\Delta t_2)\cdot\ldots\cdot\exp(\mathbf{H}(t_{n-1})\Delta t_n), \tag{3.1}$$

где $t_0<t_1<\ldots<t_n=t$, $\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$, позволяют представить решения $\mathbf{\Delta}(t)$ и $\mathbf{\Lambda}(t)$ дифференциальных тензорных уравнений (второго ранга):

$$\mathbf{\Delta}^{\boldsymbol{\cdot}}\mathbf{\Delta}^{-1}=\mathbf{\Gamma},\quad \mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{\Lambda}^{\boldsymbol{\cdot}}=\mathbf{H} \tag{3.2}$$

соответственно в виде [7]:

$$\mathbf{\Delta}(t)=T^+\exp\left(\int_{t_0}^{t}\mathbf{\Gamma}(\tau)\,d\tau\right)\mathbf{\Delta}_0,\quad \mathbf{\Lambda}(t)=\mathbf{\Lambda}_0T^-\exp\left(\int_{t_0}^{t}\mathbf{H}(\tau)\,d\tau\right) \tag{3.3}$$

где $\mathbf{\Delta}_0$, $\mathbf{\Lambda}_0$ — произвольные тензоры-константы.

Теорема 2. В произвольных движениях деформируемой среды для всякого дифференцируемого $\mathbf{Z}(t)$ при любых p, q, r:

$$D^t_{(p,q,r)}[\mathbf{Z}]\equiv\mathbf{\Delta}(\mathbf{\Delta}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{\Lambda}^{-1})^{\boldsymbol{\cdot}}\mathbf{\Lambda} \tag{3.4}$$

где тензоры $\mathbf{\Delta}$ и $\mathbf{\Lambda}$ заданы в виде (3.3), причем

$$\mathbf{\Gamma}\equiv\mathbf{\Psi}-p\mathbf{\Phi}-r'\operatorname{tr}[\mathbf{\Phi}]\mathbf{I},\quad \mathbf{H}\equiv-\mathbf{\Psi}-q\mathbf{\Phi}-r''\operatorname{tr}[\mathbf{\Phi}]\mathbf{I} \tag{3.5}$$

здесь $\mathbf{I}$ — единичный тензор, а произвольные константы r', r'' таковы, что $r'+r''=r$.

Следствие 2.1. Для $p+q=0$, $r=0$ при любых r', r'' ($r'+r''=0$) в (3.5) имеем $\mathbf{\Lambda}\equiv\mathbf{\Delta}^{-1}$ и (3.4) в виде

$$D^t_{(p,-p,0)}[\mathbf{Z}]\equiv\mathbf{\Delta}(\mathbf{\Delta}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{\Delta})^{\boldsymbol{\cdot}}\mathbf{\Delta}^{-1} \tag{3.6}$$

Следствие 2.2. Для $p=q$, $r'=r''={}^1/_2r$ в (3.5) имеем $\mathbf{\Lambda}\equiv\mathbf{\Delta}^T$ и (3.4) в виде

$$D^t_{(p,p,r)}[\mathbf{Z}]\equiv\mathbf{\Delta}(\mathbf{\Delta}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{\Delta}^{-1T})^{\boldsymbol{\cdot}}\mathbf{\Delta}^T \tag{3.7}$$

Теорема 2 и следствия *2.1* и *2.2* устанавливают структуру производной (1.6) — оператора из множества (линейного пространства) ξ дифференцируемых тензорных процессов второго ранга $\mathbf{Z}(t)$ в множество (линейное пространство) Ξ тензорных процессов второго ранга — как суперпозицию автоморфизма $\xi\to\mathbf{\Delta}^{-1}\xi\mathbf{\Lambda}^{-1}=\xi$, полного (материального) дифференцирования $\xi\to\Xi$ и обратного автоморфизма $\Xi\to\mathbf{\Delta}\Xi\mathbf{\Lambda}=\Xi$. Из этого, в частности, следует, что применение оператора (1.6) в точности соответствует дифференцированию по времени компонент тензора $\mathbf{Z}$ в подвижном диадном базисе $(\mathbf{\Delta}\mathbf{a}_k)\otimes(\mathbf{\Lambda}^T\mathbf{e}_m)$, где $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{e}_m$ — произвольные фиксированные векторные базисы основного векторного пространства (k, $m=1,\ldots,n$).

Наделяя линейное пространство ξ структурой алгебры над полем действительных чисел (с обычным поточечным по t определением операций над тензорами) с единицей (тождественным единичным тензором $\mathbf{I}$) и инволюцией (транспонированием тензоров), получаем, что указанный автоморфизм $\xi \to \Delta^{-1}\xi\Lambda^{-1} = \xi$ (равно как и обратный автоморфизм $\Xi \to \Delta\Xi\Lambda = \Xi$) как линейного пространства в условиях следствия *2.1* ($\Lambda \equiv \Delta^{-1}$) расширяется на мультипликативную структуру ξ, т. е. является автоморфизмом ξ как алгебры с единицей, а в условиях следствия *2.2* ($\Lambda \equiv \Lambda^T$) — на инволютивную структуру ξ, т. е. является автоморфизмом ξ как линейного пространства с инволюцией (аналогично для Ξ). В условиях обоих следствий 2.1 и 2.2 имеем $\Delta \equiv \mathbf{Q}_\Psi$, $\Lambda \equiv \mathbf{Q}_\Psi^T$ (где $\mathbf{Q}_\Psi$ — ортогональный тензор: $\mathbf{Q}_\Psi^{-1} \equiv \mathbf{Q}_\Psi^T$), и отображение $\xi \to \Delta^{-1}\xi\Lambda^{-1} \equiv \mathbf{Q}_\Psi^T \xi \mathbf{Q}_\Psi = \xi$ есть автоморфизм ξ как алгебры с единицей и с инволюцией (аналогично для Ξ). Последний случай выделяет из (1.6) в точности множество всех коротационных производных $D^t_{(0,0,0)}[\mathbf{Z}] \equiv \mathbf{Z}^{cr}$ ($\mathbf{\Gamma} \equiv -\mathbf{H} \equiv \mathbf{\Psi} \equiv \mathbf{Q}_\Psi^{\cdot} \mathbf{Q}_\Psi^T$), соответствующих дифференцированию компонент тензора $\mathbf{Z}$ в подвижном диадном базисе $(\Delta\mathbf{a}_k) \otimes (\Lambda^T\mathbf{e}_m) \equiv (\mathbf{Q}_\Psi \mathbf{a}_k) \otimes (\mathbf{Q}_\Psi \mathbf{e}_m)$, получаемом ортогональным преобразованием («вращением», «ротацией») векторов фиксированного базиса $\mathbf{a}_k \otimes \mathbf{e}_m$, $k, m = 1, \ldots, n$ (откуда и проистекает название коротационных производных).

Назовем (1.6) эйлеровым (пространственным), а (3.4) — лагранжевым (материальным, или отсчетным) представлением производной $D^t_{(p,q,r)}[\mathbf{Z}]$. Заметим, что подобная (3.4) лагранжева структура присуща не всякому линейному дифференциальному оператору, задаваемому представлением эйлерового типа. Из лагранжева представления производной (3.4) вытекает правило ее интегрирования, а именно

Теорема 3. В условиях и обозначениях теоремы 2 выполнена формула

$$\mathbf{Z}(\mathbf{x}, t) = \Delta(\mathbf{x}, t) \int_{t_0}^{t} \Delta^{-1}(\mathbf{x}, \tau) D^t_{(p,q,r)}[\mathbf{Z}]\,|_{\mathbf{x},\tau} \Lambda^{-1}(\mathbf{x}, \tau)\, d\tau\, \Lambda(\mathbf{x}, t) \quad (\mathbf{Z}(\mathbf{x}, t_0) = 0) \tag{3.8}$$

В самом общем случае для производной (1.6) техника исчисления ее лагранжева представления (3.4) и формулы интегрирования (3.8) в практических приложениях может привлекать как приближенные способы вычисления хронологических экспонент (3.3) (приближенное решение соответствующих дифференциальных уравнений (3.2), прямое вычисление по (3.1), вычисление по известной формуле разложения в ряд [7] и т. п.), так и, например, следующие вспомогательные тождества:

$$T^- \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathbf{H}(\tau)\, d\tau\right) \equiv \left(T^+ \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathbf{H}^T(\tau)\, d\tau\right)\right)^T \equiv \left(T^+ \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \mathbf{H}(\tau)\, d\tau\right)\right)^{-1}$$

$$T^+ \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathbf{\Gamma}(\tau)\, d\tau\right) \equiv \Delta_1(t) \cdot T^+ \exp\left(\int_{t_0}^{t} \Delta_1^{-1}(\tau) \mathbf{\Gamma}_2(\tau) \Delta_1(\tau)\, d\tau\right) \Delta_{10}^{-1} \tag{3.9}$$

$$\Delta_1(t) := T^+ \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathbf{\Gamma}_1(\tau)\, d\tau\right) \Delta_{10}$$

для произвольных интегрируемых $\mathbf{H}(t)$, $\mathbf{\Gamma}_1(t)$, $\mathbf{\Gamma}_2(t)$, $\mathbf{\Gamma}(t) \equiv \mathbf{\Gamma}_1(t) + \mathbf{\Gamma}_2(t)$; Δ_{10} — произвольный тензор-константа.

4. Замечания и выводы. Нетрудно видеть, что выделенное по (1.2) множество левых тензорных процессов, для которого изначально введено семейство операторов (1.6), также составляет линейную алгебру (с единицей $\mathbf{I}$) тензорных процессов второго ранга с естественным (по параметру t) обычным определением операций, снабженную инволюцией (транспонированием) и содержащую мультипликативную группу невырожденных тензоров. Все операции этой структуры вместе с взятием тензорных инвариантов, составляющие алгебраическую основу практических выкладок и расчетов, охвачены (с учетом линейности оператора (1.6)) рассмотрением п. 2. А так как в данном контексте механический смысл придается лишь операторам (1.6), замкнутым в множестве левых тензоров (см.

замечание в конце п. 1), то результаты п. 2 дают основные формулы для исчисления, а п. 3 — для интегрирования производных (1.6) в этом множестве тензорных процессов механики сплошной среды. При этом следствия 1.1 и 1.2 (равно как 2.1 и 2.2) соответственно выделяют два точных подсемейства операторов (1.6), согласующихся по автоморфизмам их лагранжевой структуры (указанным в п. 3 образом) с мультипликативной (подсемейство с $p+q=0$, $r=0$) и инволютивной (подсемейство с $p=q$ и любым r) структурой алгебры левых тензоров второго ранга так, что для них сохраняются некоторые классические формулы и свойства обычных производных тензоров по параметру. А именно, для первого подсемейства выполняется классическое правило Лейбница дифференцирования произведения (2.5), формула дифференцирования обратного тензора (2.6), формулы (2.7) для производных от инвариантов, а также сохранение девиаторных и шаровых свойств тензоров (следствие (1.3)), для второго подсемейства — перестановочность с операцией транспонирования (2.8) и, следовательно, сохранение симметричности (антисимметричности) тензоров. Следствия п. 3 дают характерную форму лагранжевых представлений производных из этих подсемейств, выраженную соответственно через соотношения (автоморфизмы) подобия (следствие (2.1) для первого подсемейства) и конгруэнции (следствие (2.2) для второго подсемейства). Подсемейства пересекаются по множеству коротационных производных $\overset{t}{D}_{(0,0;0)}[\mathbf{Z}]\equiv\mathbf{Z}^{\mathrm{cr}}$. Все известные в механике сплошной среды производные (левых) тензоров по времени относятся к этим подсемействам. Так, следствия 1.1, 1.3 и 2.1 распространяются на конвективные производные $\mathbf{Z}^{<}$, $\mathbf{Z}^{>}$ и все коротационные производные $\mathbf{Z}^{\mathrm{cr}}$, включая $\mathbf{Z}^{*}$ и $\mathbf{Z}^{\circ}$, следствия 1.2 и 2.2 — на производные $\mathbf{Z}^{\wedge}$, $\mathbf{Z}^{\vee}$, $\mathbf{Z}^{\nabla}$ и все $\mathbf{Z}^{\mathrm{cr}}$. Для этих производных следствия 2.1, 2.2 дают лагранжевы представления в форме

$$\mathbf{Z}^{\wedge}\equiv\mathbf{A}^{-1T}(\mathbf{A}^{T}\mathbf{Z}\mathbf{A})^{\cdot}\mathbf{A}^{-1},\quad \mathbf{Z}^{\vee}\equiv\mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{A}^{-1T})^{\cdot}\mathbf{A}^{T},\quad \mathbf{Z}^{<}\equiv\mathbf{A}^{-1T}(\mathbf{A}^{T}\mathbf{Z}\mathbf{A}^{-1T})^{\cdot}\mathbf{A}^{T}$$

$$\mathbf{Z}^{>}\equiv\mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{A})^{\cdot}\mathbf{A}^{-1},\ \mathbf{Z}^{\nabla}\equiv J^{-1}\mathbf{A}(J\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{A}^{-1T})^{\cdot}\mathbf{A}^{T},\ \mathbf{Z}^{\circ}\equiv\mathbf{Q}(\mathbf{Q}^{T}\mathbf{Z}\mathbf{Q})^{\cdot}\mathbf{Q}^{T} \tag{4.1}$$

$$\mathbf{Z}^{*}\equiv\mathbf{Q}_{J}(\mathbf{Q}_{J}{}^{T}\mathbf{Z}\mathbf{Q}_{J})^{\cdot}\mathbf{Q}_{J}{}^{T},\quad \mathbf{Z}^{\mathrm{cr}}\equiv\mathbf{Q}_{\Psi}(\mathbf{Q}_{\Psi}^{T}\mathbf{Z}\mathbf{Q}_{\Psi})^{\cdot}\mathbf{Q}_{\Psi}^{T}$$

где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{Q}$ из (1.1), $J:=|\det\mathbf{A}|$; $\mathbf{Q}_J$ определено подобно $\mathbf{\Delta}$ по формуле (3.3) с $\mathbf{\Gamma}\equiv\mathbf{\Omega}$, а $\mathbf{Q}_{\Psi}$ — с $\mathbf{\Gamma}\equiv\mathbf{\Psi}$ ($\mathbf{\Delta}_0\equiv\mathbf{I}$). Частично формулы (4.1) приведены в [1—4, 8—11]. Для первых шести из них явное «свернутое» выражение хронологических экспонент (3.3) существенно упрощает интегрирование по (3.8). Аналогичные свернутые представления могут быть получены (например, подходящим использованием (3.9)) и для некоторых других производных (1.6). Дополнительные упрощения в исчислении и интегрировании производных (1.6) имеют место для частных классов движений или для частных классов левых тензорных процессов $\mathbf{Z}$, специальным образом связанных с процессом движения среды (например, соответствующими уравнениями состояния).

Предложение 1. В случае жесткого поступательно-вращательного движения среды для произвольного левого дифференцируемого $\mathbf{Z}(t)$ имеем: $\mathbf{Z}^{\wedge}\equiv\mathbf{Z}^{\vee}\equiv\mathbf{Z}^{<}\equiv\mathbf{Z}^{>}\equiv\mathbf{Z}^{\nabla}\equiv\mathbf{Z}^{*}\equiv\mathbf{Z}^{\circ}$; в случае произвольного изохорического движения для любого $\mathbf{Z}(t)$ имеем $\mathbf{Z}^{\nabla}\equiv\mathbf{Z}^{\vee}$.

Предложение 2. Для произвольного левого дифференцируемого $\mathbf{Z}(t)$ имеем [9]: 1) в случае безвихревого движения $\mathbf{Z}^{*}\equiv\mathbf{Z}^{\cdot}\not\equiv\mathbf{Z}^{\circ}$; 2) в случае движения без поворотов относительно отсчетной конфигурации ($\mathbf{Q}\equiv\equiv\mathrm{const}$) имеем $\mathbf{Z}^{\circ}\equiv\mathbf{Z}^{\cdot}\not\equiv\mathbf{Z}^{*}$; 3) в случае движения с фиксированными в частице среды главными осями тензора деформаций (тензора $\mathbf{X}$) имеем $\mathbf{Z}^{\circ}\equiv\mathbf{Z}^{*}\not\equiv\mathbf{Z}^{\cdot}$.

Предложение 3. Если $\mathbf{Z}(t)$ коммутирует с $\mathbf{\Phi}(t)$, то в произвольных движениях для любого p имеем $\overset{t}{D}_{(p,-p,0)}[\mathbf{Z}]\equiv\mathbf{Z}^{\mathrm{cr}}$, в частности, при $\mathbf{\Psi}\equiv\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{\Phi}\equiv\mathbf{V}$ и $\mathbf{VZ}\equiv\mathbf{ZV}$ имеем $\mathbf{Z}^{<}\equiv\mathbf{Z}^{>}\equiv\mathbf{Z}^{*}$.

Предложение 4. Если $\mathbf{Z}(t)$ коммутирует с $\mathbf{Y}(t)$, то в произвольных движениях $\mathbf{Z}^{\circ}\equiv\mathbf{Y}\mathbf{Z}^{<}\mathbf{Y}^{-1}\equiv\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{Z}^{>}\mathbf{Y}$.

Следствие. В условиях предложений *2* (п. 3) и *4* (равно как предложений *2* (п. 3) и *3* при $\mathbf{\Psi}=\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{\Phi}=\mathbf{V}$) имеем $\mathbf{Z}^{<}=\mathbf{Z}^{>}=\mathbf{Z}^{\circ}=\mathbf{Z}^{*}$, и эти производные сами коммутируют с $\mathbf{Y}$ и с $\mathbf{V}$.

Предложения *1—4* и следствие позволяют в указанных в них случаях упрощать вычисления путем замены одних производных другими. Отметим, что если под $\mathbf{Z}$ понимается тензор истинных напряжений Коши, то условие предложения *4* выполняется для любых изотропных упругих материалов, а также для соотношений изотропной деформационной пластичности (причем для последних требование их физической достоверности уже при малых деформациях — простота процесса деформации — обеспечивает выполнение условий предложения *2* (п. 3), а значит и следствия); условие предложения *3* (при $\mathbf{\Psi}=\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{\Phi}=\mathbf{V}$) выполняется для соотношений теории течения Сен-Венана, соотношений теории пластичности малой кривизны и других соотношений «скоростного» типа, задающих изотропную (квазиизотропную [18]) зависимость тензора напряжений Коши от тензора скоростей деформаций $\mathbf{V}$.

В общем случае представление скоростей изменений тензоров производными из семейства (1.6) дает по сравнению с известным набором производных значительно более широкие возможности подходящего выбора понятия скорости, обеспечивающего при построении модели конкретной среды наиболее простую форму определяющего соотношения (в терминах этого понятия скорости), приемлемую для анализа и расчетов, для удовлетворительной аппроксимации экспериментальных данных, а также для разработки самой теории эксперимента. Как показывают примеры численных расчетов (численные эксперименты) по моделям гипоупругости и пластического течения [15—17], выбор вида производной, входящей в определяющие соотношения данной формы, может оказывать существенное влияние на свойства модели. Заметим, что в отдельных случаях таких соотношений выбор производной по существу сводится к выбору тензора, характеризующего процесс деформации. Так, определяющее соотношение типа гипоупругости $D^t_{(p,q,r)}[\mathbf{Z}]=c\mathbf{V}$ ($c=\mathrm{const}$) переписывается в виде $\mathbf{Z}=c\mathbf{E}$, где левый тензор $\mathbf{E}$, характеризующий процесс деформации, вводится уравнением

$$D^t_{(p,q,r)}[\mathbf{E}]=\mathbf{V}\quad (\mathbf{E}|_{t=t_0}=0)\tag{4.2}$$

и выражается формулой интегрирования (3.8). Тогда аппроксимация свойств среды таким соотношением сводится к выбору подходящего тензора-деформатора $\mathbf{E}$, т. е. подходящего вида производной в (4.2), и коэффициента c. По уравнению (4.2) могут быть получены как известные, так и новые тензоры деформаций $\mathbf{E}$ [8, 9]. Решение (4.2) с производной Яуманна $\mathbf{E}^*$ приводит к «яуманновым» левой и правой мерам деформации и наглядно выявляет геометрическое происхождение известной «аномалии» колебаний напряжений в гипоупругом материале при простом сдвиге [15, 16], что подтверждает отмеченную ранее [1] ограниченную применимость производной Яуманна, равно как и любого другого оператора.

Важно отметить, что многие модели сплошных сред формулируются в терминах левых (пространственных) тензоров напряжений и деформаций (с привлечением различных производных), что затрудняет непосредственное выявление материальных (лагранжевых) свойств моделей и их сопоставление с другими моделями. Использование (3.4) приводит к эквивалентным лагранжевым формулировкам. Так, (4.1) позволяет переписать определяющие соотношения классической теорий пластичности: теорий Сен-Венана и Прандтля — Рейсса, теории вязкопластических течений и других — в терминах материальных (лагранжевых) тензоров и их материальных производных. В целом, выявленные свойства введенных производных (1.6) расширяют возможности адекватного построения и анализа определяющих соотношений деформируемых сред.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Седов Л. И.* Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 284 с.
2. *Ильюшин А. А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1978. 287 с.
3. *Жермен П.* Курс механики сплошных сред. М.: Высш. шк., 1983. 399 с.
4. *Грин А., Адкинс* Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. 455 с.
5. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
6. *Коларов Д., Балтов А., Бончева Н.* Механика пластических сред. М.: Мир, 1979. 302 с.
7. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия: Методы и приложения. М.: Наука, 1979. 759 с.
8. *Бровко Г. Л.* Следствия постулата макроскопической определимости для различных мер деформаций и напряжений // Проблемы механики деформируемого твердого тела. Калинин: Изд-е Калинин. ун-та, 1986. С. 96–102.
9. *Бровко Г. Л.* Некоторые подходы к построению определяющих соотношений пластичности при больших деформациях // Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ, 1987. С. 68–81.
10. *Черных К. Ф.* Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988. 190 с.
11. *Поздеев А. А., Трусов П. В., Няшин Ю. И.* Большие упругопластические деформации. М.: Наука, 1986. 232 с.
12. *Левитас В. И.* Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев: Наук. думка, 1987. 228 с.
13. *Dienes J. K.* On the analisis of rotation and stress rate in deforming bodies // Acta Mech. 1979. V. 32. No. 4. P. 217–232.
14. *Бровко Г. Л.* Подходы к построению определяющих соотношений пластичности // Современные вопросы физики и приложения. Тез. докл. и сообщ. Всесоюз. конф., Москва, МГУ. 1984, М.: Ин-т общей физики АН СССР, 1984. С. 56.
15. *Lee E. H., Mallett R. L., Wertheimer T. B.* Stress analysis for anisotropic hardening in finite-deformation plasticity // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1983. V. 50. No. 3. P. 554–560.
16. *Dafalias Y. F.* Corotational rates for kinematic hardening at large plastic deformations // Trans. ASME: J. Appl. Mech. 1983. V. 50. No. 3. P. 561–565.
17. *Atluri S. N.* On constitutive relations at finite strain: hypo-elasticity and elasto-plasticity with isotropic of kinematic hardening // Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng. 1984. V. 43. No. 2. P. 137–171.
18. *Rychlewski J.* On quasi-isotropic tensor functions // Arch. Mech. 1984. V. 36. No. 2. P. 195–205.

Москва

Поступила в редакцию
1.03.1988